



BOSTON PUBLIC LIBRARY
THE BOWDITCH COLLECTION



LA SCIENCE
DE
L'HOMME DE MER;
OU

PRINCIPES d'Arithmétique, de Géométrie, d'Astronomie, & de Mécanique, dont l'application est nécessaire & utile à l'Art de la Marine.

Par CHARLES ROMME, *Professeur de Mathématiques & de Navigation.*

Imprimée chez P.L. CHAUVET, à la Rochelle;
Et se vend
A PARIS;
Chez BARROIS l'aîné, Libraire.

An 3.e de la République Française.

AVANT-PROPOS

C'EST l'ignorance, qui rendant incertains les pas des premiers navigateurs, a resserré leurs courses dans des espaces très-bornés. C'est elle, qui, depuis des siecles, restraint les sauvages insulaires à l'usage de bâtimens aussi frêles que grossiers. C'est elle, qui circonscrit encore, dans des limites très-étroites, la navigation de certains peuples civilisés; & c'est en s'éclairant, que les Nations Européennes, sont parvenues à couvrir toutes les mers du Globe, non-seulement de Navigateurs dont l'instruction a d'ailleurs différencié les talens & les succès; mais aussi de vaisseaux qui, variés dans leur grandeur & leur force, le sont encore dans leur forme & dans leurs qualités.

Si on considere particuliérement les progrès successifs de l'Art de la Marine, de cet art qui plus que tout autre honore l'esprit humain; on remarque, que d'abord rapides & brillans, ensuite lents & foibles, & maintenant stationnaires, leur marche a toujours été parallele à celle des progrès des sciences exactes, & avec une dépendance relative qu'il n'est pas permis de méconnoître. Un examen plus approfondi démontre même que ces sciences ont non-seulement concourru à établir solidement les bases de l'Art entier, mais qu'elles seules peuvent aujourd'hui lui assurer toute la perfection qu'il doit encore acquérir pour obtenir la confiance entiere des

Navigateurs. Les ſciences enfin ſont néceſſaires aux progrès de l'art, comme aux ſuccès des artiſtes.

Sans doute, l'expérience a ſouvent averti du beſoin de quelques regles eſſentielles de cet Art ; ſouvent elle a fait preſſentir des opérations utiles; mais c'eſt toujours dans le creuſet des ſciences que les procédés ont été épurés, ſéparés, analyſés, & qu'ils ont reçu le caractere qui devoit les faire employer avec ſécurité.

Tous les jours l'expérience s'aggrandit ; ſans ceſſe, elle répand de nouvelles leçons ; tous les jours, elle nous fait connoître des limites que l'Art ne peut franchir, en ſignalant des vaiſſeaux, même parmi les modernes, qui ont, ou une ſtabilité inſuffiſante, ou une marche trop lente, ou une dérive trop grande, ou des mouvemens trop irréguliers & trop durs, ou des formes peu convenables ſous pluſieurs rapports : & tous ces défauts de perfection, n'ont pu encore être détruits par le ſeul ſecours de cette expérience très-prolongée, puiſqu'elle n'a ſervi qu'à les couvrir par des palliatifs peu ſatisfaiſans.

La pratique de la mer ne peut donc ſeule élever l'art à de nouveaux progrès. Néanmoins elle peut grandement y concourir ; parce qu'aujourd'hui il n'appartient qu'à elle de fournir toutes les données, néceſſaires pour que la théorie faſſe diſparoître toutes les difficultés, ou parce que ce n'eſt qu'à la mer qu'on peut à préſent recueillir & répéter les grandes expériences qui, pour la perfection entiere de la marine, reſtent encore à faire, ſur les mouvemens des vaiſſeaux,

ſur l'action des lames & des courans, ſur la réſiſtance de l'eau, & ſur les effets utiles ou nuiſibles de toute ſorte de manœuvres.

De telles expériences demandent, ſans doute, pour être bien faites, des hommes inſtruits qui ſachent les diriger, les combiner, les varier, ſaiſir leurs rapports importans, déſigner leurs traits diſtinctifs, & ſur-tout les décrire avec cette netteté, cette méthode & cet enchaînement qui préparent les découvertes. Ces mêmes expériences demandent auſſi, pour être enſuite utiliſées, des hommes qui ſoient profondément verſés dans les ſciences exactes. Mais les Savans célebres ont négligé d'étudier, & la langue, & l'art des marins; & ſi les navigateurs ſont conſultés dans les devis de leurs campagnes, on reconnoît preſque généralement qu'avec des connoiſſances théoriques plus étendues, ils auroient mieux dépeint les défauts des vaiſſeaux & les événemens de la mer : c'eſt-à-dire avec toutes les circonſtances eſſentielles, completes, & déciſives, qui peuvent ſeules aider, à baſer des regles nouvelles, ou à effacer les vices des anciennes.

L'inſtruction théorique eſt donc recommandée ſpécialement par cette double conſidération; & ſi elle eſt néceſſaire aux hommes de mer, ſoit pour devenir des obſervateurs utiles, ſoit pour perfectionner l'art de la marine; elle l'eſt encore eſſentiellement pour exercer cet art avec autant d'intelligence que de ſuccès. Car il n'eſt aucun navigateur qui, placé dans des cas difficiles & rares, n'ait ſenti que ſes reſſources,

malgré une longue pratique, ont toujours été d'autant plus bornées, que son esprit étoit moins nourri de l'étude des sciences, & moins pénétré de leurs rapports intimes avec la marine.

En effet, s'agit-il d'arrimer un vaisseau, de maniere à ajouter à ses qualités, ou à corriger les défauts attachés à la forme de sa carene. S'agit-il d'en varier convenablement, ou la mâture, ou la voilure, ou les manœuvres, pour lui donner une marche plus rapide, pour diminuer sa dérive, pour empêcher ses déviations, pour régulariser ou adoucir ses mouvemens, &c.; c'est la mécanique des solides & des fluides qui fournit les principes de toutes les regles à suivre pour obtenir les résultats desirés. S'agit-il de mesurer la marche d'un bâtiment au milieu des mers; d'assigner à chaque instant, sur le globe, ou sur des cartes, sa position réelle, ou ses distances relatives à des points connus; de tracer les contours des mers, les sinuosités des détroits, l'étendue des rades & des ports, la situation exacte des rochers, des isles, des haut-fonds, des mouillages, &c; c'est par le secours de la Géométrie & de l'Astronomie qu'on peut y parvenir. Enfin, dans les évolutions navales même, la Géométrie n'est pas sans utilité, pour diriger savamment la chasse ou la retraite d'un bâtiment, pour déterminer dans un corps d'armée la place qu'un vaisseau doit occuper, la route qu'il doit suivre pour y arriver, & celle qui le conduit à un nouveau poste dans le passage d'une disposition d'armée à un ordre différent.

Il faut donc cesser de penser, & sur-tout

de dire, avec les marins ignorans, que les connoiſſances théoriques ne ſont pas néceſſaires aux hommes qui veulent mériter quelque réputation d'habileté dans l'exercice de l'art de la marine: il faut ceſſer de croire qu'ils ne doivent s'inſtruire qu'à la ſeule école de l'expérience. Il faut enfin reconnoître que la théorie & la pratique doivent concourir enſemble, ſoit à perfectionner l'art, ſoit à former l'artiſte; & convenir que ſi celui-ci n'obtient un tel titre que lorſqu'il ſait exécuter parfaitement les regles de ſon art; ceux qui ſont deſtinés, à lui commander ſes opérations ou à le diriger dans leur exécution, doivent en connoître non-ſeulement les procédés, mais auſſi les principes.

Certes l'étude de la théorie ſeule ne peut former complétement un homme de mer; mais auſſi les leçons d'une pratique aveugle ne peuvent le conduire qu'à des connoiſſances ſi bornées, qu'elles abandonnent ſans reſſources, un imitateur ſervile, dans tous les cas qui n'ont pas été prévus, & dans ceux dont les circonſtances ſe préſentent ſous une forme nouvelle. La théorie étend la ſphere des idées de l'homme qui s'en occupe; elle prépare, elle dreſſe ſon eſprit à des combinaiſons variées; elle porte, & elle aide même à inventer des moyens propres à produire des effets auſſi directs qu'utiles. Il eſt vrai, que dans tout homme qui n'eſt appliqué qu'à des études purement ſpéculatives, les ſens reſtent ſans activité, les membres ſans exercice; & il n'apprend pas ainſi, ce qui ne peut être le fruit que d'une certaine expérience, c'eſt-à-dire, cet

art de saisir vivement l'époque souvent fugitive à laquelle il devient nécessaire en mer de commander, ou d'exécuter une manœuvre décisive. C'est alors à l'école seule de la pratique, qu'un marin peut recueillir cette instruction supplémentaire; & c'est en exerçant son art, qu'il s'accoutume à juger surement, du moment important, & souvent unique, auquel il doit agir, pour éviter que l'application trop tardive d'un principe connu, reste dès lors, sans effet, comme sans utilité.

Il faut donc pour former complétement un homme de mer, réunir les leçons de la théorie à celles de l'expérience. Les unes & les autres, en se mêlant, se confirment & s'éclairent réciproquement. Elles accélerent alors concurremment les progrès de l'artiste, & elles le rendent habile à choisir aussi surement que vivement les manœuvres qui conviennent à toutes les circonstances rares ou communes.

L'expérience instruit les hommes, non-seulement par les faits dont ils sont témoins attentifs & immédiats, mais aussi par ceux, dont la relation leur est transmise par leurs prédécesseurs ou par leurs contemporains, qui les ont observé avec soin. Ainsi, un tableau raisonné, de l'art de la marine, de ses efforts, de ses succès, de ses imperfections, de l'ordre successif de ses travaux, & de toutes les regles que des épreuves multipliées ont confirmé, devient nécessaire à l'instruction des hommes de mer, autant que des campagnes peuvent l'être, pour les exercer dans leur art.

Enſuite, ſi on analyſe, toutes les opérations navales, les principes ſur leſquels elles repoſent, & les calculs les plus habituels qu'elles entraînent; on reconnoît que, pour être exécutées avec autant de facilité que de confiance, elles exigent, ſuivant la nature de leurs réſultats, comme on l'a dit précédemment, des connoiſſances plus ou moins profondes en Arithmétique, en Géométrie, en Aſtronomie, & en Mécanique.

Toutes ces ſciences ſont donc néceſſaires à un homme de mer. Mais certes il ne doit pas les approfondir dans toute leur étendue, ni les parcourir dans toutes leurs ramifications. Il ſuffit qu'il les connoiſſe ſous les rapports d'utilité qu'elles peuvent avoir avec l'art de la marine; & autant qu'elles peuvent ſervir, ſoit à l'intelligence des regles de cet art, ſoit à la correction de ſes défectuoſités, ſoit à la conception de procédés nouveaux, ſoit à la perfection de toutes les opérations navales.

Ces ſciences doivent donc faire partie de l'inſtruction qu'il convient de donner aux jeunes marins. Mais doivent-elles leur être enſeignées iſolement, comme on l'a fait juſqu'à préſent? Ne convient-il pas qu'ils s'inſtruiſent en même temps, & de leur art, & des relations qui lient intimement les connoiſſances théoriques & pratiques? Alors, comment cette inſtruction doit-elle leur être transmiſe? Quel eſt l'ordre à établir dans l'enſeignement pour obtenir de prompts ſuccès? Et cet ordre doit-il être dicté, ou par la marche des ſciences, ou par celle de l'art? Dans l'étude des ſciences exactes, on pro-

cede des idées les plus ſimples aux combinaiſons les plus ſublimes. Dans l'art de la marine, au contraire, les premieres opérations, qui ont pour objet, la forme des vaiſſeaux, ou l'architecture navale, ſuppoſent une théorie très-élevée ; tandis que la derniere de ſes branches, qui eſt la navigation, n'eſt fondée que ſur les premiers élémens de mathématiques.

C'eſt pourquoi les Citoyens, qui ſe deſtinent à exercer l'art de la marine, & qui, dans un âge toujours peu avancé, ont un beſoin commun d'apprendre, ſoit à raiſonner avec méthode, ſoit à appliquer facilement à la pratique les réſultats de la théorie, me paroiſſent devoir commencer leurs études par celle des ſciences, & compléter enſuite leur inſtruction, non-ſeulement par une méditation profonde, mais auſſi par un uſage répété, de tous les procédés employés par l'art, depuis la conſtruction des vaiſſeaux, juſqu'à l'exécution des campagnes de mer.

Il me ſemble que les leçons de théorie doivent auſſi préſenter aux éleves un attrait néceſſaire, une utilité palpable, & une direction bien prononcée. Ainſi je penſe que dans leur ſuite progreſſive elles doivent être entremêlées, & de pluſieurs applications choiſies de chaque principe à certaines opérations navales, & de quelques leçons de l'expérience qui ſeroient ou puiſées dans un traité de l'art, ou reçues intermédiairement, au milieu des arſenaux, & dans des campagnes de mer. Cette marche ſerviroit à démontrer la néceſſité des principes, à indiquer leurs uſages & leurs applications, à développer leurs com-

binaiſons, & à les identifier tellement avec leurs conſéquences, que par elles ils feroient rappellés ſans ceſſe, dans la pratique, à l'eſprit qui ſe ſeroit une fois pénétré de leur vérité. Cette méthode, que je regarde comme la plus convenable à l'inſtruction des marins, enchaînant dans un ordre lumineux toutes les connoiſſances théoriques & pratiques, auroit encore l'heureux effet d'attacher, à l'étude des ſciences, des hommes qui, en leur conſacrant un temps précieux, ſe convaincroient des ſecours qu'elles leur fourniſſent pour apprendre à exercer & à perfectionner leur art.

Perſuadé par ces réflexions, & animé par des motifs d'intérêt public, en conſidérant que les talens & les lumieres des Officiers de mer garantiſſent les ſuccès des armées navales, les progrès & la ſureté de la navigation; je me ſuis attaché à l'exécution du plan que je crois devoir aſſurer l'inſtruction complette des hommes de mer. Déjà en publiant un ouvrage *in* 4°., intitulé *L'Art de la Marine*, j'ai tracé le tableau méthodique & détaillé de cet art. J'ai décrit toutes les opérations navales dans l'ordre ſucceſſif qui les enchaîne naturellement. J'ai fait voir comment elles ſont exécutées, ſoit pour conſtruire un vaiſſeau, ſoit pour l'armer, le gréer, le manœuvrer, & le conduire à une deſtination quelconque, ſoit pour le faire évoluer dans un corps d'armée. En indiquant les préceptes, j'ai eu ſoin de déſigner les principes dont ils ſont les conſéquences; & j'ai démontré, autant qu'il m'a été poſſible, les baſes, les ſources,

& les rapports des regles les plus importantes de l'art entier de la marine. (1) Aujourd'hui, pour faciliter l'intelligence de la partie théorique de cet ouvrage (dont je me propose de donner bientôt une nouvelle édition), je publie *la science de l'Homme de mer*, en un volume *in*-8°, où j'ai réuni les seules parties des sciences exactes dont l'application est reconnue nécessaire ou utile à l'art de la marine: & afin que la partie pratique devienne commode à suivre par tous les citoyens, soit à terre, soit sur les vaisseaux; j'ai fait imprimer séparement le *Dictionnaire de la Marine Française*, où j'ai présenté les définitions de ce grand nombre de termes techniques qui appartiennent exclusivement à la langue des hommes de mer.

Tels sont les ouvrages que je présente pour servir à l'instruction publique. Ils m'ont été utiles dans l'enseignement des sciences pendant une longue suite d'années; & une telle épreuve me les a fait juger suffisans, soit pour initier dans la connoissance de l'art entier de la marine les jeunes citoyens qui se proposent de l'exercer, soit pour accélérer les progrès des hommes même qui auroient déjà quelque expérience de la mer. En effet ils y trouveront une théorie assez étendue, & un tableau assez

---

(1) Ceux qui desireroient de plus grands détails sur le gréement & les manœuvres des vaisseaux, peuvent consulter les descriptions que j'ai données des Arts de la Mâture & de la Voilure, dont l'Académie avoit ordonné l'impression pour faire partie de la collection des arts & métiers.

détaillé de toutes les opérations navales ; pour les aider, ſoit à étudier dans le ſilence du cabinet, toutes les branches de cet art, avec autant de méthode que de lumieres ; ſoit à approfondir ſes beſoins & ſes reſſources ; ſoit à ſentir la chaîne de toutes les regles qui le compoſent, ainſi que leurs liaiſons avec la théorie qui leur ſert de baſe. Avec de tels ſecours, dans les ports & à la mer, ils pourront, ſans être embarraſſés comme précédemment par l'ignorance de la langue des artiſtes, ſaiſir la marche & la ſuite de toutes les opérations, raiſonner leurs réſultats, juger des moyens d'exécution, & méditer de nouveau les mêmes objets en reportant leur attention ſur les developpemens relatifs qui ſont préſentés dans le traité de l'art de la marine. Dans un temps très-court ils pourront donc acquérir des lumieres étendues & néceſſaires que, ſans de tels ouvrages, & de telles études, ils n'obtiendroient qu'imparfaitement d'une expérience très-prolongée. L'effet avantageux de cette inſtruction tranſmiſe dans l'ordre que j'ai indiqué, ſera auſſi, ſans doute, de diſpoſer ceux qui l'auront reçu, à profiter habilement & rapidement des leçons de l'expérience ; de donner à leur génie tout l'eſſor néceſſaire pour imaginer de nouveaux procédés, ou pour combiner & étendre avec autant de variété que de confiance ceux qui déjà ſont connus ou adoptés ; & enfin de former promptement des marins utiles, ainſi que des obſervateurs, auſſi exacts qu'éclairés, ſoit des phénomenes & des événemens de la mer, ſoit de tous les faits qui peuvent intéreſſer les progrès & l'entiere perfection de l'art.

Ainſi déſormais l'inſtruction, ſi néceſſaire pour exercer l'art de la marine peut devenir auſſi facile à acquérir, qu'à propager. Car l'enſeignement des ſciences eſt aſſuré à tous les citoyens, dans les écoles nationales des ports; & des traités didactiques de l'art & de ſes principes ſeront publiés, pour achever d'éclairer les travaux des arſenaux, ainſi que les manœuvres des vaiſſeaux.

La conſidération de ces reſſources déterminera, ſans doute, les hommes de mer à faire une étude approfondie & néceſſaire de leur art. L'intérêt de la Patrie l'exige d'ailleurs impérieuſement; & ſi de tels motifs n'étoient pas encore aſſez puiſſans, l'intérêt particulier en imposeroit l'étroite obligation, Car, dans une République, où les talens diſtingués doivent ſeuls être appellés aux fonctions ſupérieures, le Gouvernement ſéparera irrévocablement les hommes éclairés, de ceux qui ne ſuivent qu'une routine toujours aveugle, pour ne confier qu'au mérite connu le commandement, ou la direction de toutes les opérations navales auxquelles ſont attachées la gloire de la Nation & la proſpérité publique.

LA SCIENCE

DE

L'HOMME DE MER.

SECTION PREMIERE.

L'ARITHMÉTIQUE.

1. L'ARITHMÉTIQUE eſt la ſcience du calcul des nombres. Elle enſeigne l'art de compter, & elle donne les regles raiſonnées ſuivant leſquelles on peut, non ſeulement, compoſer ou décompoſer les nombres, mais auſſi déterminer leurs rapports généraux & particuliers.

2. Un nombre en général, exprime de combien d'unités & de parties d'unité, une quantité eſt compoſée; & ce mot quantité eſt le nom qui eſt donné à toute choſe ſenſible, qui eſt ſuſceptible d'augmentation & de diminution. Si on imagine qu'un objet matériel, ſoit partagé, dans toute ſon étendue, en parties égales & connues, le nombre de ces parties, donne une idée préciſe de cet objet; & lorſque les parties égales, dont cette quantité eſt compoſée, ont une grandeur particuliere & généralement convenue, elles reçoivent le nom d'unités. Cette grandeur eſt d'ailleurs fixée aſſez arbitrairement; car chaque Nation a adopté des meſures qui ſont différentes entr'elles,

quoique chacune les employe pour comparer les quantités de même eſpece.

3. Le pied & la livre d'Angleterre n'ont pas la grandeur, que les François donnent au pied & à la livre dont ils font uſage. Des différences diſtinguent auſſi les meſures analogues de Hollande, de Suede, de Ruſſie, de Turquie, &c. la toiſe de France qui a une longueur connue & convenue, eſt une unité qui eſt employée pour meſurer les diſtances. Si une diſtance eſt conſidérable; ſi, par exemple, c'eſt celle qui ſépare deux points éloignés & pris ſur la ſurface de la mer; alors elle eſt exprimée en lieues; & la lieue, qui d'ailleurs eſt compoſée d'un certain nombre de toiſes & de pieds, devient l'unité conventionnelle qui ſert à meſurer ces longueurs. C'eſt ainſi que les maſſes de pluſieurs quantités, ſont exprimées par des livres, qui ſont autant de petits poids égaux, qu'on eſt convenu d'employer comme unités, pour meſurer les poids de toute ſorte d'objets. L'unité en général eſt donc une quantité déterminée conventionnellement & employée comme meſure commune, pour ſervir à comparer toutes les quantités d'une même eſpece. C'eſt pourquoi des objets étant mis en parallele relativement à leur longueur, largeur ou épaiſſeur; ces dimenſions ſont exprimées en toiſes, ou en pieds, ou en pouces, ou en lignes. S'ils le ſont relativement à leur poids; la livre, l'once ou le gros doivent ſervir à les comparer ſous ce rapport. Dans la marine, la lieue eſt, comme nous l'avons dit, l'unité employée pour meſurer de grandes diſtances. La braſſe dont la longueur eſt de cinq pieds, ſert de meſure à des objets plus petits, tels qu'un cordage & les profondeurs de la mer. Le tonneau qui peſe 2000 liv. ſert à meſurer le port des bâtimens de mer, leur poids, & celui des matieres qu'ils peuvent tranſporter. La palme dont la longueur eſt de 13 lig. eſt l'unité deſtinée à la meſure de la groſſeur des arbres propres à la mâture des vaiſſeaux. Une longueur de 120 braſſes, qui eſt celle d'un cable ordinaire, & qui eſt nommée encablure, eſt auſſi une unité employée à l'eſtimation de certaines diſtances;

enfin, un nœud qui est une longueur de 47 $\frac{1}{2}$ pieds est une unité qui sert à mesurer sur la surface de la mer, le chemin que fait un vaisseau, dans un intervalle de tems déterminé.

4. Le nombre des unités, dont une quantité est composée, étant plus ou moins considérable; il a fallu imaginer & des noms pour indiquer divers nombres, & des signes convenables pour les écrire. C'est pourquoi on est convenu de former diverses classes d'unités, ou des nombres composés chacun, de plus ou moins d'unités. On a donc décidé que l'assemblage de dix unités, formeroit une unité d'une classe supérieure, & qu'on lui donneroit le nom de dixaine; que celui de dix dixaines, & par conséquent de 100 unités simples, seroit nommé centaine. L'ensemble de dix centaines a reçu le nom de mille; celui de dix milles, le nom de dixaines de mille; & successivement on a formé dans le même ordre, des classes de centaines de milles, de millions, de dixaines de millions, de centaines de millions, de milliards, &c. de cet arrangement ou de ces conventions, il resulte que dix signes ou dix caracteres doivent suffire pour écrire intelligiblement, le plus grand nombre possible. En effet, on ne peut compter, dans chaque classe indiquée, que depuis zéro d'unité, jusqu'à neuf unités; & les signes indicatifs du nombre de ces unités, ou les chiffres choisis & employés sont, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. chacun de ces chiffres, pris séparément, peut exprimer un nombre d'unités d'une classe quelconque, & sa position locale ou relative aux autres chiffres qui l'acompagnent, suffit pour annoncer l'espece des unités dont il indique le nombre; c'est-à-dire, que la valeur de chaque chiffre, est dépendante de la place qu'il occupe dans une suite de chiffres, qu'un nombre peut exiger, pour être écrit dans sa totalité. C'est ainsi que le dernier chiffre placé à la droite d'un nombre composé, d'unités, de dixaines, de centaines, &c. n'exprime qu'un nombre d'unités: celui qui précéde ce dernier immédiatement & sur sa gauche, indique un nombre de dixaines;

celui qui est placé immédiatement sur la gauche du chiffre des dixaines, est un nombre de centaines, &c. Conséquemment aux conventions précédentes, on peut dire d'un nombre quelconque & entier, qu'il est composé d'unités, de dixaines, de centaines, de milles, &c. & que pour écrire ou lire un nombre, il faut écrire ou lire toutes les parties qu'il renferme, & indiquer qu'elles appartiennent à telle ou telle classe d'unités. Ainsi, soit proposé d'écrire le nombre entier, cinq cents vingt mille trois cents quarante-six unités? on doit écrire, 1°. le nombre des unités de la plus haute classe, qui est ici de cinq cents mille, & l'indiquer par le chiffre 5; 2°. le nombre des dixaines de mille ou des unités de la classe immédiatement inférieure à la précédente, & ce nombre est ici deux, qui est indiqué par le chiffre 2, placé à la droite du chiffre 5; 3°. Le nombre des unités de milles qui est zéro, & qui est indiqué par 0, placé à la droite & à côté du chiffre 2; enfin le même raisonnement sert à prouver quelle doit être la place que doivent occuper à la suite & à la droite des 1.ers chiffres 520, ceux qui sont propres à exprimer le nombre, ou des centaines ou des dixaines, ou des unités, qui sont parties du nombre proposé. Ce dernier est donc parfaitement représenté par 520346; & l'ordre qui regne entre les chiffres qui le composent, rend très-sensibles toutes les classes d'unités qui concourent à sa formation. Il devient superflu, après tous les détails précédens, de remarquer que les diverses classes d'unités qui se trouvent réunies dans un nombre, étant prises trois à trois (à commencer par la droite) forment des ordres numéraires qui portent les noms, d'unités, de milles, de millions, de milliards, &c.; c'est-à-dire qu'on distingue, dans le premier ordre, des unités, des dixaines & des centaines; dans le second ordre, des milles, des dixaines de mille des centaines de mille, &c. cette nouvelle division rend très-facile, l'énoncé d'un nombre quelconque, lorsque tous ces ordres sont separés dans l'étendue d'un nombre donné.

5 Après avoir développé les regles conventionnelles de la numération, nous allons exposer les regles générales qu'enseigne l'arithmetique, pour faire les combinaisons principales des nombres. Comme on peut se proposer, ou d'ajouter ensemble plusieurs nombres, ou de connoître leur différence, ou de les répéter plus ou moins de fois, ou de les partager en parties égales, ou de chercher combien de fois ils se contiennent mutuellement; il est donc différentes combinaisons de nombres; & elles sont connues sous le noms d'addition, de soustraction, de multiplication & de division. Les opérations qui doivent être exécutées pour conduire aux résultats cherchés, sont soumises chacune à des regles particulieres; & nous allons les faire connoître avec tous les détails nécessaires, ainsi que les principes raisonnés qui leur servent de base fondamentale.

6. *Addition des nombres entiers.* Chercher la somme de plusieurs nombres c'est faire une addition: & comme on ne peut composer un tout homogene, que de quantités d'une même espece, on ne peut aussi réunir dans une somme, que des unités d'une même classe. C'est pourquoi, plusieurs nombres séparés, étant proposés pour être ajoutés ensemble; on doit, s'ils expriment des quantités de même dénomination, les écrire les uns au-dessous des autres, & dans un ordre tel qu'on fasse correspondre, sur une premiere colonne, les chiffres qui, dans les divers nombres, expriment les nombres de leurs unités; sur une seconde colonne à gauche de la premiere, les chiffres qui indiquent les nombres des dixaines; sur une troisieme, les chiffres des centaines, &c. après cette disposition préalable & nécessaire, on procede à la réunion de tous les chiffres qui, dans chaque colonne, indiquent des unités de même classe. Cette opération doit commencer par la colonne des unités, parce que, suivant les regles de la numération (4), ce sont les unités des classes inférieures qui, étant ajoutées ensemble, servent à former

celles des classes supérieures; ainsi, les chiffres des unités ou de la premiere colonne, doivent être réunis ensemble avant ceux des dixaines, ceux-ci avant les chiffres des centaines, ou de la troisieme colonne, &c. Lorsque les unités simples ont été ajoutées ensemble, leur somme peut être assez forte pour former une ou plusieurs dixaines. Ce nombre de dixaines ne pouvant être réuni qu'aux dixaines des nombres proposés, on le réserve pour les ajouter ensemble, & le reste des unités est alors écrit seul sous la colonne des unités. Ensuite on ajoute ensemble les chiffres des dixaines, ou de la seconde colonne, & leur somme, si elle est assez grande pour former une ou plusieurs centaines, n'est pas écrite entiérement sous la colonne des dixaines; ces centaines sont reservées pour être jointes aux centaines de nombres proposés, & l'excédent en dixaines, est seul écrit sous la colonne des dixaines, ou à la gauche des unités. Les mêmes considérations dirigent, & doivent diriger l'addition des centaines, ainsi que celle des milles, &c., de tous les nombres proposés. Par un tel procédé, on parvient à réunir ensemble les unités de chaque classe, qui composent ces mêmes nombres; c'est-à-dire, à obtenir un nombre unique, qui est la somme de tous, & qui est toujours un nombre d'unités, d'une espece déterminée ou d'une dénomination commune.

7. Soit par exemple proposé, de déterminer la longueur totale d'un cable qui est formé par plusieurs cables, ajoutés bout à bout les uns aux autres? alors cette longueur n'étant que la somme des longueurs particulieres des cables réunis, il faut ajouter ensemble toutes ces longueurs partielles, après avoir eu l'attention préalable de les exprimer toutes en unités de même espece, telles que des brasses ou des pieds, ou des pouces, &c. Supposons que les cables composans soient au nombre de trois; l'un de 940 pieds, le second de 409 p. & le troisieme de 692 p. on voit qu'on a satisfait au premier principe qui exige que ces diverses longueurs ayent une même déno-

mination, puiſqu'elles ſont exprimées en pieds. On voit auſſi que la longueur du premier cable contient neuf centaines de pied, quatre dixaines de pied & zero d'unités de pieds. Les autres longueurs ſont compoſées pareillement d'unités, de dixaines & de centaines de pieds; ainſi pour ajouter ces nombres les uns aux autres, & en compoſer une ſomme ſuivant la regle générale qui a été indiquée précédemment, on écrit ces mêmes nombres les uns au-deſſous des autres, c'eſt-à-dire, les unités ſous les unités, les dixaines ſous les dixaines, & dans l'ordre ſuivant.
Les chiffres qui, dans chacun de ces nom- 940 p.
bres, expriment des unités, étant ajoutés 409
enſemble, leur ſomme eſt de onze pieds, 692
ou d'une dixaine de pieds, & d'une unité ———
de pied. La dixaine doit être reſervée pour 2041
être ajoutée aux autres dixaines des nombres propoſés; & l'unité qui reſte, doit être écrite ſous la colonne des unités, pour former le chiffre des unités de la ſomme cherchée. Les chiffres des dixaines étant réunis à la dixaine réſervée, donnent quatorze dixaines, ou une centaine & quatre dixaines de pieds. En ſe conformant au raiſonnement précédent, les quatre dixaines doivent être écrites ſous la colonne des dixaines, pour former les dixaines de la ſomme cherchée; & cette centaine, réſultante du nombre de dixaines, doit être ajoutée au nombre de centaines des quantités propoſées; la ſomme de toutes ces centaines eſt vingt; ou elle eſt exprimée par deux mille pieds, ſans aucune centaine de reſte. C'eſt pourquoi le chiffre 0 doit être écrit ſous la colonne des centaines à la gauche des dixaines, pour être le chiffre des centaines de la ſomme; & le chiffre 2 doit précéder ce dernier, pour indiquer le nombre de mille pieds qui ſont contenus dans les nombres ajoutés. C'eſt ainſi qu'on forme un nombre 2041 pieds, & ce nombre eſt la ſomme cherchée des nombres propoſés, parce qu'il renferme toutes les parties de ces nombres; c'eſt-à-dire, leurs unités, leurs dixaines & leurs centaines. C'eſt pourquoi le nombre 2041 pieds indique exactement

la somme des longueurs des trois cables supposés; & par consequent la longueur totatale d'un cable composé de ces mêmes trois cables.

8. *Soustraction des nombres entiers.* Chercher la différence de deux nombres, c'est faire une soustraction; & l'opération consiste à rétrancher l'un de ces nombres de celui qui lui est comparé. Le premier principe de cette opération, est comme dans l'addition, que les deux nombres qui doivent être soustraits l'un de l'autre, expriment des unités d'une même espece. Car on ne peut, par exemple, assigner une différence entre des poids & des longueurs; mais il est aisé détablir, celle de deux poids, ou celle de deux longeurs, ou celle de deux distances. Si les nombres comparés sont composés d'unités de diverses classes, telles que des unités, des dixaines, des centaines, des milles, &c. leur différence est celle des nombres de leurs unités, de leurs dixaines, de leurs centaines, &c.; & pour déterminer ces différences particulieres, il faut que ces nombres soient écrits l'un au-dessous de l'autre, dans le même ordre déjà indiqué dans l'addition. Ensuite, comme les unités d'une classe sont formées des unités des classes inférieures, il devient nécessaire de commencer la soustraction, en cherchant la différence, 1°. des chiffres correspondans qui expriment de simple unités; 2°. celles des chiffres des dixaines; 3°. celle des chiffres des centaines & successivement. Dans l'exécution de cette regle, il arrive quelque fois qu'un chiffre supérieur est plus petit que le chiffre inférieur correspondant; alors celui-ci ne peut être retranché du premier. Dans ce cas, on ajoute à la valeur de ce dernier chiffre, celle d'une unité d'une classe immédiatement supérieure, & cette unité qui est empruntée sur un des chiffres placés sur la gauche du chiffre trop petit, n'est réunie à celui-ci, qu'après avoir été reduite en unités de même espece que celle qu'il exprime; par ce moyen, le chiffre suppérieur est augmenté de dix unités, & le chiffre inférieur peut alors en être soustrait sans difficulté. Par ce procédé,

le chiffre qui précéde celui ſur lequel on a opéré, eſt diminué d'une unité. On tient compte de cette reduction, & on continue les ſouſtractions partielles, en retranchant & ſucceſſivement chaque chiffre inférieur de ſon correſpondant ſupérieur. On parvient ainſi, en réuniſſant les différences partielles, des nombres d'unités, de dixaines, de centaines, &c., qui compoſent les quantités propoſées, à determiner la différence totale de ces mêmes quantités. Cette opération étant terminée, le réſultat peut être mêlé de quelqu'erreur, mais il eſt toujours facile de reconnoître s'il eſt auſſi juſte qu'il doit l'être. En effet, le but de cette opération, eſt de trouver la différence d'une quantité à une autre plus grande; & cette différence étant néceſſairement ce qui manque à la premiere, pour être égale à la ſeconde, la ſomme de cette différence & de la plus petite des deux quantités comparées, doit être égale à la plus grande des quantités propoſées; c'eſt pourquoi l'égalité ou le défaut d'égalité entre cette ſomme & le plus grand des nombres comparés dans l'opération, devient une preuve de l'axactitude ou de l'inexactitude du réſultat obtenu. Soit propoſé, par exemple, de connoître la différence des diſtances qui ſeparent un port de deux points éloignés, il faut ſouſtraire ces deux diſtances l'une de l'autre. Soit la premiere de 60056 toiſes, & l'autre de 39069 toiſes Après avoir placé les deux nombres l'un au-deſſous de l'autre, & le plus petit ſous le plus grand, il faut ſouſtraire chaque chiffre inférieur de ſon correſpondant ſupérieur, en commençant par la droite. Le nombre de neuf unités ne peut être retranché du nombre ſix, c'eſt pourquoi on emprunte une dixaine ſur le chiffre à gauche. Cet emprunt reduit à 4 le chiffre 5, & cette dixaine convertie en unités, & réunie à 6, forme un nombre 16, dont on retranche 9: la différence eſt 7 unités, & le chiffre 7 doit être écrit au réſultat, comme le chiffre des unités de la différence des deux nombres. Une même difficulté ſe préſente pour la ſouſtraction

60056 t.	
39069	
20987 t.	

des deux chiffres qui expriment des dixaines. Ainsi on doit avoir recours à un emprunt ; mais le chiffre 0 qui précéde 5 dans le nombre supérieur, ne contient aucune centaine, c'est pourquoi on emprunte une unité sur le premier chiffre positif, qui est placé à gauche de celui pour lequel l'emprunt est nécessaire. Ce chiffre est ici 6, qui exprime six dixaines de mille. la dixaine de mille empruntée sur 6, n'est pas dans tout son entier, nécessaire au chiffre 4, pour rendre possible la soustraction qu'on se propose de faire; c'est pourquoi cette dixaine de mille est reduite en dix unités de mille, dont neuf sont supposées rester à la colonne des milles, au lieu du zero qui s'y trouve. La dixieme est convertie en dix centaines, dont neuf restent à la colonne des centaines, tandis que la dixieme centaine est reduite en dix dixaines, qui, portées à la colonne des dixaines, sont réunies aux quatre dixaines qui s'y trouvent. Alors, de la somme de 14 dixaines du nombre supérieur, retranchant les six dixaines du nombre inférieur, la différence 8 est celle des nombres de dixaines des deux quantités proposées. L'opération étant continuée, on retranche 0 de centaines d'un nombre de neuf centaines; on soustrait 9 milles de 9 milles, & enfin trois dixaines de mille, de cinq dixaine de milles. Réunissant ensuite toutes ces différences partielles, leur somme 20987 toises est la différence des deux distances proposées. L'exactitude de ce résultat doit ensuite être reconnue; & on s'en assure en se conformant à la regle indiquée précédemment; c'est-à-dire, en ajoutant cette différence 20987 toises avec la petite distance 39069 toises; & en examinant, si la somme de ces deux nombres est, comme elle doit l'être, égale à la plus grande distance. Une telle égalité a lieu dans l'exemple présent, & elle garantit ainsi la justesse de l'opération ou la bonté du résultat.

9. *Multiplication des nombres entiers.* Répéter un nombre plusieurs fois, c'est faire une multiplication Certes, cette opération pourroit se réduire à une simple addition, puisqu'en ajoutant un nombre plusieurs fois à lui même, la somme est réellement une répétition de ce nom-

bre ; mais alors l'opération feroit longue ; & comme le même réfultat peut être obtenu plus promptement, par d'autres regles qui conftituent l'opération nommée multiplication, il eft néceffaire de détailler ces regles & leurs principes. Dans cette opération, il y a un nombre qui doit être répété, & on le nomme multiplicande ; enfuite un autre nombre fert à indiquer combien de fois le premier doit être répété, & ce fecond nombre reçoit le nom de multiplicateur. On peut donc dire que la multiplication eft une opération par laquelle un nombre nommé multiplicande, eft répété autant de fois qu'il eft marqué par un autre nombre nommé multiplicateur ; & le réfultat de cette opération, ou la répétition du multiplicande, eft défigné fous le nom de produit. Si le multiplicateur n'eft compofé que d'un feul chiffre, il indique qu'il faut répéter un nombre d'unités de fois, le multiplicande quelqu'il puiffe être. S'il eft compofé non feulement d'unités, mais auffi de dixaines, il marque, par le chiffre de fes dixaines, combien de dixaines de fois le multiplicande entier doit être répété, &c.

10. La premiere regle de cette opération eft donc de multiplier tout le multiplicande, fucceffivement par chaque chiffre du multiplicateur, (en commençant par les unités de l'un & de l'autre nombre) ; & la feconde eft d'ajouter enfemble tous les produits partiels ou qui ont été obtenus féparément, pour compofer une fomme qui eft alors le produit total, ou le réfultat de la multiplication propofée. Mais ces produits partiels, de quelle claffe d'unités doivent-ils être ? il faut le favoir pour les réunir enfemble dans une feule & même fomme ; & la nature de l'opération fert à leur affigner aifément la dénomination qui leur convient. Confidérons le multiplicande comme exprimant dans fa totalité, un nombre d'unités de la claffe la plus baffe, ou un nombre de fimples unités. Lorfqu'il eft répété un nombre d'unités de fois, le produit ne peut être qu'un nombre plus grand d'unités ; mais répété un nombre de dixaines de fois, il doit réfulter, de cette opération, un produit dix

fois plus grand que s'il étoit répété un même nombre d'unités de fois; c'est-à-dire, que le multiplicande multiplié dans son entier par le chiffre des dixaines du multiplicateur, doit donner un produit de la classe des dixaines. De même le résultat, de la multiplication du multiplicande, par le chiffre des centaines du multiplicateur, doit être un nombre de centaines & ainsi des autres produits. De-là il suit que ces produits partiels, destinés à être ajoutés ensemble, après que le multiplicande a été multiplié par chaque chiffre du multiplicateur, doivent être placés les uns au-dessous des autres, dans un ordre convenable. Il faut donc que le dernier chiffre, à droite de chacun de ces produits, soit écrit sous le deuxieme chiffre à droite du produit précédent. On suppose toujours ici, comme on doit le faire, que le multiplicande est multiplié par le chiffre des unités du multiplicateur, avant de l'être par le chiffre des dixaines; que ce dernier produit est cherché, avant la multiplication du multiplicande, par le chiffre des centaines du multiplicateur; & ainsi de suite. On suppose aussi que, dans la multiplication du multiplicande par un des chiffres du multiplicateur, on commence par répéter les unités du multiplicande, avant de répéter ses dixaines, &c. cette succession réguliere d'opérations, est fondée sur ce que la répétition des unités d'une classe, peut servir à former des unités d'une classe supérieure. Après avoir ainsi répété tout le multiplicande autant de fois qu'il est marqué, par le chiffre des unités du multiplicateur, par celui de ses dixaines, par celui de ses centaines, &c. après avoir ordonné les produits partiels les uns à l'égard des autres, on les ajoute ensemble; & leur somme est le produit cherché, ou le nombre qui exprime la répétitition du multiplicande, faite autant de fois qu'il est marqué par le multiplicateur.

11. Veut-on savoir, par exemple, combien on doit payer pour l'achat de six bariques de marchandises, à raison de 564 livres par barique; on voit aisément qu'il faut répéter six fois la somme de 564

livres; & dans cette opération, qui est une multiplication, on reconnoît nécessairement pour multiplicande la valeur de chaque barique, tandis que leur nombre doit servir de multiplicateur. Remarquons ici que le nombre 6 doit être considéré comme un nombre abstrait; qu'il ne sert qu'à indiquer, par le nombre de ses unités, sans égard pour leur espece, combien de fois la quantité 564 livres, doit être répétée; & que par conséquent le produit ne peut être que des liv., puisqu'il doit être la répétition d'un nombre de livres. Voici maintenant le procédé qu'il faut suivre pour exécuter cette multiplication indiquée. Le multiplicande & le multiplicateur étant écrits, on multiplie par 6 les quatre unités du multiplicande & on a pour produit, 24 unités ou deux dixaines, de livres, & quatre unités. Ces dixaines sont réservées pour être ajoutées au produit de dixaines, qu'on doit obtenir, en multipliant par 6, les six dixaines du multiplicande; & les 4 unités de liv., doivent être seules écrites au produit. Le produit de dixaines dont nous venons de parler, est de 36 dixaines de livres, qui, ajoutées aux deux dixaines déjà réservées, forment une somme de 38, ou de trois centaines de livres, & de 8 dixaines. Le nombre 8 de ces dernieres, est écrit à gauche du chiffre trouvé des unités du produit, & les trois centaines sont réservées pour être réunies aux centaines, dont le produit suivant doit être composé; & continuant la multiplication dans cet ordre, les cinq centaines du multiplicande, répétées, six fois, donnent un produit de 30 centaines qui, ajoutées aux centaines réservées, forment une somme de 33 centaines, ou de trois mille, & trois centaines de livres. On écrit alors au produit & à la gauche du chiffre des dixaines, le chiffre 3, nombre des centaines, & à la gauche de celui-ci, le chiffre 3 nombre des milles; de sorte que le nombre 3384 livres, est le produit exact de 564 livres multipliées par 6, ou un nombre qui contient six fois 564 livres.

564 liv.	
6	
3384 liv.	

12. Comme il peut se glisser quelqu'erreur dans

le résultat d'une multiplication, il devient nécessaire de savoir en faire la vérification; & elle est déjà annoncée par la nature même de l'opération. En effet, le multiplicande étant répété autant de fois que le multiplicateur l'indique; ce multiplicande doit être renfermé, ce même nombre de fois, dans le produit. Il suffit donc, pour s'assurer de l'exactitude d'une multiplication, de chercher si le produit contient le multiplicande, autant de fois qu'on compte d'unités dans le multiplicateur. Cette recherche nommée division, est une opération d'arithmétique dont nous n'avons pas encore exposé les regles; c'est pourquoi nous placerons la vérification du résultat d'une multiplication quelconque, après les règles de la division.

13. Lorsque le multiplicateur est composé de plus d'un chiffre, le procédé de l'opération consiste à multiplier tout le multiplicande, par chaque chiffre du multiplicateur, & nous venons de voir comment s'exécute cette répétition. Si le multiplicande doit être répété, ou dix, ou cent, ou mille fois, c'est-à-dire, s'il doit être multiplié par 10, 100 ou 1000, alors il suffit d'ajouter un, ou deux, ou trois zeros à la suite de ce multiplicande, pour le transformer en produit cherché. En effet la multiplication proposée consiste à le rendre ou dix, ou cent, ou mille fois plus grand, & les zeros, qu'on place à sa suite, opérent ce changement; puisqu'alors ses unités deviennent ou des dixaines ou des centaines ou des milles. Il en seroit de même, s'il devoit être multiplié par 10000 ou 100000, &c. & le produit seroit toujours le multiplicande, suivi d'autant de zeros qu'on en compte dans de tels multiplicateurs.

14. Demande-t-on, par exemple, le prix d'un cordage qui a une longueur de 638 brasses, & qui doit être payé à raison de 38 liv. par brasse. On voit, que le prix 38 livres d'une seule brasse, doit être répété 638 fois; que l'opération à faire est une multiplication; que le multiplicande est 38 livres; le multiplicateur 638, qui doit être considéré comme un nombre abstrait, qui exprime le nombre de fois que 38 livres

doivent être répétées; & enfin que le produit ne peut être qu'un nombre de livres. Après ces conſidérations, paſſons à l'exécution de l'opération. Le multiplicande & le multiplicateur étant écrits, on multiplie le premier par le chiffre des unités du multiplicateur, & 38 liv. répétés 8 fois font 304 livres. Ces 38 liv. étant multipliées par le chiffre 3 des dixaines du multiplicateur, le produit eſt 114 dixaines de liv. C'eſt pourquoi le chiffre 4 qui exprime des dixaines, doit être placé ſous le chiffre des dixaines du produit précédent; enſuite les autres chiffres qui précédent 4, doivent être placés à la gauche du 4, comme ils le ſont dans 114; car ce nombre de 114 exprime réellement 1140 unités de livres. Le produit de tout le multiplicande, par le chiffre 6 des centaines du multiplicateur, doit enfin être écrit ſous les précédens produits comme exprimant des centaines, c'eſt-à-dire, que ce produit étant 228 centaines de livres, le chiffre 8 doit être placé ſous les centaines des autres produits. (Remarquons que, quel que pût être le nombre des chiffres du multiplicateur, l'opération devroit être continuée, en obſervant conſtamment les mêmes regles.) Les multiplications partielles étant achevées, on ajoute tous les produits qui déjà ont été arrangés pour faciliter leur addition, & leur ſomme eſt le produit cherché; c'eſt pourquoi, dans l'exemple préſent, le cordage total ſeroit du prix de 24244 liv.

```
   38 liv.
  638
 ---------
  304 liv.
 114
228
 ---------
24244 liv.
```

15. Ces exemples ſuffiſent pour indiquer la marche qu'on doit ſuivre dans toute multiplication de nombres entiers; & c'eſt ainſi qu'on calculeroit, ſoit le frêt d'un vaiſſeau de tant de tonneaux, à raiſon de tant de livres par tonneau; ſoit le poids d'un cordage de N braſſes, à M livres, la braſſe; ſoit le nombre des rations néceſſaires à la nourriture d'un équipage de tant d'hommes, pendant un certain nombre de mois; ſoit le nombre des hommes qui doivent compoſer l'équipage d'un vaiſſeau de guerre, à raiſon de tant d'hommes par canon; ſoit, &c.

16. *Division des nombres entiers.* Chercher combien de fois un nombre en contient un autre de même espece, où chercher quel est le nombre qui est contenu, un nombre de fois déterminé, dans un autre nombre proposé ; c'est faire une opération nommée division, par exemple, veut-on savoir combien, pour une somme de 2400 livres, on acheteroit de quintaux de goudron, à raison de 12 liv. le quintal. On voit qu'autant de fois la somme de 12 livres est contenue dans 2400 liv., autant on peut acheter de quintaux, & ce nombre est de 200. Supposons actuellement que 200 quintaux de goudron aient coûté 2400 liv. & qu'il soit question de savoir le prix de chaque quintal; il est clair qu'il s'agit de chercher qu'elle est la somme qui est contenue 200 fois dans 2400 livres, ou bien de savoir qu'elle est la 200e. partie de 2400; liv. & cette partie est 12 liv. C'est sous ces deux points de vue, que se présente l'opération de la division, & qu'elle est commandée par les questions incidentes.

17. Nous allons successivement donner une idée des regles qu'il faut suivre, pour faire dans les deux cas, l'opération de la division. Considérons d'abord la division dans le cas où il faut chercher combien de fois un nombre contient un autre nombre. Le premier de ces nombres est nommé dividende ; on donne le nom de diviseur à celui qui est cherché dans le dividende, & enfin le résultat de l'opération est nommé quotient. Sur cet exposé on juge sans doute que le dividende & le diviseur, dans le premier cas que nous examinons, doivent être nécessairement d'une même espece; & que si l'un est un nombre de livres, l'autre ne peut être aussi qu'un nombre de livres; alors le quotient n'est qu'un nombre abstrait, car il ne sert qu'à exprimer combien de fois le dividende contient le diviseur proposé.

18 Si le diviseur est composé d'un seul chiffre, & le dividende, d'un nombre quelconque de chiffres, la division s'execute en cherchant successivement combien de fois ce diviseur, qui n'est qu'un nombre d'unités, est

eſt contenu dans chaque chiffre du dividende ; cette recherche doit commencer par la claſſe la plus élévée des unités du dividende ; & cet ordre eſt fondé ſur ce que, ſi le diviſeur n'étoit pas contenu dans le premier chiffre à gauche du dividende, les unités que ce premier chiffre exprime, pourroient être réduites en unités d'une claſſe immédiatement inférieure, & former avec le nombre des unités de cette derniere claſſe, qui ſont dans le dividende, une ſomme aſſez grande pour contenir ce diviſeur. C'eſt par un tel procédé que l'opération peut être commencée & continuée régulierement ; ce qui n'auroit pas lieu, ſi on commençoit par opérer ſur le nombre des unités de la claſſe la plus baſſe. Si, par exemple, le chiffre le plus à gauche du dividende, dans lequel on cherche combien de fois eſt contenu le chiffre unique qui compoſe le diviſeur, eſt un nombre de dixaines de mille ; & qu'il ne contienne pas le diviſeur ; ces dixaines de mille ſont alors converties en unités de mille, & leur nombre eſt réuni à celui des unités de mille du dividende. Cette ſomme eſt alors ſuffiſante pour contenir le diviſeur : dans ce cas, le quotient eſt néceſſairement un nombre de milles. En effet, on cherche combien de fois un nombre d'unités, eſt contenu dans un nombre de milles ; & il doit y être renfermé mille fois davantage qu'il le ſeroit dans un pareil nombre de ſimples unités : ainſi le quotient déterminé par l'opération indiquée, ne peut être qu'un nombre de milles. Après cette premiere opération, on cherche, combien de fois le diviſeur eſt contenu dans cette partie du dividende, qui exprime des unités d'une claſſe immédiatement inférieure aux milles, c'eſt-à-dire, dans le nombre de ſes centaines. Le quotient, qui eſt alors de l'eſpece des centaines, étant déterminé, on continue la diviſion en, cherchant combien de fois le même diviſeur eſt contenu d'abord dans le nombre des dixaines du dividende, & enſuite dans celui de ſes unités. Ces dernieres opérations partielles, donnent auſſi deux quotients, dont l'un eſt de la

classe des dixaines, & l'autre de celle des unités. Enfin la réunion de tous ces quotiens partiels forme le quotient total, ou une somme qui exprime combien de fois le diviseur est contenu dans tout le dividende. Tel est l'ensemble général de l'opération de la division; mais il est des détails d'exécution qu'il est à propos de faire connoître, & que nous allons amplement devélopper.

19 La premiere regle de l'opération est de séparer sur la gauche du dividende, un nombre de chiffres assez grand pour que leur totalité puisse contenir le diviseur; ensuite on divise cette partie du dividende par le diviseur entier, & on écrit au quotient le chiffre qui indique combien de fois le dernier est contenu dans le dividende partiel. Il peut arriver, ou que celui-ci ne contienne le diviseur, ni le nombre de fois indiqué par le quotient trouvé, ni un nombre exact de fois, & sans reste; c'est pourquoi il faut, pour éclaicir ce doute, comme pour trouver le reste; 1.° considérer si du dividende partiel, on peut retrancher le diviseur autant de fois qu'il est présumé y être contenu; & 2.° examiner si le reste de la soustraction est plus petit que le diviseur total. Dans ce cas, le chiffre écrit au quotient est exact, & on procéde à une nouvelle division partielle. C'est à cet effet, & par cette raison, qu'on établit pour 2.e regle générale; de multiplier le diviseur entier par le quotient trouvé & de retrancher ce produit du dividende, sur lequel on a opéré. Le reste de la soustraction dont on vient de parler, & qui est un nombre d'unités d'une certaine classe, doit ensuite être réduit en unités d'une classe immédiatement inférieure & réuni au chiffre du dividende qui est placé à la droite du premier dividende partiel; cette somme forme un deuxieme dividende qu'on divise de nouveau par le diviseur entier: alors le quotient qui résulte de cette opération, est un nombre d'unités de la classe des unités du dividende partiel. Des raisons, semblables à celles qui ont été présentées précédemment, obligent ensuite de multiplier le diviseur entier par le

deuxieme chiffre du quotient, & de rétrancher le produit du deuxieme dividende partiel, afin qu'on puiſſe juger & de l'exactitude du quotient trouvé, & du reſte de l'opération. C'eſt ainſi que ſucceſſivement on parvient à diviſer toutes les parties du dividende par le diviſeur, & à déterminer tous les chiffres du quotient, ou du nombre qui exprime exactement combien de fois le diviſeur eſt contenu dans tout le dividende.

20. Les mêmes principes qui ont guidé dans l'exécution de la diviſion, ſervent auſſi à établir la vérification du réſultat ou du quotient trouvé. En effet, le diviſeur entier étant multiplié par le quotient, doit dévénir égal au dividende, parceque dans celui-ci, le diviſeur eſt répété autant de fois qu'il eſt indiqué par le vrai quotient; ainſi, pour juger de l'exactitude du quotient d'une diviſion, il faut multiplier le diviſeur par le quotient; & l'égalité entre ce produit, & le dividende démontre ſeule que la diviſion a été bien faite.

21 Si le diviſeur, dans cette opération, eſt composé de pluſieurs chiffres; les regles ſont les mêmes pour déterminer le quotient. On prend d'abord ſur la gauche du dividende, un nombre de chiffres, aſſez grand pour contenir le diviſeur entier; enſuite le quotient étant déterminé, on multiplie le diviſeur entier par ce quotient, & on retranche le produit du dividende partiel. Le reſte de cette ſouſtraction eſt réuni au chiffre ſuivant du dividende, pour exprimer avec lui un nombre d'unités d'une claſſe immédiatement inférieure à celle du premier dividende partiel. On obtient ainſi un nouveau dividende, & la diviſion eſt continuée comme on l'a preſcrit précédemment. Des exemples particuliers vont ſervir au dévéloppement de l'application des principes expoſés, & des regles qui en ſont la conſéquence.

22. Se propoſe-t-on de trouver quel eſt le nombre des tonneaux portés par un bâtiment qui a été frêté pour la ſomme de 31752 liv. & à raiſon de 125 l. le tonneau? il faut pour cette détermination, chercher combien de fois le prix 125 l., eſt contenu dans la ſomme 31752 l.

la queſtion indique, pour dividende, le nombre 31752 l.; pour diviſeur 125 livres, & pour quotient, un nombre abſtrait qui doit être celui des tonneaux de port de ce bâtiment. Voici comment cette diviſion doit être exécutée, ainſi que toutes les opérations ſemblables. Comme il faut chercher combien de fois 125 livres ſont contenues dans 31752 livres; on examine ſi le diviſeur eſt contenu dans les trois dixaines de mille du dividende; comme cela n'a pas lieu; comme il n'eſt pas même renfermé dans les 31 milles de ce même dividende; & qu'il ſeroit ſuperflu de mettre au quotient deux zéros pour

31752 l.	125
675	$254\frac{2}{125}$
502	
2	

exprimer que le diviſeur n'eſt contenu, ni dans les dixaines de mille, ni dans les milles du dividende; on prend les trois premiers chiffres qui ſont ſur la gauche du dividende, & on cherche combien de fois 317 centaines du dividende contiennent le diviſeur entier. On écrit 2 au quotient; & on remarque comme précédemment que ce chiffre 2 exprime un nombre de centaines, parce que 125 unités de livres ſont contenues dans 317 centaines de livres; cent fois davantage qu'elles le ſeroient dans 317 unités de livres. Ce quotient étant trouvé, il faudroit procéder à la récherche du nombre des fois que les dixaines du dividende contiennent le diviſeur. Mais ce premier quotient peut être trop grand ou trop petit, & le diviſeur peut n'être pas contenu un nombre exact de fois dans le dividende; c'eſt pourquoi il faut vérifier le quotient préſumé, & trouver l'excédent du dividende partiel, ſur le diviſeur répété autant de fois qu'il eſt indiqué par le vrai quotient. A cet effet on multiplie le diviſeur par le quotient trouvé, & le produit qui en réſulte doit être, ou égal au dividende partiel dont on le rétranche, ou plus grand, ou plus petit que ce dividende. Dans le premier cas, il ne reſte rien, & la diviſion eſt bien faite. Dans le deuxieme, le quotient n'eſt pas exact; & doit être diminué. Enfin dans le troiſieme, le quotient ne doit pas être changé, ſi toute

fois le reſte ne contient pas le diviſeur. Dans l'exemple préſent, 317 contiennent deux fois le diviſeur 125, & de plus, il reſte un nombre de 67 centaines qui ne peut renfermer 125. Le quotient, exprimé en nombre entier, eſt donc réellement 2, & il reſte des 317 centaines, une ſomme de 67 centaines à diviſer par 125. Ce reſte étant réduit en dixaines, & ajouté aux dixaines du dividende qui ſont au nombre de 5, la ſomme eſt de 675 dixaines. (& cette ſomme eſt formée ſimplement en plaçant, ou en écrivant le chiffre 5 à côté du reſte 67 du premier dividende partiel). Si ces dixaines réunies ne contenoient pas le diviſeur, on écriroit au quotient 0, à la place des dixaines, & on convertiroit le deuxieme dividende partiel, ſuppoſé trop pétit, en unités qu'on joindroit aux unités du dividende total. Ici 675 renferment cinq fois le diviſeur 125, & en rétranchant du premier, celui-ci répéte cinq fois, il reſte 50 dixaines du dividende partiel ſur lequel on a opéré. A côté du reſte 50, on abaiſſe le chiffre 2 qui appartient au dividende total, & on forme ainſi un dernier dividende partiel, compoſé de 502 unités, dans lequel le diviſeur eſt contenu quatre fois. Après avoir multiplié le diviſeur par 4, & avoir rétranché le produit du dividende 502, il y a un reſte de 2 unités, & l'opération eſt achevée. En raſſemblant les réſultats de ces opérations ſucceſſives, & les raiſonnemens qui ont guidé dans l'exécution, on voit que le diviſeur 125 eſt contenu, deux cents fois dans les centaines du dividende, 50 fois dans ſes dixaines, & 4 fois dans ſes unités. Ayant donc trouvé combien de fois le diviſeur eſt contenu dans toutes les parties ſéparées du dividende; on peut conclure qu'il eſt contenu dans le dividende total deux cents cinquante quatre fois, & qu'il reſte 2 unités du dividende, qui ne peuvent contenir le diviſeur. Ce reſte cépendant n'eſt pas négligé, & on eſt convenu de placer ces deux unités à la droite du quotient, avec l'attention de les écrire au-deſſus d'une petite ligne horiſontale, ſous laquelle le diviſeur eſt placé. Par ce moyen, on indique, que la diviſion de ce reſte 2, n'a pu être exécutée, & que non

ſeulement le diviſeur eſt contenu dans le dividende 254 fois; mais auſſi deux cent vingt-cinquiemes de fois. Enfin, pour vérifier le quotient total, on multiplie le diviſeur par ce quotient, & on examine ſi, comme le raiſonnement l'indique, le produit réſultant eſt égal au dividende.

23. Si une queſtion, pour être réſolue, exige qu'on cherche une quantité qui ſoit contenue un nombre de fois déterminé, dans un nombre donné; la diviſion qui eſt indiquée dans ce deuxieme cas, doit être faite, ſuivant les mêmes procédés qui ont été enſeignés prédemment. En effet, ſi, par exemple, 8 quintaux de ſucre ont été vendus 1752 livres, & qu'on demande quel eſt le prix de chaque quintal; tout conſiſte alors à chercher qu'elle eſt la ſomme de livres qui eſt contenue huit fois dans le dividende. Cette queſtion indique, comme toutes les queſtions ſemblables, l'eſpece des unités du quotient. Elle annonce qu'elles doivent être des livres; ainſi il n'y a que le nombre de ces même livres, qui ſoit à chercher. Remarquons, que dans une diviſion, le produit du diviſeur par le quotient, eſt toujours égal au dividende. Dans la queſtion préſente la ſomme cherchée, & répétée huit fois, feroit donc un produit égal au dividende 1752 livres; mais on auroit le même produit en répétant 8 livres autant de fois qu'il peut y avoir d'unités dans la ſomme cherchée; donc on auroit auſſi le nombre des unités de cette derniere ſomme, en diviſant 1752 livres par le nombre 8, conſidéré comme exprimant des livres. La diviſion dans ce deuxieme cas, ou dans la recherche de la ſolution des queſtions pareilles à celle qui eſt propoſée, peut donc encore ſe faire comme elle a été enſeignée précédemment. D'ailleurs on peut s'aſſurer aiſement par le fait de l'identité des quotiens (conſidérés comme numéraires), qui réſultent de la diviſion d'un dividende, ſoit par un diviſeur abſtrait tel que 8, ſoit par un diviſeur concret, tel que 8 liv. Car le huitieme de 1752 liv., eſt 219 livres, & en cherchant combien de fois 8 livres ſont contenues dans 1752 livres, on trouve que ce nombre de fois eſt

219. Le nombre des unités de ces deux quotiens est donc parfaitement le même, & l'état de la question acheve d'établir la plus grande égalité entre ces deux quotients, en annonçant que ce nombre abstrait 219, ou le dernier de ces quotiens doit exprimer un nombre de livres Il résulte de ces réflexions, que dans ce deuxieme cas, la division doit être exécutée comme dans le premier. Ainsi, les regles de cette opération, ayant été suffisamment dévéloppées & appliquées, il devient superflu d'en parler plus longuement.

24. Si le diviseur abstrait étoit composé de plusieurs chiffres, l'opération de la division devroit encore être faite de la même maniere, parce que les principes ne peuvent varier avec la grandeur du diviseur. Par exemple, supposons que dans un bâtiment qui est en mer, il ne reste à 754 hommes que 1248 livres de biscuit pour leur nourriture journaliere; & qu'il faille déterminer combien chaque jour il revient de biscuit à chaque matelot. La question est résolue en prénant la 754.e partie de 1248 livres, ou en cherchant qu'elle est la quantité de livres qui est contenue 754 fois dans 1248 livres: or, le quotient devant être des livres, & le nombre de ces livres étant le même que celui qu'on trouveroit (23) en cherchant combien de fois 754 livres sont contenues dans 1248 livres; il faut diviser 1248 livres par 754 & le quotient 1 liv. $\frac{494}{754}$ expriment le nombre de livres, & de parties de liv. de biscuit que chaque matelot doit recevoir chaque jour pour sa nourriture.

25. Il nous reste à faire une remarque importante; elle est une conséquence des principes de l'opération de la division, & elle embrasse les rapports du dividende, du diviseur & du quotient. Soient donnés le dividende, le diviseur & le quotient d'une division. Si on rend le dividende 4 fois plus grand, par exemple; il doit contenir quatre fois davantage le diviseur qui est supposé rester le même; & le quotient, dans cette supposition, doit aussi devenir quatre fois plus grand qu'auparavant. Si le dividende restant le même, le diviseur est rendu 4 fois plus grand, celui-ci est

contenu quatre fois moins dans le premier, & le quotient eſt par conſéquent quatre fois plus petit; de même, ſi le dividende ou le diviſeur ſont rendus un nombre de fois plus petits, le quotient devient lemême nombre de fois ou plus petit ou plus grand; & ces idées n'ont beſoin que d'être préſentées pour être ſenties & adoptées. Après ce qui a été expoſé précédemment, on peut en conclure auſſi que ſi le diviſeur & le dividende ſont l'un & l'autre rendus, le même nombre de fois ou plus grands, ou plus petits, le quotient doit reſter le même qu'il eut été, ſi le dividende & le diviſeur n'euſſent pas changé de grandeur. Car l'accroiſſement que le quotient peut éprouver par celui du dividende, eſt alors égal au décroiſſement que produit, ſur ce même quotient, l'accroiſſement du diviſeur. On peut donc établir pour regle générale qu'en multipliant ou en diviſant par un même nombre, un dividende & ſon diviſeur; leur quotient n'éprouve aucun changement, & reſte conſtamment de la même grandeur. C'eſt ainſi que le quotient de 6, diviſé par 3, eſt le même que celui, de 12 par 6, de 18 par 9, de 24 par 12; & réciproquement le quotient de 24 diviſé par 12, eſt le même que celui de 18 par 9, de 12 par 6, de 6 par 3; une telle remarque devient utile pour le développement de quelques autres opérations.

26. C'eſt après avoir préſenté les principes, & l'opération détaillée de la diviſion, qu'il eſt permis d'expoſer, & de faire concevoir aiſément la méthode qu'il faut ſuivre pour vérifier le produit réſultant, de la multiplication de deux nombres quelconques. Cette méthode conſiſte à diviſer le produit par le multiplicande, & à examiner ſi le quotient d'une telle diviſion eſt égal au multiplicateur. Si cette égalité n'a pas lieu; la multiplication, qu'on vérifie doit être néceſſaiment mêlée de quelque erreur: mais ſi elle a lieu, elle devient une indice sûr de l'exactitude de l'opération. En effet, d'après la nature de la multiplication, le produit doit contenir le multiplicande autant de fois qu'il eſt répété; & ce nombre de fois, eſt le nombre des unités du multiplicateur; par conſéquent, le quotient d'un produit diviſé

par le multiplicande, doit toujours être égal au multiplicateur. Comme le produit résultant d'une multiplication ne cesse d'être le même nombre, soit lorsqu'on prend le multiplicande pour être multiplicateur, soit lorsqu'on fait faire à celui-ci la fonction de multiplicande dans cette opération; & comme deux nombres multipliés l'un par l'autre, portent le nom de facteurs de leur produit, la regle précédente peut être énoncée généralement, en disant; que le quotient de la division d'un produit quelconque, par un de ses deux facteurs, est toujours égal à l'autre facteur.

27. *Des fractions.* Lorsque, dans une division, le dividende est plus grand que le diviseur, le quotient est toujours composé d'un nombre plus ou moins grand d'unités. S'il sont égaux, le quotient est exprimé par une seule unité; parce que le dividende ne contient alors le diviseur qu'une seule fois: mais si le dividende est moindre que le diviseur, alors celui-ci n'est pas contenu dans le premier, une unité de fois toute entiere; mais une partie d'unité de fois; & la division qui, dans ce cas, ne peut plus être exécutée, est seulement indiquée, comme on l'a déjà dit, en écrivant le dividende au-dessus du diviseur, & en les séparant par une petite ligne horisontale. C'est ainsi qu'étant proposé de diviser 2 par 3; comme le nombre 2 ne contient pas 3, on indique une telle division sous cette forme $\frac{2}{3}$, en donnant au nombre supérieur, qui est le dividende, le nom de numérateur, & à celui qui est inférieur, le nom de dénominateur.

28. Remarquons que la quantité $\frac{2}{3}$, en annonçant que 2 est à diviser par 3, réprésente aussi le quotient de la division de ces deux nombres. Ce quotient doit être exactement le tiers de deux unités. Et ce tiers est égal aux deux tiers d'une seule unité, comme dans la quantité $\frac{5}{12}$, le quotient qui est le 12.e de cinq unités, réprésente aussi les cinq douziemes d'une seule unité. C'est cette identité de valeur qui a fait donner aux quantités de cette forme $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{12}$, le nom de fractions, parce que réellement on peut les regarder comme exprimant une certaine portion d'une

unité déterminée. Telle eſt l'origine du mot fraction. Une quantité fractionnaire, peut donc, dans les calcùls, être conſidérée ſous deux points de vue très-diſtincts; ou comme une diviſion indiquée, ou comme une portion d'unité. Sous le premier rapport, une fraction répréſente le quotient d'une diviſion; ſous le ſecond rapport, on dit d'une fraction, que ſa valeur eſt celle d'un certain nombre de parties égales de l'unité. Le nombre de ces dernieres parties qui forment toute ſa valeur, dans ce dernier cas, eſt déſigné par le numérateur de la fraction; & la grandeur de ces parties eſt indiquée par le dénominateur, qui marque le nombre des parties égales dont l'unité entiere eſt compoſée. Par exemple, dans la fraction $\frac{5}{12}$, qui eſt égale aux cinq douziemes d'une unité; le dénominateur 12 annonce que l'unité entiere doit être ſuppoſée partagée en 12 parties égales; & le numérateur 5, indique que cinq de ces parties ſont la valeur totale de la fraction $\frac{5}{12}$. Après ces dédéveloppemens, il ne peut plus y avoir d'incertitude ſur la nature des fractions: & ſi les deux manieres également juſtes de les enviſager, ont été rémarquées & analyſées; c'eſt pour faire connoître qu'il eſt deux moyens, entre leſquels on peut indifféremment faire un choix, pour réſoudre avec facilité les queſtions qui ſe préſentent. On doit remarquer, ſans doute, qu'il peut y avoir entre toutes les fractions poſſibles, une immenſe variété, puiſque tous les nombres quelconques, entiers ou fractionnaires, peuvent leur ſervir de numérateur & de dénominateur; mais parmi ces fractions, il en eſt, qui ſe réduiſent à une forme plus ſimple, que celle dont on a parlé précédemment; qui ſont plus faciles à employer dans les calculs; & qu'on diſtingue ſous le nom de *décimales*.

29. Ces fractions particulieres ſont celles, qui ont pour denominateur ou 10, ou 100, ou 1000, ou enfin le chiffre 1 ſuivi d'un nombre indefini de zeros. De tels dénominateurs indiquent que l'unité eſt diviſée en 10, ou 100, ou 1000 parties; par conſéquent les parties qui forment la valeur de ces fractions, ſont néceſſairement, ou des dixiemes, ou des centiemes,

ou des milliemes d'une unité; & ce rapport avec l'unité leur a fait donner le nom générique de *décimales*. Ces parties ont auſſi chacune un nom diſtinctif, qui indique leur rapport précis avec l'unité. Lorſque celle-ci eſt diviſée en dix parties égales, chacune de ces parties eſt nommée *dixieme* ; ſi elle l'eſt en cent parties, chacune eſt un *centieme* ; elles portent le nom de *millieme* lorſqu'on en conçoit mille dans l'unité entiere; & en continuant, on voit qu'il y a des *dix milliemes*, des *cent milliemes*, &c. del-à il ſuit que, l'unité vaut dix dixiemes; chaque dixieme dix centiemes; chaque centieme dix milliemes, &c. Enſuite ſi on rapprohe de ces réſultats, ce qui a été dit en parlant de la numération; ſavoir, qu'une unité de mille vaut dix centaines, une centaine dix dixaines, & chaque dixaine dix unités ; on doit reconnoître que l'ordre entre les décimales de différente dénomination, eſt abſolument le même que celui qui regne entre les unités de différentes claſſes. C'eſt d'après cette conſidération qu'on eſt convenu d'écrire les décimales ſous une forme qui eſt différente de celles des fractions ordinaires. Si un nombre entier eſt joint a des fractions décimales, on écrit ce nombre entier; & à la ſuite de ſes unités , on place le nombre des parties d'unités qui compoſent ces fractions, en ſupprimant leur dénominateur, & en plaçant une virgule qui ſepare le chiffre des unités, des chiffres décimaux. C'eſt ainſi que la ſomme de 23 & $\frac{24}{100}$, ſuivant les conventions annoncées, doit être écrite ſous cette forme 23,24; la virgule placée après les unités annonce que les chiffres qui la ſuivent ſur la droite, expriment des décimales, c'eſt-à-dire, que le chiffre 2 indique deux dixiemes, & le ſuivant quatre centiemes. Un tel arrangement a été adopté, avec d'autant plus de raiſon, qu'il établit une régularité raiſonnée; dans la ſucceſſion des chiffres qui expriment, qu'un nombre eſt compoſé d'unités; & de parties d'unités; & qu'il facilite toutes les opérations qu'on peut ſe propoſer de faire ſur les fractions.

30. Il eſt à remarquer que, cette maniere ſimple

d'exprimer les fractions décimales; & la célérité avec laquelle elle permet de les calculer; ont dû faire désirer de réduire en décimales, toute autre fraction, dont le dénominateur n'est pas un nombre multiple de 10. Plusieurs de ces dernieres fractions peuvent, il est vrai, être transformées en un nombre de décimales qui représentent parfaitement leur valeur; mais il en est d'autres qui ne peuvent l'être exactement. D'abord il est aisé de voir que toute fraction peut avoir, pour valeur plus ou moins approchée, un certain nombre de décimales. Car une fraction n'est qu'une division indiquée, dont le quotient est plus petit que l'unité. Car, pour exécuter une telle division; on multiplie par 10 le numérateur, ou on transforme le dividende en dixiemes d'unité, & on divise le produit, par le dénominateur primitif de la fraction: le quotient est alors un nombre de dixiemes. Si, après cette premiere division, il y a un reste de dixiemes, on le réduit en centiemes, en le multipliant par 10, parce que chaque dixieme vaut dix centiemes; on continue la division par le même dénominateur; on trouve un second quotient, qui est un nombre de centiemes; & ainsi de suite, jusqu'à ce que l'opération, soit faite sans aucun reste, ou ne présente qu'un reste, qui puisse être négligé sans inconvénient. Par conséquent, toute fraction peut être transformée, plus ou moins exactement, en décimales; mais ce n'est pas toujours sans reste, & la division ne s'acheve exactement, que dans les cas où le diviseur, c'est-à-dire, le dénominateur de la fraction, a pour facteur, ou 2, ou 5. Par exemple: si la fraction $\frac{3}{8}$ doit être transformée en décimales; comme elle indique qu'il faut diviser trois unités par 8, ou prendre le huitieme de 3 unités; on multiplie celles-ci par 10, pour les changer en 30 dixiemes, qui ont la même valeur; & on divise 30 dixiemes par 8. Le quotient est 3 dixiemes, il reste 6 dixiemes ou 60 centiemes, qui, divisés par 8, fournissent 7 centiemes au quotient, & un reste de 4 centiemes, ou de 40 milliemes. Enfin, ce dernier reste, étant divisé par 8, donne 5 milliemes, sans aucun reste. De cette ma-

niere, le quotient total, qui eſt la ſomme des quotients partiles qui ont été trouvés, eſt, d'après les principes, écrit ſous cette forme 0,375. Les $\frac{3}{8}$ d'une unité, qui compoſent la fraction propoſée, ont donc la même valeur que trois cent ſoixante-quinze milliemes de la même unité. Le zéro qui eſt écrit avant la virgule, ne ſert ici qu'à annoncer, que le quotient, de 3 diviſé par 8, ne contient aucune unité entiere, & qu'il n'eſt qu'une quantité décimale. Si la fraction, à réduire en décimales, étoit, par exemple, $\frac{5}{11}$ (où le dénominateur n'a pour facteur, ni 2, ni 5); on parviendroit en faiſant, comme précédemment, trois diviſions ſucceſſives, au quotient 0,454; mais, après ces trois opérations, il reſteroit encore ſix milliemes. Si on continuoit la diviſion, en changeant ces ſix milliemes en 60 dix milliemes; le quotient deviendroit 0,4545, avec un reſte de cinq dix milliemes: & quelque prolongée que put être cette opération, il y auroit toujours un reſte 6 ou 5. De telle fractions ne peuvent donc être réduites complétement en décimales; & on ne les introduit ſous cette forme dans les calculs, que dans le cas où les queſtions propoſées permettent de négliger un certain nombre des parties décimales reſtantes, ou d'employer la valeur de ces fractions, lorſqu'elle eſt approchée, ou à un millieme, ou à un dix millieme prés, &c. Si les queſtions à réſoudre demandent la plus grande exactitude, alors de telles fractions n'entrent dans les calculs que ſous leur forme ordinaire.

31. Nous devons remarquer auſſi, conſéquemment aux principes établis, que des zéros en nombre quelconque peuvent être placés à laſuite & ſur la droite d'un nombre de décimales, ſans opérer aucun changement dans la valeur de ces nombres de décimales. Car ces zeros ne ſervent alors qu'à transformer les premieres décimales, en d'autres décimales, qui ſont, ou dix, ou cent, ou mille fois plus petites; & quoiqu'en plus grand nombre, ces dernieres ne compoſent qu'une grandeur égale à celle des premieres. C'eſt ainſi que 3,6, par exemple, ſont la même choſe que 3,60, ou

ou, 3,600, ou 3,6000, &c. Car six dixiemes valent autant que 60 centiemes, 600 milliemes, 6000 dix milliemes, &c. C'est sous un tel point de vue que les nombres décimaux different essentiellement des nombres entiers. Car si à la suite, & sur la droite, de ceux-ci, on place un ou deux zeros; alors ces nombres deviennent dix ou cent fois plus grands qu'ils ne l'étoient avant l'adjonction des zeros.

32. Les quantités décimales sont, comme les nombres entiers, susceptibles d'être combinées ensemble par addition, soustraction, multiplication & division. S'il faut les ajouter entre elles, soit qu'elles accompagnent un nombre entier, soit qu'elles se présenteut isolées; les regles qui ont été démontrées pour diriger l'addition des nombres entiers, dirigent aussi celle des décimales; & peut-on douter de l'identité des deux opérations? puisque l'ordre de succession, dans les dispositions des chiffres décimaux, est le même que celui des chiffres des nombres entiers; & que les décimales d'une certaine classe, servent à former des décimales d'une classe supérieure, comme des unités réunies peuvent composer des dixaines, ou comme des dixaines répétées donnent des centaines, soit, par exemple, proposé, d'ajouter ensemble les nombres suivans, 36^{l},182, 124^{l},6; & 2^{l},36. Tout consiste à réunir & les décimales & les unités; c'est-à-dire, qu'il faut ajouter les milliemes de livre ensemble, ensuite les centiemes, les dixiemes, les unités, les dixaines & les centaines qui sont contenus dans les nombres proposés. Il est donc nécessaire, qu'en écrivant ces nombres, les chiffres qui expriment des décimales ou des unités d'une même classe, soient placés les uns au-dessous des autres, ou que les unités correspondent aux unités, sur une même colonne, les dixaines aux dixaines, &c. Après avoir écrit ces trois nombres, comme on vient de le prescrire; on commence l'opération en sommant les milliemes, qui ne sont ici qu'an nombre de 2, & on les écrit au bas de la colonne des milliemes. Les centiemes ajoutés ensuite ensemble, sont au nombre

36^{l},182
124, 6
2, 36
———————
163^{l},142

de 14, & forment une ſomme d'un dixieme & 4 centiemes. Ces derniers doivent être écrits au bas de la colonne des centiemes, & ſur la gauche des milliemes, déjà placés. Ajoutant les dixiemes de ces nombres avec le dixieme réſervé, la ſomme eſt de 13 dixiemes, qui valent une unité & 3 dixiemes. On écrit ceux-ci à la ſomme & ſur la gauche des centiemes, en réſervant l'unité qui a réſulté de la derniere ſomme partielle, pour l'ajouter aux unités des nombres propoſés. Ces unités réunies ſont au nombre de 13, dont 3 ſeules ſont écrites à la ſomme, à gauche des dixiemes; & pour diſtinguer les chiffres décimaux, déjà écrits, des unités qui doivent réſulter de la ſuite de l'opération, on place une virgule entre le chiffre des dixiemes & celui des unités. Enfin on termine l'addition des unités, des dixaines & des centaines de ces nombres, comme il a été enſeigné précédemment. La ſomme totale & cherchée des 3 nombres propoſés, eſt donc de 163^{l},142; ou de 163 livres & 142 milliemes de livres.

33. La ſouſtraction des nombres décimaux, eſt auſſi entiérement ſemblable à celle des nombres entiers; & un ſeul exemple, après les réflexions précédentes, ſuffira pour prouver leur reſſemblance. Soit propoſé de connoître ce qui reſte de 348^{l},65 de biſcuit, après en avoir retranché 129^{l},903. On place ces deux nombres l'un au-deſſus de l'autre, & comme l'un d'eux contient des milliemes de livres, tandis que l'autre n'a aucun chiffre qui en exprime, on écrit ſur la droite de ce dernier un zéro, qui annonce que dans ce nombre il n'y a pas de milliemes; qui, d'ailleurs, n'y produit aucun changement (31); & qui prévient tout embarras dans l'exécution de la ſouſtraction. ce nombre eſt donc transformé de 348^{l}, 65 en 348^{l},65 parce que 65 cent^{es} valent 650 mill.^{es} L'opération conſiſte actuellement à déterminer la différence de ces deux nombres; ou les différences partielles, 1°. de leurs milliemes, 2°. de leurs centiemes, 3°. de leurs dixiemes &c. On ne peut retrancher 3 milliemes de 0; c'eſt pourquoi on emprunte ſur les 5 centiemes qui

348^{l}, 650
129, 903
―――――
218^{l}., 747

précedent 0, un centieme qu'on convertit en dix milliemes, & dont on retranche les 3 milliemes du nombre inférieur. Le reste est 7 milliemes qu'on écrit sous la colonne sur laquelle on a opéré. La différence des centiemes des deux nombres, est évidemment 4 centiemes. Celle des dixiemes est 7; parce que, d'après les raisons déjà exposées, on doit emprunter, sur le chiffre 8, qui précede les dixiemes du nombre supérieur, une unité qui vaut dix dixiemes; & ces dixiemes, étant réunis aux 6 dixiemes du nombre supérieur, donnent une somme, dont la différence avec le chiffre des dixiemes du nombre inférieur, est 7 dixiemes. Ensuite, en se conformant aux regles connues, on retranche successivement l'un de l'autre, les chiffres des unités, ceux des dixaines, ceux des centaines; & la différence totale des deux nombres proposés est alors trouvée de $218^{l},747$. La soustraction des nombres décimaux est donc soumise aux mêmes regles que celle des nombres entiers. Elle peut donc être faite sans égard à la virgule, sous la condition que, dans la différence trouvée, on doit séparer par une virgule, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans celui, des deux nombres proposés, qui en a le plus.

34. Multiplier, l'un par l'autre, deux nombres qui renferment des décimales, c'est toujours répéter le multiplicande, quel qu'il soit, autant de fois que le multiplicateur l'indique. Ainsi doit-on répéter dix fois, par exemple, un nombre de 3,24, ou de 324 centiemes (ce qui est la même chose), on doit avoir 3240 cent^{es}. pour produit (10), ou 32,40. Si ce même nombre étoit répété 100 fois, le produit seroit 32400 centiemes, parce que, la répétition d'un nombre de centiemes ne peut être que des centiemes, ou 324,00. Considérons présentement que, multiplier le nombre 3,24 par 10, ou par 100, c'est le rendre dix ou cent fois plus grand; & que les résultats de ces multiplications sont toujours composés des mêmes chiffres qui se trouvent dans 3,24, avec cette différence, que la virgule est reculée sur la droite, ou d'une ou de deux places, selon le multiplicateur 10 ou 100: par conséquent, la regle générale

à

à obſerver pour rendre dix, ou cent, ou mille fois plus grand, un nombre compoſé de décimales, il ſuffit de reculer ſa virgule ſur la droite, ou d'un chiffre, ou de deux, ou de trois. Par conſéquent, la regle générale qu'on doit ſuivre pour rendre dix, ou cent, ou mille fois plus petit, un nombre décimal, il faut avancer la virgule ſur la gauche, ou d'une place, ou de deux, ou de trois. Remarquons auſſi que dans ces produits, cités précédemment, il y a autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve dans les facteurs.

35. En général, quels que puiſſent être les nombres décimaux, à multiplier les uns par les autres; l'opération eſt fondée ſur les mêmes principes que celle des nombres entiers. C'eſt pourquoi la regle conſtante à ſuivre dans ces multiplications; eſt que les produits doivent être d'abord déterminés, comme ſi les nombres propoſés exprimoient, autant d'unités qu'ils préſentent de décimales; & qu'enſuite, il faut ſéparer, dans ces produits & ſur la droite, autant de chiffres décimaux qu'on en compte dans tous les facteurs. En effet, nous avons dit ailleurs, que ſi dans une multiplication, le multiplicande, compoſé d'unités, eſt multiplié par le chiffre des dixaines du multiplicateur, le produit doit être un nombre de dixaines; ou qu'il doit être dix fois plus grand, que ſi le multiplicande étoit multiplié par un égal nombre d'unités. De même, ſi un multiplicande eſt un nombre de dixiemes, ou de centiemes, ou de milliemes, & que le multiplicateur ſoit un nombre d'unités; le produit qui eſt toujours de même eſpece que le multiplicande (puiſqu'il n'en eſt qu'une répétition) doit être un nombre de dixiemes, ou de centiemes ou de milliemes; c'eſt-à-dire, qu'il doit être ou dix, ou cent, ou mille fois plus petit, que ſi les deux facteurs étoient des unités. Dans le cas ſuppoſé, ce produit doit donc avoir ou un, ou deux, ou trois chiffres décimaux, ou enfin autant qu'il y en a dans les deux facteurs. Si le multiplicateur, dans la même opération, au lieu d'être compoſé d'unités, eſt un nombre de dixiemes; le produit qui réſulte de la multiplication, eſt néceſſairement dix fois plus petit,

qu'il ne l'eſt, lorſque le multiplicateur eſt un nombre d'unités; par conſéquent, le produit, dans cette nouvelle ſuppoſition, doit avoir un chiffre décimal de plus qu'il n'y en a dans le multiplicande; ou plutôt, il doit avoir autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans les deux facteurs enſemble; & il doit être compoſé ou de centiemes, ou de milliemes, ou de dix milliemes. ſi le multiplicateur eſt un nombre de milliemes, le produit devient mille fois plus petit que lorſque ce même facteur eſt des unités (le multiplicande reſtant toujours le même); c'eſt pourquoi, ce même produit doit avoir trois chiffres décimaux de plus qu'on n'en compte au multiplicande; il doit donc être compoſé de dix milliemes, ou de cent milliemes, ou de millioniemes; c'eſt-à-dire, qu'il doit avoir autant de chiffres décimaux qu'il s'en trouve, tant dans le multiplicande que dans le multiplicateur. C'eſt ainſi qu'en étendant le même raiſonnement à des nombres qui contiendroient un nombre indéfini de chiffres décimaux, on en concluroit toujours la regle générale, déjà énoncée, ſavoir : que ſi des nombres décimaux doivent être multipliés les uns par les autres, il faut exécuter l'opération, comme s'ils étoient des nombres entiers (c'eſt-à-dire, ſans avoir égard à la virgule); & enſuite, ſéparer par une virgule, ſur la droite du produit trouvé, autant de chiffres décimaux qu'on en compte dans tous les facteurs propoſés.

36 Si, par exemple, on doit payer le fret de 42,3 tonneaux, à raiſon de $12^{l},038$ par tonneau; on trouve la ſomme à acquitter, en répétant $12^{l},038$, autant de fois qu'il y a de tonneaux, ou autant de fois que l'indique le nombre 42,3, conſidéré comme abſtrait. Cette opération étant exécutée, comme le preſcrit la regle générale déjà démontrée, on regarde le multiplicande, comme exprimant 12038 unités de livres, au lieu de 12038 milliemes de livres, & par conſéquent, comme étant mille fois plus grand qu'il ne l'étoit auparavant, puiſque la virgule ſe trouve reculée de trois places. Le multiplicateur n'eſt plus conſidéré comme 423 dixiemes d'unités, mais comme 423 unités; &

par conséquent, comme étant devenu dix fois plus grand qu'il n'a été proposé. Le produit de ces deux nombres est 5092074 unités de livres. Si on lui applique la regle démontrée, il est réduit à $509^{1},2074^{1}$, en séparant, sur sa droite, quatre chiffres décimaux, parce qu'il s'en trouve 4 dans les deux facteurs. On arrive encore au même résultat, en considérant que, dans cette multiplication, le multiplicande rendu mille fois plus grand, par la suppression de la virgule, est multiplié par un nombre dix fois plus grand; ce qui rend le produit dix mille fois trop grand. Le produit réel ne peut donc être obtenu, qu'en rendant le produit trouvé, dix mille fois plus petit; c'est-à-dire, en réduisant, ses unités à n'être que des dix milliemes, ses dixaines à être des milliemes &c.; ou en séparant, comme on l'a déjà dit, sur la droite de ce produit, autant de chiffres décimaux qu'il y en a dans les deux facteurs.

$12^{1},038$
$42,3$
―――――
36114^{1}.
24076
48152
―――――
$509^{1},2074^{1}$.

37. La division des nombres décimaux est soumise aux mêmes regles qui sont suivies dans la division des nombres entiers. En effet, si on considere, que six unités contiennent deux unités, comme six centiemes coutiennent deux centiemes, comme six milliemes contiennent deux milliemes &c.; & que le quotient, dans tous ces cas, est toujours 3; on doit en conclure que, toutes les fois que le dividende & son diviseur, sont réduits, l'un & l'autre, à exprimer des décimales d'une même classe, le quotient de la division de ces nombres décimaux, est égal à celui qui résulteroit, en divisant l'un par l'autre, ces mêmes nombres, considérés comme exprimant des unités. Il résulte, de ces réflexions, la regle générale qui suit: deux nombres décimaux, étant à diviser l'un par l'autre, il faut, avant cette opération, rendre le nombre des décimales, le même dans le dividende & le diviseur, par le moyen de zeros mis à la suite & sur la droite de celui des deux nombres, qui a le moins de chiffres décimaux. Ensuite on les divise l'un par l'autre, comme s'ils exprimoient des

unités entieres, c'eſt-à-dire, ſans avoir égard à la virgule, puiſqu'alors, ils ſont tous deux de même dénomination; & le quotient qui réſulte de l'opération, exprime exactement combien de fois le nombre décimal propoſé pour dividende, contient le nombre décimal qui eſt diviſeur.

38. Soit, par exemple, propoſé de connoître, combien on pourroit acheter de braſſes de cordage pour la ſomme de 1200l, 2 à raiſon de 3l,389 la braſſe; la ſolution conſiſte à trouver, combien de fois le premier nombre de livres contient le ſecond, parce que le quotient eſt néceſſairement le nombre cherché des braſſes de cordage. Les deux nombres propoſés expriment, l'un, 12002 dixiemes de livres, & l'autre, 3389 milliemes de livres; & dans cet état, ils ne peuvent être comparés de maniere, à pouvoir juger du nombre de fois que le deuxieme eſt contenu dans le premier, puiſqu'ils expriment des parties d'unité qui ne ſont pas de même grandeur. Il faut donc, pour exécuter cette diviſion, réduire l'un de ces nombres en parties de même eſpece que celles de l'autre nombre; c'eſt-à dire, qu'il faut transformer 12002 dixiemes en milliemes. Le dividende, ſans changer de valeur, devient alors 1200200 milliemes; & il doit être diviſé par 3389 milliemes; Comme ces milliemes (3) doivent ſe contenir autant de fois que 1200200 unités renferment 3389 unités, le quotient cherché, doit être le même que celui qui réſulte de la diviſion de ces deux derniers nombres; & ce quotient, déterminé ſuivant les regles ordinaires (18), eſt $354\frac{494}{3389}$; ou, en réduiſant la fraction en décimales (30), il eſt 354,146 (à un millieme près). Ainſi le nombre des braſſes de cordage, qui peuvent être achetées pour la ſomme de 1200l2 à raiſon de 3,l389 la braſſe, eſt 354,146.

39. Juſqu'ici, en conſidérant des décimales, nous n'avons traité que des fractions particulieres; & comme toutes les fractions ne ſont pas ſuſceptibles d'être réduites complétement en décimales, il devient néceſſaire d'expoſer auſſi, comment on doit opérer, ſur les fractions qui ſont préſentées ſous leur forme générale;

ou qui ont un numérateur & un dénominateur; lorſqu'il eſt queſtion de chercher, ou leur ſomme, ou leur différence, ou leur produit, ou leur quotient. Soit propoſé d'ajouter enſemble deux fractions, telles que $\frac{2}{9}$ & $\frac{5}{9}$ de toiſe. Puiſque l'une exprime le 9.e de deux toiſes ou les deux neuviemes d'une toiſe, & l'autre les cinq neuviemes de cette toiſe; ce ſont alors des neuviemes d'une même unité à réunir, & ces parties qui compoſent les deux fractions, ſont au nombre de 7; par conſéquent la ſomme qui, néceſſairement doit être des 9es, eſt évidemment $\frac{7}{9}$ de toiſe. Dans cette nouvelle fraction le numérateur eſt la ſomme des numérateurs des deux fractions propoſées, & elle a leur dénominateur commun; ainſi cette conſidération conduit à la regle générale qui ſuit. La ſomme de deux fractions qui ont un même dénominateur, eſt celle de leurs numérateurs, diviſée par le dénominateur commun.

40. Si deux fractions dont on cherche la ſomme n'ont pas un même dénominateur, & ſi les fractions ſont telles que $\frac{7}{8}$ & $\frac{3}{5}$; l'un exprime des 8.es d'une livre & l'autre des 5.es de cette livre. Or ces dernieres parties étant plus grandes que les 1.res, ne peuvent pas plus être réunies en une ſeule & même ſomme, qu'on ne peut ajouter enſemble des toiſes & des pieds; par conſéquent il faut, avant de procéder à l'addition de ces fractions, les transformer en deux autres qui leur ſoient égales en valeur, chacune à chacune; & qui ſoient l'une & l'autre compoſées de parties égales de la livre. Cette transformation devient facile, après ce qui a été démontré précédemment (25); & elle ſe fait en multipliant les deux termes de chaque fraction par le dénominateur de l'autre. Cette opération donne, pour réſultat, deux nouvelles fractions égales aux propoſées, & ayant pour dénominateur commun, le produit des dénominateurs des deux premieres fractions. C'eſt ainſi que la premiere des propoſées qni étoit $\frac{7}{8}$, devient $\frac{35}{40}$, & l'autre ſe change en $\frac{24}{40}$. Dans cet état, & raiſonnant, comme on a fait plus haut, (39) la ſomme des fractions pro-

poſées eſt $\frac{59}{40}$ de livres. Delà on conclut la regle ſuivante : deux ou pluſieurs fractions doivent-elles être ajoutées enſemble ; il faut préalablement les réduire au même dénominateur, ſi elles ne le ſont pas (en multipliant les deux termes de chacune par le produit de tous les dénominateurs des autres fractions) ; enſuite on trouve leur ſomme totale , en formant celle de tous les numérateurs des nouvelles fractions, & en diviſant cette derniere par le dénominateur commun.

41. Remarquons que la quantité réſultante de l'additition des deux fractions propoſées, eſt $\frac{59}{40}$ de liv. & que cette quantité n'eſt pas une fraction ordinaire, puis que le numérateur eſt plus grand que le dénominateur. C'eſt pourquoi la diviſion qui eſt indiquée, doit être exécutée , & le quotient eſt 1 livre $\frac{19}{40}$. On pourroit dire auſſi que $\frac{40}{40}$ de livre ſuffiſant pour forformer une livre; la quantité $\frac{59}{40}$, renferme une liv. & $\frac{19}{40}$ de livre. Ces réflexions conduiſent ainſi à cette regle générale, ſavoir : que pour extraire d'une quantité fractionnaire, les unités entieres qui peuvent y être conntenues, il faut diviſer le numérateur par le dénominateur, ſuivant les regles ordinaires de la diviſion des nombres entiers. Ajoutons encore à cette regle celle qui a pour objet de ſimplifier une fraction, ou de rendre auſſi petits, qu'il eſt poſſible les deux termes dont elle eſt compoſée. Cette nouvelle regle eſt fondée ſur ce qu'on peut, ſans changer la valeur d'une fraction, diviſer ſes deux termes par un même nombre quelconque. C'eſt pourquoi, ſi ces deux termes ont un facteur commun (comme 3 dans la fraction $\frac{3}{15}$) ce facteur peut ſervir à les diviſer exactement l'un & l'autre, & les reduire par conſéquent à une expreſſion plus ſimple. De tels facteurs ne ſe préſentent pas toujours à la premiere inſpection , & il eſt un moyen de déterminer entre tous ces facteurs celui qui eſt le plus grand , & qui par conſéquent peut ſimplifier, autant qu'il eſt poſſible , une fraction , donnée. Il conſiſte à diviſer le dénominateur de cette derniere par ſon numérateur ; enſuite s'il y a un reſte, on

divise le numérateur par ce premier reste; s'il y a un deuxieme reste, on le prend pour diviseur du premier reste; & ainsi successivement, on continue l'opération jusqu'à ce qu'on parvienne, si la chose est possible, à obtenir, sans reste, le quotient de la division. Le dernier diviseur est alors le facteur cherché. Car la réflexion fait voir qu'il doit être diviseur exact, & de tous les restes précédens, & des deux termes de la fraction donnée. Par exemple, si on veut simplifier la fraction $\frac{102}{438}$; on divise 438 par 102 & le premier reste est 30; on divise ensuite 102 par 30, & le reste est 12. On divise le premier reste 30, par le 2e reste 12; & on a un troisieme reste qui est 6; enfin le deuxieme reste 12 étant exactement divisible par 6, ce diviseur doit être commun à tous les restes, ainsi qu'aux deux termes de la fraction; en effet, il divise exactement les nombres 12, 30, 102, & 438.

42. Si on devoit ajouter une fraction d'unité avec un nombre de pareilles unités entieres, comme, par exemple, 51, avec $\frac{3}{8}$. La regle qu'il faut suivre dans ce cas particulier, est une conséquence de la regle générale démontrée précédemment. Car 51 sont la même chose que $\frac{51}{1}$; ainsi, considérant ce nombre entier sous une forme fractionnaire; la somme, de cette quantité ajoutée avec $\frac{3}{8}$ doit être cherchée comme celle de deux fractions ordinaires; c'est-à-dire, qu'on doit les reduire au même dénominateur, former une somme de leurs numérateurs, & diviser cette somme par le dénominateur commun. Le résultat de cette operation est alors la somme des deux quantités proposées, c'est-à-dire, que 51 étant transformées en $\frac{408}{8}$, & ajoutées à $\frac{3}{8}$ donnent $\frac{411}{8}$; & cette somme équivaut toujours à 51 $\frac{3}{8}$. Ainsi, l'opération ne produit de changement que dans la forme du nombre proposé.

43. On sent aisement que les réflexions précédentes s'appliquent également à la soustraction des fractions; car pour chercher leur somme ou leur différence, il faut toujours que les parties, dont elles sont composées, soient toutes d'une même espece. Voici donc la regle

générale qu'il faut ſuivre pour faire cette opération ſur deux fractions. on doit les reduire au même dénominateur, ſi elles ne le ſont pas; enſuite retrancher les numérateurs l'un de l'autre; diviſer le reſte par le dénominateur commun; & le réſultat de cette opération eſt la différence des deux fractions propoſées. C'eſt ainſi que la difference de $\frac{3}{8}$ t à $\frac{5}{9}$ t, ne peut être déterminée qu'en transformant ces fractions, la premiere en $\frac{27}{72}$, & la deuxieme en $\frac{40}{72}$; & on la trouve alors de $\frac{13}{72}$ t si de 2 t $\frac{3}{8}$, on ſe propoſe de retrancher $\frac{5}{9}$ de toiſe, alors les fractions, qu'il faut commencer par ſouſtraire l'une de l'autre, n'ayant pas un même dénominateur, doivent y être réduites. Elles deviennent des 72 es de la toiſe, & pour exécuter la ſouſtraction, comme $\frac{40}{72}$ ne peuvent être retranchés de $\frac{27}{72}$, on emprunte une toiſe ſur le nombre 2, on la convertit en $\frac{72}{72}$, on l'ajoute à $\frac{27}{72}$, & de la ſomme $\frac{99}{72}$ retranchant $\frac{40}{72}$, la différence des quantités propoſées eſt 1 t $\frac{59}{72}$.

44. Cherche-t-on le produit de deux fractions quelconques; le raiſonnement conduit aiſement à la regle générale qui ſert à diriger cette opération. Soit la fraction $\frac{3}{8}$ à multiplier par $\frac{5}{7}$. Si le multiplicateur qui eſt ici compoſé de cinq unités à diviſer par 7, n'exprimoit que cinq unités, il indiqueroit qu'il faut répéter 5 fois le multiplicande; mais le 7.e de cinq unités eſt ſept fois plus petit que ces mêmes cinq unités; par conſéquent le produit de $\frac{3}{8}$ par $\frac{5}{7}$, doit être ſept fois plus petit que celui de $\frac{3}{8}$ multipliés par par 5. Ce dernier produit eſt $\frac{15}{8}$, & le 7.e de celui-ci eſt $\frac{15}{56}$ (puiſqu'on (25) rend une fraction, cinq fois plus grande, en multipliant ſon numérateur, ſeul par 5; & ſept fois plus petite en multipliant ſon dénominateur ſeul par 7); par conſéquent le produit de $\frac{3}{8}$ multiplié par $\frac{5}{7}$ eſt $\frac{15}{56}$. remarquons dans cette fraction réſultante, que le numérateur eſt le produit des numérateurs des deux fractions propoſées; & que le dénominateur eſt le produit des dénominateurs des mêmes fractions. C'eſt pourquoi on peut établir pour regle générale que le produit de deux fractions; eſt une fraction, dont

on trouve le numérateur, en multipliant l'un par l'autre les numérateurs des fractions proposées, & dont le dénominateur est le produit des dénominateurs de ces mêmes fractions.

45. Si un nombre entier doit être multiplié par une fraction, ou réciproquement; la regle qui vient d'être démontrée, est encore applicable à la recherche de ce produit. Car le nombre entier peut être présenté sous une forme fractionnaire, en lui donnant 1 pour dénominateur; & alors la multiplication doit être faite comme celle de deux fractions. Soit par exemple, 30[t] à mutiplier par $\frac{4}{9}$. On doit se proposer de trouver le produit de $\frac{30^t}{1}$ par $\frac{4}{9}$. Il est $\frac{120^t}{9}$ suivant la regle de la multiplication des fractions, & le produit simplifié devient 13[t] $\frac{1}{9}$. Si plusieurs fractions doivent concourir à former un seul produit; alors on multiplie tous leurs numérateurs ensemble, pour trouver le numérateur de la fraction qui est le produit cherché; & le dénominateur de cette derniere fraction, est le résultat de la multiplication des dénominateurs de toutes les fractions proposées. Si on avoit à multiplier un nombre entier joint à une fraction, par un autre nombre, composé aussi d'unités entieres & de fractions; les regles démontrées précédemment, suffisent pour une telle opération : parce que, dans le cours d'une pareille multiplication, il faut multiplier, ou un nombre entier par une fraction, ou une fraction par une fraction; & on a déjà dit comment on doit opérer dans tous ces cas.

46. Diviser une fraction par une autre, c'est chercher combien de fois la premiere contient la seconde; & par cette seule considération, on doit juger que toutes deux doivent exprimer des quantités de même espece, ou des parties égales d'une même unité. On peut chercher aussi par la division, une quantité, qui soit contenue dans la fraction dividende, autant de fois que l'indique la fraction diviseur, comme on l'a déjà dit en parlant de la division des nombres entiers; (16) mais comme la division proposée sous ce der-

nier rapport, ſe réduit toujours à la diviſion ordinaire des quantités qu ſont d'une même eſpece; il doit ſuffire ici de dire comment on trouve, combien de fois une fraction en contient une autre. Si, dans ce ſens, on doit diviſer $\frac{5}{8}$ par $\frac{3}{8}$ de livre, la premiere fraction doit contenir la ſeconde autant de fois que 5 unités contiennent 3 unités, (comme on l'a déjà dit (37)); ainſi le quotient cherché eſt néceſſairement $\frac{5}{3}$ ou 1 $\frac{2}{3}$; c'eſt-à-dire, que la premiere contient la ſeconde une fois & $\frac{2}{3}$ de fois. Si $\frac{5}{6}$ de toiſe ſont à diviſer par $\frac{7}{8}$; comme les parties de l'unité exprimées par la premiere fraction, ne ſont pas de même grandeur que les parties d'unité qui compoſent la ſeconde fraction; on ne peut juger combien de fois l'une de ces fractions doit contenir l'autre. Il faut, pour trouver le quotient cherché, les reduire toutes deux au même dénominateur, & ces fractions transformées, deviennent $\frac{40}{48}$ & $\frac{42}{48}$; alors dans cet état, le quotient doit être comme on l'a démontré plus haut $\frac{40}{42}$; parce que ces 48.es de l'unité, ſe contiennent autant de fois que 40 unités contiennent 42 unités. Remarquons actuellement que ce réſultat $\frac{40}{42}$, a pour numérateur, le produit du numérateur de la fraction dividende, par le dénominateur de la fraction diviſeur; & pour dénominateur, le produit du dénominateur de la premiere fraction, par le numérateur de la ſeconde; c'eſt-à-dire, qu'il eſt le produit de la fraction dividende par la fraction diviſeur renverſée, ou de $\frac{5}{6}$ multipliés par $\frac{8}{7}$. Le même raiſonnement peut être appliqué à la recherche du quotient de la diviſion de toutes ſortes de fractions: ainſi on peut établir pour regle générale, qu'on trouve le quotient de la diviſion de deux fractions, en multipliant la fraction dividende par la fraction diviſeur renverſée. On ſeroit parvenu au même réſultat, en raiſonnant de cette autre maniere; la fraction dividende doit contenir la fraction diviſeur, huit fois autant qu'elle contient 7 unités: il faut donc d'abord la diviſer par 7, ce qui ſe fait en multipliant par 7, le dénominateur 8 de la fraction dividende; & enſuite il faut répéter huit fois ce quotient trouvé, ou multiplier par 8 le numérateur de la fraction divi-

dende. Le quotient de la diviſion ainſi motivé auroit encore été, comme précédemment, $\frac{40}{40}$; fraction qui ſe reduit $\frac{20}{21}$.

47. Cette regle s'étend à la diviſion d'un nombre entier par une fraction; & à celle d'une fraction, par un nombre entier. Il ſuffit, pour démontrer qu'elle eſt applicable dans ces cas, de rappeller qu'un nombre entier peut toujours être préſenté ſous une forme fractionnaire, en lui donnant 1 pour dénominateur. Soient, par exemple 3^t à diviſer par $\frac{5}{6}$; le dividende peut recevoir cette forme $\frac{3}{1}$; enſuite, le diviſeur étant renverſé, & multiplié par le dividende, le produit $\frac{18}{5}$ ou $3\frac{3}{5}$ eſt le quotient cherché. Remarquons ici que, ſi le dividende eut été $\frac{5}{6}$, & le diviſeur 3, le quotient auroit été le produit de $\frac{5}{6}$ par $\frac{1}{3}$ ou $\frac{5}{18}$; réſultat bien différent de celui qu'on a obtenu précédemment. Une telle différence doit faire ſentir combien il eſt important de juger, par l'état d'une queſtion, dont la ſolution dépend d'une diviſion, quelle eſt la quantité qui doit être employée comme dividende.

48. Si deux nombres, qui expriment chacun, & des unités entieres, & des fractions d'unité, doivent être diviſés l'un par l'autre; cette diviſion eſt encore dirigée par les regles de la diviſion des fractions. Mais la facilité de leur application, dans ce cas particulier, exige une opération préalable. Soit, par exemple $25\frac{3}{8}$ à diviſer par $12\frac{2}{5}$, on a vu que, pour diviſer 2 fractions l'une par l'autre, il faut multiplier la fraction dividende, par la fraction diviſeur renverſée. C'eſt pourquoi, on ne peut appliquer cette regle à la ſolution de la queſtion préſente, ainſi qu'à celle de toutes les queſtions ſemblables, qu'en donnant au diviſeur propoſé, une forme fractionnaire. Les douze unités doivent donc être ajoutées aux $\frac{2}{5}$, ou réduites en cinquiemes, & cette ſomme eſt de $\frac{62}{5}$. Après une telle préparation du diviſeur, & pour exécuter la diviſion demandée, il faut multiplier le dividende par $\frac{5}{62}$; c'eſt-à-dire, qu'on doit multiplier $25^t\ \frac{3}{8}$ par 5, & diviſer le produit par 62. On pourroit, ſans doute, pour rendre l'opération parfaitement ſemblable à la diviſion des fractions, réduire auſſi le dividende propoſé en huitiemes, & le mettre ainſi ſous

une forme fractionnaire ; mais cette transformation devient superflue ou peu nécessaire, parce qu'on fait multiplier & diviser, par un nombre entier, un nombre tel que 25 $\frac{3}{8}$. Enfin la division exécutée fait connoître pour quotient 2 $\frac{23}{496}$; c'est-à-dire, que le dividende proposé contient le diviseur donné, 2 fois & $\frac{23}{496}$ e de fois, ou en réduisant la fraction en décimales, le quotient est 2,0464.

49. *Des nombres complexes.* En réunissant tout ce qui a été dit précédemment, & sur les nombres entiers, & sur ceux-ci joints à des fractions quelconques, & sur des fractions isolées ; il sembleroit qu'il n'est plus aucune regle à ajouter, pour diriger les opérations principales de l'addition, de la soustraction, de la multiplication & de la division, des nombres quels qu'ils puissent être. Cependant, pour embrasser tous les cas qui peuvent se présenter, il reste encore à appliquer les mêmes principes, aux calculs des nombres complexes, c'est-à-dire, de ceux qui expriment des unités, jointes à des subdivisions de ces unités, lorsque ces parties, désignées par des dénominations particulieres, n'ont pas une forme fractionnaire. Au rang de ces nombres sont ceux qui sont composés, ou de toises, de pieds & de pouces ; ou de livres, de sols & de deniers ; ou de jours, d'heures & de minutes &c.

50. L'addition des nombres complexes est fondée & doit être exécutée comme l'addition des nombres simples. Ces derniers renferment des unités, des dixaines, des centaines &c., qui peuvent être regardées comme autant d'unités de diverse espece ; & comme n'étant susceptibles d'être ajoutées ensemble, que parce qu'elles ont des rapports entre elles, ou parce qu'elles se composent les unes des autres ; de même, les nombres nommés complexes, expriment des unités de diverse grandeur, qui se composent aussi les unes des autres. C'est pourquoi, ces derniers nombres peuvent être ajoutés ensemble, en se conformant aux procédés indiqués précédemment. Le même principe qui prescrit de commencer l'addition des nombres simples, par celle des unités de la classe inférieure ; démontre aussi,

que l'addition des nombres complexes doit être exécutée dans le même ordre. Ainſi il faut, après avoir ajouté des parties d'unités compriſes dans un nombre complexe, écrire leur ſomme ſous la même colonne, ſi leur nombre ne ſuffit pas pour former une ou pluſieurs unités d'une grandeur ſupérieure. Enſuite, en ſe conformant aux autres regles de l'addition, qui conduiſent directement à la ſomme de pluſieurs nombres ſimples, on parvient auſſi à la ſomme totale de pluſieurs nombres complexes. Un exemple va ſervir à développer ces idées. Veut-on ſavoir combien, dans un vaiſſeau, on a embarqué de tonneaux, de quintaux & de livres; après y avoir chargé 1.° 528^t 12^q 56^l; 2.° 336^t 18_q 34^l; & 3.° 108^t 0^q 91^l [le tonneau vaut 2000 l. ou 20^q, & le quintal vaut 100^l On voit qu'il faut ajouter enſemble les trois poids donnés; & ils peuvent être réunis, puiſqu'ils n'expriment que des quantités de même eſpece, ou qui ont entre elles des rapports connus & fixes. Après avoir placé ces nombres les uns au-deſſous des autres, de maniere que les tonneaux ſe correſpondent, ainſi que les quintaux & les livres, on ajoute les unités de l. Celles-ci forment une ſomme de 11^l, ou une dixaine de l. & 1^l. Cette livre indiquée par 1, doit être placée ſous la colonne des unités de l., & la dixaine doit être réſervée pour être ajoutée aux dixaines de l, qui ſont dans la colonne ſuivante.

528^t	12_q	56^l
336	18	34
108	0	91
973^t	11^q	81^l

La ſomme de ces dixaines eſt 18, elle vaut un quintal, plus 8 dixaines. On écrit 8 ſous la colonne des dixaines de livres; & le quintal réſervé, étant ajouté aux autres quintaux, il en réſulte une ſomme de 31 quintaux, ou d'un tonneau & de 11_q; ceux-ci étant écrits ſous la colonne des quintaux, on ajoute enſemble les tonneaux qui ſe trouvent être au nombre de 973. La ſomme totale de ces 3 nombres complexes eſt donc de 973^t 11_q 81^l; & c'eſt celle des poids qui ont eté embarqués dans le vaiſſeau. Cette opération, comme on voit, n'a exigé, pour être exécutée, aucun principe nouveau, ou différent de ceux

qui ſervent de baſe à l'addition des autres nombres; ainſi il y a la plus grande uniformité dans l'addition des nombres ſimples & dans celle des nombres complexes.

51. La ſouſtraction des nombres complexes doit auſſi être aſſimilée à celle des nombres entiers; & la reſſemblance eſt, ſans doute, aſſez ſentie, pour diſpenſer de répétitions qui deviennent ſuperflues. Un exemple particulier ſuffira d'ailleurs pour la confirmer.

On veut ſavoir quelle eſt la différence des profondeurs de l'eau, dans deux points de la mer, où ces meſures ont été priſes. L'une de ces profondeurs eſt de 92 br. 3 pieds 7 pouces; & la ſeconde de 58 br. 4 pieds 11 pouces (l'unité principale eſt ici la braſſe qui vaut cinq pieds.). Il faut pour les ſouſtraire l'une de l'autre, écrire la plus grande au-deſſus de la plus petite, & commencer l'opération par les plus petites parties de l'unité, qui ſont ici des pouces. On ne peut de 7 pouces en retrancher 11, c'eſt pourquoi on emprunte un pied ou 12 pouces à la colonne des pieds; on les ajoute avec 7; & alors, leur différence avec 11, eſt 8 pouces; de même, 4 pieds ne pouvant être ſouſtraits de 2, on emprunte une braſſe qui vaut 5 pieds; & de ce nombre de pieds réuni à 2, ſi on en retranche 4, le reſte eſt 3 pieds. Enfin, la différence des nombres de braſſes eſt 33; par conſéquent, la différence 33 braſſes 3 pieds 8 pouces eſt celle des braſſiages, ou celle des profondeurs de l'eau; qui ont été meſurées dans deux divers points de la mer.

92^{pi}	3^{p}	7^{b}
58	4	11
33^{b}	3^{pi}	8^{p}

52. Les nombres complexes n'étant, comme on l'a dit, compoſés que d'unités & de parties d'unités, leur multiplication ſe réduit aiſément à celle des fractions. Il faut alors convertir les unités, & leurs parties plus ou moins grandes, en parties de la derniere claſſe; on donne enſuite aux ſommes qui repréſentent ces nombres, un dénominateur propre à exprimer le nombre des parties de cette derniere claſſe, qui compoſent l'unité principale. Par ce moyen, les nombres com-

plexes ſont changés en fractions de leur unité principale. Par exemple : veut-on ſavoir combien valent 24 milliers & 8 quintaux de ſucre, à raiſon de 1352^{l} $12^{ſ}$ 5^{d} le millier ; il faut répéter cette derniere ſomme autant de fois que le premier nombre l'indique. Si, pour trouver le réſultat, on emploie les regles déjà enſeignées pour la multiplication des fractions, il faut réduire les deux facteurs, l'un en quintaux, & l'autre en deniers. Le premier vaut 248 quintaux ou $\frac{248}{10}$ de millier ; & le deuxieme eſt de 324629 deniers, ou de $\frac{324629}{240}$ de livre ; (parce que chaque quintal eſt le 10e d'un millier, & un denier la 240e partie de la l.). Le produit de ces deux fractions eſt celui qui eſt cherché ; & en diviſant le numérateur de ce produit par ſon dénominateur, on connoit le nombre de l. de ſ. & de d. que peut valoir la quantité donnée de ſucre. Cette méthode eſt ſimple dans ſes principes, mais laborieuſe dans l'exécution. Ainſi, il eſt à propos d'en indiquer une ſeconde qui eſt fondée ſur des principes déjà préſentés, & qui eſt très-facile à employer. On la nomme méthode de multiplication par parties aliquotes. Elle conſiſte à déduire certains produits, ou de ceux déjà obtenus, ou de produits ſuppoſés ; & ſon application à l'exemple propoſé ſuffira pour la développer complétement.

53. La queſtion exige que 132^{l} 12^{s} 5^{d} ſoient répétés autant de fois & de parties de fois, qu'il y a de milliers & de parties de milliers, dans 24^{m} 8^{q}, c'eſt-à-dire, 24 fois & 8 dixiemes de fois.

On écrit les deux facteurs, en conſervant aux parties d'unités ; du multiplicateur (quoique conſidéré comme nombre abſtrait) leur dénominations diſtinctives, parce qu'elles indiquent des rapports avec l'unité principale ; & on multiplie enſuite (comme on l'a dit ſouvent ailleurs) tout le mul-

1352^{l}	12^{s}	5^{d}	
24^{m}	8^{q}		
5408^{l}	0^{s}	0^{d}	
2704			
12			
2	8		
0	8		
0	2		
676	6	2	$\frac{1}{2}$
270	10	5	$\frac{4}{5}$
135	5	2	$\frac{9}{10}$
33544^{l}	19^{s}	11^{d}	$\frac{1}{5}$

tiplicande par chaque partie du multiplicateur. La ſeule différence qui ſubſiſte entre la multiplication des nombres entiers, & celle des nombres complexes, c'eſt que celle-ci doit commencer par les unités principales des deux facteurs; Et cette regle eſt fondée ſur ce que les réſultats de la multiplication des parties de l'unité par un multiplicateur donné, ſont conclus des produits de la multiplication de l'unité principale, par le même multiplicateur. Après cette explication, procédons à déterminer le produit demandé. Il faut multiplier 1352^l par 24 ou les repéter 24 fois; ce qui donne, par les regles ordinaires, un nombre de livres. Enſuite on doit repéter 24 fois 12ſ; & on trouve le produit par le raiſonnement ſuivant, qui eſt la baſe de cette méthode de multiplication. On partage $12^ſ$ en parties aliquotes de la liv. ou en parties qui ſoient contenues un nombre exact de fois dans la livre. (en général les parties aliquotes de $20^ſ$ ſont $2^ſ$, $4^ſ$, $5^ſ$, & $10^ſ$; car 3ſ 6ſ & $7^ſ$, &c. ne ſont pas renfermés exactement dans 20ſ). Les parties de 12ſ qui ſont aliquotes de la livre, ſont 10ſ & $2^ſ$; c'eſt pourquoi au lieu de répéter 24 fois $12^ſ$, on répete ſucceſſivement, & $10^ſ$, & $2^ſ$, ce même nombre de fois. Si on ſuit ce procédé, c'eſt parce que ces produits partiels peuvent être conclus, du produit d'une livre multipliée par 24. En effet, ce dernier produit, ſeroit 24^l & par conſéquent celui de $10^ſ$ multipliés par 24, doit en être la moitié, ou de 12^l, puiſque $10^ſ$ ſont la moitié de la livre. Par une raiſon ſemblable, le produit de 2 par $24^ſ$, doit être 5 fois plus petit que 12^l: il eſt donc 2^l 8ſ; enfin on décompoſe 5 deniers en 4^d & 1^d, parce que 5^d ne ſont pas exactement contenus dans $2^ſ$ & parce que le produit de $2^ſ$ par 24 doit ſervir à déterminer celui de 5^d par le même nombre. Le produit de $2^ſ$ par 24, étant de 2^l $8^ſ$, celui de 4^d par 24 doit en être le 6e; ainſi, il eſt 8ſ. Enfin celui de 1^d par 24, doit être le quart du dernier produit, c'eſt-à-dire, qu'il eſt $2^ſ$. par le moyen de ces opérations ſucceſſives, le multiplicande entier eſt répété 24 fois; & maintenant il faut le multiplier par 8 quintaux, ou le répéter 8 dixiemes de fois. Le procédé qu'il faut ſuivre

ſuivre dans cette nouvelle opération, eſt encore fondé ſur le même raiſonnement. Le multiplicande entier étant multiplié par un millier, ou étant répété une fois, reſteroit de la même grandeur ; mais d'un tel produit $1352^l\ 12^s\ 5^d$, on ne peut conclure celui du même multiplicande multiplié par 8 quintaux ; parce que le nombre 8 n'eſt pas une partie aliquote de 10. On doit donc, comme précédemment, décompoſer ces 8 quintaux en parties aliquotes du millier, c'eſt-à-dire, en 5, 2 & 1 ; & multiplier ſucceſſivement le multiplicande, par 5 quintaux, par 2 & par 1. Le produit du multiplicande multiplié par 5 quintaux, doit être la moitié de celui du même facteur par un millier ; il eſt donc la moitié de $1352^l\ 12^s\ 5^d$ ou $676^l\ 6^s\ 2^d\ \frac{1}{2}$. Comme 2 quintaux ſont le 5e d'un millier, le produit du multiplicande multiplié par ces 2 quintaux, doit être le $5.^e$ de ce même multiplicande, ou $207^l\ 10^s\ 5^d\ \frac{4}{5}$; & enfin ce dernier produit doit être le double de celui du multiplicande multiplié par un quintal : par conſéquent, celui-ci eſt $105^l\ 5^s\ 2^d\ \frac{9}{10}$. C'eſt ainſi que le multiplicande entier ſe trouve, après ces opérations, être multiplié ſucceſſivement par toutes les parties du multiplicateur ; & en ajoutant les produits partiels qui ont été placés avec ordre les uns au-deſſous des autres, à meſure qu'ils ont été déterminés ; leur ſomme totale devient le produit cherché : c'eſt-à-dire, que le ſucre propoſé doit couter $33544^l\ 19^s\ 11^d\ \frac{1}{5}$. Un tel exemple auſſi détaillé ſuffit pour faire connoître comment il faut faire la multiplication ; ſoit lorſque le multiplicande eſt incomplexe, & le multiplicateur complexe ; ſoit lorſque celui-ci eſt incomplexe, & le premier complexe ; ſoit enfin lorſque les deux facteurs ſont complexes. Dans tous ces cas, la méthode eſt uniforme, & ſemblable à celle qui a été ſuivie dans l'opération précédente.

54. S'il eſt queſtion de diviſer deux nombres complexes l'un par l'autre ; on ſe propoſe, comme on l'a dit ailleurs, de chercher, ou combien de fois un nombre en contient un autre de même eſpece ; ou quel eſt le nombre qui eſt contenu un nombre de

fois déterminé dans un dividende donné. Ces deux cas doivent être ſoigneuſement diſtingués, & la queſtion propoſée ſert toujours à indiquer l'un ou l'autre avec évidence. S'il faut chercher combien de fois un nombre complexe contient un autre nombre complexe; le dividende & le diviſeur doivent néceſſairement être d'une même eſpece, & alors on réduit les deux nombres propoſés en parties d'unité d'une même claſſe. Par exemple, ſi le dividende & le diviſeur expriment, l'un des toiſes, des pieds & des pouces; & l'autre des toiſes & des pieds, ils doivent tous deux être reduits en pouces. La diviſion conſiſte, après cette opération préalable, à chercher combien de fois un nombre de pouces, eſt contenu dans un autre nombre de pouces; & le quotient doit être determiné, comme ſi ces nombres de pouces étoient des nombres d'unités principales (37). Par exemple, une ſomme de $4783^{l}\ 3^{f}\ 9^{d}$ a été partagée également entre tous les matelots d'un vaiſſeau; chacun a reçu $54^{l}\ 19^{s}\ 7^{d}$, & on demande quel devoit être le nombre des copartageans. Cette queſtion doit être réſolue, en diviſant la ſomme partagée, par la part de chaque matelot. Le dividende & le diviſeur ſont de même eſpece, & tous deux ils renferment, ſoit des unités principales, ſoit des parties d'unité de diverſe dénomination. Si on les reduit l'un & l'autre en deniers, tout conſiſte à chercher combien de fois $54^{l}\ 19^{s}\ 7^{d}$ ou 13195^{d}, ſont contenus dans 1147965 deniers qui équivalent à 4783^{l} 3 9^{d}. mais deux nombres de deniers, ſe contiennent autant de fois que deux nombres pareils de livres, ou d'unités quelconques; on doit donc faire la diviſion indiquée, comme ſi les 2 nombres de deniers, étoient autant de livres; & le quotient eſt 87: c'eſt-à-dire, que les gens de l'équipage devoient être au nombre de 87.

55. Si le dividende & le diviſeur ne ſont pas de de même eſpece, ou ſi on cherche, dans un dividende complexe, quel eſt le nombre qu'il contient autant de fois que le diviſeur l'indique; il faut que ce diviſeur exprime nettement, ce nombre de fois qui eſt toujours marqué néceſſairement par le nombre de ſes uni-

tés. Si le diviſeur propoſé eſt un nombre entier; l'opération eſt ſans difficulté. Il ſuffit alors de diviſer chaque partie du dividende, par le nombre entier qui ſert de diviſeur (23); & le quotient eſt de même eſpece que le dividende. Si le diviſeur eſt un nombre complexe, & d'une eſpece différente de celle des unités du dividende; ſes unités principales, ainſi que les fractions différentes d'unité qu'il renferme doivent être réunies enſemble, pour ne compoſer qu'une ſeule & même fraction, ou quantité fractionnaire; parce qu'alors, ſous cette nouvelle forme, le diviſeur indique, que le quotient cherché doit être contenu dans le dividende, autant de fois qu'il y a d'unités, dans cette quantité fractionnaire. Par cette préparation préalable, le diviſeur ceſſe d'avoir la forme d'un nombre complexe, & l'opération eſt réduite à diviſer le dividende par une fraction diviſeur. C'eſt pourquoi, conformément aux regles déja données pour la diviſion des fractions, il faut renverſer la fraction diviſeur; enſuite multiplier le dividende par le numérateur de cette fraction; & diviſer enfin le dernier produit par ſon dénominateur, pour parvenir au quotient cherché. L'exemple ſuivant va rendre palpables, & ces reflexions, & les regles qui en ſont les conſéquences.

Suppoſons qu'on ait apporté, au départ d'un bâtiment, un rétard de 12 jours 5 heures; l'indemnité démandée eſt de $564^{l}\ 15^{s}\ 8^{d}$, & on voudroit ſavoir combien il en coûte par chaque jour de retardement. La ſomme cherchée doit être contenue dans 564^{l} 15 ſous 8 deniers, autant de fois qu'il y a de jours dans 12 jours 5 heures. C'eſt pourquoi il faut diviſer la ſomme donnée par le nombre de jours, puiſque le diviſeur eſt compoſé de jours, & de parties de jour ſi on fait diſparoître la ſéparation des unités principales, & de leur parties, en les ajoutant enſemble; le nombre de jours, exprimé par le diviſeur (qui contient 293 heures), eſt indiqué par la quantité fractionnaire $\frac{293}{24}$, parce que, pour trouver le nombre de jours, que peuvent former 293 heures, il faut diviſer ce dernier nombre par 24. Le diviſeur étant ainſi transformé, il faut procéder, à

diviser le dividende par cette fraction ; c'est-à-dire, à la multiplier par la même fraction renversée. Il faut donc le multiplier par 24, & diviser ce produit par 293. Ce produit, dont les parties sont détaillées ci-contre, est de $13554^{l}\ 16^{s}$; & ce nombre étant partagé en 293 parties, on divise par 293, chaque partie est de $46^{l}\ 5^{s}\ 2^{d}\ \frac{266}{293}$, c'est-à-dire, que cette derniere somme est l'indemnité payée pour chaque jour supposé du retard apporté au départ du bâtiment. La derniere partie de cette opération est un modele de la division d'un nombre complexe par un diviseur qui ne l'est pas ; puisqu'on a divisé le dividende par le nombre entier 293. C'est pourquoi, l'exemple qui vient d'être présenté, embrasse ce dernier cas de la division des nombres complexes ; & le procédé motivé qui a été suivi pour arriver au dernier résultat, indique quelle est la véritable marche qu'il faut tenir pour trouver la solution de questions semblables.

$564^{l}\ 15^{s}\ 8^{d}$ | $\frac{293}{24}$

$2256^{l}\ 0^{s}\ 0^{d}$ | $46^{l}\ 5^{s}\ 2^{d}\ \frac{266}{293}$
1128
12
6
0 16

$13554^{l}\ 16^{s}\ 0^{d}$
1834
76

1536
71

852
266

56. Si on refléchit sur l'usage de toutes les regles précédentes d'addition, de soustraction, de multiplication & de division ; on ne peut douter qu'elles ne soient très-nécessaires & très-utiles à l'homme de mer. Elles lui offrent tous les moyens propres à le conduire à de nombreux résultats qu'il est souvent contraint de chercher, en exerçant l'art de la marine. Elles servent, comme on le verra, aux calculs, de la capacité d'un vaisseau, de son déplacement, de sa stabilité, de la surface de ses lignes d'eau, de la résistance que l'eau oppose à sa marche, de l'étendue de ses voiles, &c. Elles sont employées dans le calcul, du lest, des approvisionnements, des munitions de guerre, des rations, des soldes des gens de mer, des parts de

prises, &c. On en fait le plus grand usage dans la navigation, pour trouver les résultats, ou des relèvemens, ou de l'estime, ou de toutes les observations astronomiques qui servent à déterminer, soit le temps, soit la variation de l'aiguille aimantée, soit la latitude & la longitude d'un vaisseau, &c. Entre toutes les questions de marine qui peuvent se présenter, il en est, sans doute, dont la solution est facilement conclue des regles du calcul des nombres; mais il en est d'autres qu'on ne pourroit résoudre qu'avec des difficultés, qui disparoissent, en employant une méthode plus générale, & en appliquant sous une forme plus vaste, les principes de l'arithmétique. Car on ne peut se dissimuler que dans les combinaisons des nombres, il n'y ait beaucoup de regles, qui dépendent absolument des chiffres adoptés pour exprimer ces mêmes nombres; & qui varieroient, si ces signes indicatifs, étoient plus ou moins multipliés, & différoient dans leurs rapports réciproques; tandis que les principes fondamentaux des calculs, sont constans, & conviennent à toutes les numérations qu'on pourroit imaginer. De telles regles, qui ne peuvent produire que de l'obscurité & de l'embarras dans de grandes combinaisons, & qui sont particulieres aux nombres qu'on est convenu d'employer dans l'arithmétique ordinaire; imposent donc la nécessité de recourir, dans certaines questions, à une méthode plus simple, qui soit moins dépendante de l'expression des quantités qu'il faut combiner, ou qui apprenne à les représenter par des signes plus universels que les nombres. Cette méthode est l'algebre. Newton lui a donné le nom d'arithmétique universelle, parce qu'elle enseigne à faire tous les calculs des quantités, sans égard à la forme sous laquelle leur valeur peut être présentée. L'utilité de cette science, la commodité de son usage, la simplicité de ses regles, & la vaste étendue des applications qu'on peut en faire; doivent, sans doute, engager tous les hommes de mer, a en faire l'objet de leurs réflexions, pour jouir au besoin des avantages qu'elle assure; & ils doivent d'autant moins redouter les difficultés de cette

étude particuliere, qu'elle repoſe ſur les mêmes principes qui ſervent de baſe à l'arithmétique ordinaire. Ce ſont de tels motifs, qui m'ont porté à expoſer ici les premieres regles de l'algebre, c'eſt-à-dire, celles de l'addition, de la ſouſtraction, de la multiplication, de la diviſion; & qui m'engageront à ajouter ſucceſſivement dans le cours de cet ouvrage, quelques autres regles utiles, ne me reſtraignant toujours à celles-là ſeules qui peuvent être néceſſaires aux opérations de l'art de la marine.

57. *Arithmétique univerſelle, ou Algebre.* Juſqu'ici nous n'avons conſidéré que des quantités exprimées en nombres; & c'eſt dans cet état que nous avons appris à les ajouter, ſouſtraire, multiplier & diviſer. Nous avons été obligés, pour faire connoître, dans tous les cas, l'art de ces opérations, de parcourir ſucceſſivement les combinaiſons, d'abord des nombres entiers, enſuite de ceux qui ſont fractionnaires, & enfin de ceux qui ſont complexes; & les mêmes principes appliqués à ces quantités préſentées ſous ces diverſes formes, ont fait établir des regles qui ſont particulieres à chaque eſpece de ces nombres. Il faut maintenant nous élever de toutes ces vues iſolées, à d'autres plus générales, & chercher comment, des quantités quelconques, & les regles de leurs combinaiſons peuvent être préſentées dans l'état le plus ſimple. Imaginons, à cet effet, que ces quantités ſoient repréſentées dans tous les calculs, chacune par un ſigne indéterminé, tel qu'une lettre quelconque de l'alphabet, a, b, c, d, &c. imaginons auſſi que toutes les opérations d'addition, de ſouſtraction, de multiplication & de diviſion, qu'on peut exécuter ſur ces quantités, lorſqu'elles ſont ſous cette nouvelle forme, ne ſoient qu'indiquées ſeulement, & jamais exécutées. Alors les ſommes, les différences, les produits & les quotients, ne ſeront plus, comme auparavant, des nombres particuliers dans leſquels les quantités combinées, ſont mêlées entr'elles & confondues enſemble, ſans pouvoir être diſtinguées; mais des combinaiſons, telles que les ſignes indicatifs de ces

quantités y paroissent toujours distincts. Par exemple : s'agit-il de multiplier 8 par 3? le produit, suivant les regles de l'arithmétique, est 24; & ce dernier nombre est tel qu'on n'y peut plus reconnoître, ni s'il résulte de la multiplication de 8 par 3, ou de 4 par 6, ou de 2 par 12, ni même celle des 4 opérations, qui a servi à le produire. Mais en algebre, où les opérations sont & restent toujours indiquées, on peut découvrir dans les résultats, non seulement les quantités qui ont été combinées, mais aussi le genre des combinaisons qu'on leur a fait bir. Cette derniere propriété qui distingue la méthode algébrique, est infiniment précieuse, pour faciliter la recherche de certains résultats. Mais ses avantages ne peuvent être bien sentis, avant d'avoir exposé, comment les opérations principales de l'arithmétique, sont exécutées en algebre, & comment on les emploie pour la solution des questions proposées; c'est pourquoi, ces operations vont être traitées avec toute l'étendue nécessaire.

58. Si les principes déjà présentés pour fondemens des opérations de l'arihmétique, sont aussi ceux de pareilles opérations d'algebre, telles que l'addition, la soustraction, la multiplication & la division; certaines regles ne sont pas communes à l'une & à l'autre méthode. Il en est, en arithmétique, qui dépendent du choix & des propriétés des nombres; & en algebre, il en est de conventionnelles. Comme c'est sur ces dernieres que repose la forme des opérations algébriques, je vais les faire connoître avant d'entrer dans le développement détaillé de ces mêmes opérations.

On est convenu, 1.° de représenter une quantité quelconque, par un signe général, tel qu'une lettre de toute sorte d'alphabet, ou tout autre caractère. 2.° Le signe de l'addition doit être une croix +; c'est-à-dire, que la quantité représentée par b, devant être ajoutée à la quantité c; il faut écrire $c+b$ pour exprimer cette somme, en faisant précéder la quantité b du signe + qui la sépare de c, & qui indique qu'elle lui est ajoutée. 3.° Le signe de la soustraction est une petite ligne horisontale -; & b devant être retranché de c, on doit écrire $c-b$, en faisant précéder la quantité b du signe moins, qui marque qu'elle doit

être retranchée de c; ainſi la différence de ces deux quantités, eſt indiquée ou exprimée ſimplement par $c-b$. 4.° le ſigne, auquel on reconnoît que deux quantités ſont multipliées l'une par l'autre, eſt qu'elles ſoient écrites l'une à côté de l'autre, ſans interpoſition d'aucun des ſignes plus ou moins. Ainſi b devant être multiplié par c, leur produit eſt déſigné ou repréſenté par bc. 5° le ſigne qui indique que deux quantités ſont diviſées l'une par l'autre, conſiſte en ce qu'elles ſoient placées l'une au-deſſus de l'autre, & ſéparées par un trait horiſontal; de maniere que le dividende ſoit au-deſſus de cette petite ligne, & le diviſeur au-deſſous, comme on l'a déjà vu ailleurs. Ainſi on eſt convenu que $\frac{b}{c}$ exprime que b eſt diviſé par c, ou qu'une telle fraction repréſente le quotient de la diviſion de ces deux quantités. 6° ſi, dans une ſomme donnée, une quantité ſe trouve être ajoutée pluſieurs fois à elle-même, il faut l'écrire une ſeule fois, & la faire précéder d'un nombre qui marque combien de fois elle eſt ajoutée à elle-même. C'eſt ainſi qu'au lieu d'écrire $b+b+b+b$, comme l'indique (2°) le procédé de l'addition algébrique; on eſt convenu d'écrire $4b$, pour annoncer que b eſt répété 4 fois; & ce nombre 4, comme tout autre nombre qui précede une quantité algébrique, reçoit le nom de coefficient. 7° ſi, dans un produit, une même quantité eſt deux, trois, ou quatre fois facteur; il faut ne l'écrire qu'une ſeule fois dans ce produit, pour en ſimplifier l'expreſſion, & mettre à côté de cette quantité, ſur ſa gauche, & au haut de cettemême quantité (dans le lieu où une apoſtrophe eſt ordinairement placée), un nombre qui exprime combien de fois elle eſt facteur. C'eſt ainſi qu'au lieu d'écrire, ſous cette forme, le produit $bbbc$, dans lequel b eſt trois fois facteur; il faut écrire ſimplement $b3c$. Ce nombre 3 placé de cette maniere, à côté d'une lettre ou d'une quantité quelconque, eſt nommé expoſant; parce qu'il expoſe effectivement, combien de fois la quantité qui le précede immédiatement, eſt facteur, dans le produit dont elle fait partie. 8.° Enfin, une quantité algébrique doit être nommée telle, lorſqu'elle eſt compoſée ou d'une, ou de pluſieurs quantités compoſantes

qui sont séparées entre elles par des signes + ou -, & ces quantités partielles sont distinguées par le nom général de *termes*. C'est ainsi que l'assemblage $2b+c-4d$ est une quantité algébrique; & que les quantités $2b$, c, $4d$ considérées isolément, sont chacune un des termes qui concourent à sa composition. Telles sont, dans toute leur simplicité, les conventions relatives aux opérations algébriques. Les regles de ces mêmes opérations sont nombreuses & particulieres: mais elles sont faciles à saisir & à rétenir; parce qu'elles ne sont que des résultats, soit des conventions précédentes, soit des principes ordinaires de l'arithmétique.

59. Après ces notions préliminaires, voici la regle de l'addition algébrique. Si plusieurs quantités algébriques sont proposées pour être ajoutées ensemble, il faut les placer les unes à la suite des autres, avec les mêmes signes qui les accompagnent, & réunir ensuite les termes semblables, pour simplifier l'expression de la somme. Soit $e+b$ à ajouter avec $c-d$; leur somme suivant la regle indiquée est $e+b+c-d$; & elle doit être telle effectivement. Car si on n'ajoutoit que la seule quantité c, toute entiere, avec $e+b$; la somme seroit alors, sans doute, $e+b+c$; mais, par cette opération, on ajouteroit une quantité trop grande à la quantité $e+b$, puisqu'on ne doit lui ajouter que la quantité c diminuée de la quantité d. Une telle somme $e+b+c$ est donc trop grande de toute la quantité d, c'est pourquoi il faut en retrancher d, pour la réduire à l'exacte valeur qu'elle doit avoir. La somme cherchée est donc réellement $e+b+c-d$, comme la regle l'indique; & par conséquent, cette regle étant démontrée, doit être suivie généralement, dans les opérations de l'addition des quantités algébriques. Si on étoit parvenu, par l'addition, à une somme telle que celle-ci, $e+b+e-c-2b$; son expression seroit rendue plus simple, en réunissant les termes semblables qu'elle présente. Dans cette somme il y a les termes $e+e$ qui, suivant les conventions, équivalent à $2e$; on y voit ensuite $b-2b$, & ces deux termes semblables annoncent que, non seulement la quantité b doit être ajoutée une fois aux autres termes $2e-c$, mais aussi qu'elle doit en être retranchée deux fois; ce qui se réduit en derniere analyse,

à retrancher une fois la quantité b de ces mêmes termes. C'eſt pourquoi la ſomme ſuppoſée $e+b+e-c-2b$ doit être exprimée par $2e-c-b$, c'eſt-à-dire, par une quantité algébrique, qui n'eſt compoſée que de trois termes au lieu de cinq.

60. La ſouſtraction algébrique n'eſt ſoumiſe qu'à une regle unique. Si on veut ſouſtraire des quantités algébriques les unes des autres; il faut changer les ſignes (de plus en moins & de moins en plus) qui précedent les quantités à ſouſtraire; & enſuite ajouter celles-ci aux quantités deſquelles les premieres doivent être ſouſtraites. On a ſoin auſſi, après cette opération, de réunir les termes ſemblables, pour réduire l'expreſſion de la différence, aux termes les plus ſimples & les moins nombreux.

Si de $e+b$ on doit ſouſtraire $c-d$, il faut, conformément à la regle, écrire $-c+d$ à la ſuite de $e+b$; pour former la différence cherchée qui eſt alors indiquée par $e+b-c+d$. La raiſon qui ſert de baſe à cette regle, eſt ſemblable à celle qui a ſervi à démontrer la regle de l'addition. En effet, ſi on n'avoit ſouſtrait de $e+b$, que la ſeule quantité c, la différence, ſuivant les conventions, eût été repréſentée par $e+b-c$; mais on ne doit pas retrancher la quantité c toute entiere, de $e+b$; & c'eſt cette quantité c, diminuée de la quantité d qui doit en être ſouſtraite; par conſéquent, la différence $e+b-c$ eſt trop grande de la quantité d; & la différence cherchée n'eſt réellement égale qu'à la quantité $e+b-c+d$. Remarquons que cette différence eſt la même qui réſulte de la regle annoncée; c'eſt pourquoi, cette regle eſt généralement applicable, dans tous les cas où il faut retrancher les unes des autres, des quantités algébriques propoſées.

61. Les multiplications, ſoit algébriques, ſoit numériques, ſont fondées ſur les mêmes principes. La définition en eſt la même; & ſi, dans le calcul des nombres, il faut multiplier tout le multiplicande par chaque partie du multiplicateur, pour parvenir à leur produit; de même, dans le calcul des quantités algébriques, on multiplie auſſi, dans les mêmes vues, tous les termes du multiplicande, par chaque terme du multiplicateur. Ainſi, pour exécuter une multiplication algébrique, il ſuffit de ſavoir trouver le

produit d'un terme quelconque, multiplié par un terme. Cette opération est nécessairement assujettie à un certain nombre de regles particulieres; parce qu'en multipliant deux quantités algébriques l'une par l'autre, il faut, pour obtenir complétement leur produit, déterminer, & le signe que doit avoir ce produit, & la grandeur de son coefficient, & enfin celle des exposans des lettres dont il doit être composé.

Si les deux termes qui doivent être multipliés l'un par l'autre, sont précédés chacun du signe +, alors le multiplicateur indiquant de prendre positivement le multiplicande, le produit ne peut être que positif, par conséquent, dans ce cas particulier, le produit de ces deux termes doit être affecté du signe +. Mais si le multiplicande, restant le même, ou positif, le multiplicateur étoit précédé du signe -, le produit seroit nécessairement affecté du signe -. En effet, soit b à multiplier par d-c, il faut d'abord multiplier b par d; & comme chacun de ces termes a le signe positif, (parce que tout terme qui n'a pas de signe est regardé comme ayant le signe +), le produit est bd, suivant la convention (58). Ce produit est celui de b par la quantité d toute entiere; tandis que b ne doit être multiplié que par la quantité d, diminuée de c: il y a donc dans ce produit, une quantité c qui multiplie b, ou un produit bc qui ne devroit pas s'y trouver, & qui, par conséquent, doit en être retranché. Ce produit, réduit à ce qu'il doit être, est donc bd-bc; & on doit y remarquer le produit partiel bc, qui a le signe -, & qui indique évidemment que le produit de deux termes, dont l'un est précédé du signe +, & l'autre du signe moins, doit toujours être affecté du signe -; ou que le produit de deux termes qui ont des signes contraires, est toujours négatif. Si les deux termes qu'on multiplie, étoient tous deux précédés du signe -; leur produit seroit positif, ou affecté du signe +. En effet, soit e-c à multiplier par b-d; on sait, suivant ce qui vient d'être démontré, que le produit de e-c, par b, est eb-cb; or, dans un tel produit, la quantité e-c est multipliée par la quantité b toute entiere; & il n'étoit proposé que de la multiplier par la quantité b diminuée de d; donc, dans le produit eb-cb, il y a le produit de la quantité e-c, mul-

tipliée par *d* ou *ed-cd* qui s'y trouve de trop, & qui, par cette raison, doit en être retranché. Cette soustraction se fait en changeant les signes des termes à soustraire, & en les ajoutant, dans ce nouvel état, à la quantité de laquelle ils doivent être soustraits. le produit cherché est donc réellement *eb-cb-ed+cd*; & on y doit remarquer le produit partiel *cd* qui, par le signe + dont il est précédé, annonce que ses deux facteurs *c* & *d*, ayant le signe -, composent un produit dont le signe doit être +. On peut donc établir, comme regle générale, que le signe du produit de deux facteurs algébriques quelconques, est toujours +, lorsque ces facteurs ont un même signe + ou -; & qu'il est toujours -, lorsque ces mêmes facteurs sont affectés de signes qui sont contraires.

Quant au produit même, de deux termes qui sont multipliés l'un par l'autre; la regle générale est conventionnelle, ou telle qu'elle a été annoncée précédemment (58). Cette regle prescrit de placer l'un à côté de l'autre, sans interposition de signe, tous les facteurs des termes proposés; c'est pourquoi, si 2*ebc* doit être multiplié par 3*qdm*, le produit, suivant cette regle est 2.3*ebcqdm*, ou 6*ebcqdm*. Dans un tel produit, on voit que les coefficiens des deux termes sont multipliés l'un par l'autre; & d'après cette opération, on juge qu'il faut établir pour regle générale, que le coefficient du produit de deux termes algébriques, est toujours le produit des coefficiens particuliers de ces mêmes termes, Il est d'ailleurs aisé de démontrer directement la vérité de cette regle; car 2*ebc* n'est autre chose que *ebc+ebc*: & 3*qdm* étant développé, est composé de *qdm+qdm+qdm*; & les termes proposés étant multipliés l'un par l'autre dans ce nouvel état, on auroit, suivant les regles ordinaires, six produits partiels, dont chacun seroit égal à *qdm.ebc*, ou une somme dans laquelle cette derniere quantité seroit répétée six fois; ainsi, suivant la convention (58), cette somme ou le produit cherché doit être représenté par 6*qdmebc*. Le résultat de l'application de la regle générale est parfaitement le même; ainsi, il est encore démontré que le coefficient du produit de deux termes algébriques, est le produit des coefficiens particuliers de ces deux facteurs. Les conventions, déjà

rappellées, annoncent aussi que, pour former le produit de deux termes algébriques, il faut placer l'une à côté de l'autre, sans interposition de signe, les lettres qui sont facteurs dans chacun de ces termes; mais, dans l'application de cette regle conventionnelle, il arrive souvent que, dans les deux termes multipliés, il y a des lettres qui sont les mêmes : alors, dans le produit, chacune de ces lettres communes, doit être plusieurs fois facteur. De telles lettres ne doivent donc pas être écrites plusieurs fois dans le produit (58) & chacune doit être acompagnée d'un exposant, qui indique, combien de fois elle est facteur dans le produit cherché. Si a^2bd doit être multiplié par a^3b^2c; alors, conformément à la regle générale, le produit seroit, $a^2bda^3b^2c$. Mais dans ce produit, a est cinq fois facteur & b est trois fois facteur; & comme on est convenu, ainsi que nous l'avons rappellé, d'indiquer toujours pour la simplicité des expressions, par un exposant, combien de fois une quantité est facteur dans un terme donné; il en résulte que le produit précédent doit être exprimé par la quantité a^5b^3dc. On doit observer dans le produit trouvé, que l'exposant de a est la somme des exposans de a dans les deux termes proposés; & que l'exposant de b est formé de la même maniere : par conséquent, on peut établir, comme regle générale, que, pour déterminer le produit de deux termes algébriques donnés, il faut placer l'une à côté de l'autre, les lettres diverses qui les composent; & donner pour exposant, aux lettres qui sont semblables ou communes aux deux termes proposés, la somme des exposans qui affectent ces lettres dans chacun des deux mêmes termes. Remarquons ici, que toute lettre qui ne paroît pas avoir explicitement un exposant, doit être regardée comme ayant 1 pour exposant; parce que dès que cette lettre se trouve dans le produit, elle y est une fois facteur, ce qui est exprimé par l'exposant 1.

62. Ces regles, sont celles qu'il faut observer pour déterminer le produit d'un terme, par un autre terme : par conséquent, si, dans une multiplication, le

multiplicande & le multiplicateur ſont chacun composés de pluſieurs termes ; on doit, ſuivant ces mêmes regles, multiplier terme par terme ; & réunir enſuite tous les produits partiels, pour avoir le produit total. Voici un exemple qui fera connoître tous les détails néceſſaires de cette opération. Soit la quantité $2a^2-4b^2$, à multiplier par a^2+6b^2. Ces quantités étant écrites, comme on le voit ici, il faut multiplier tout le multiplicande par le 1.er terme a^2 du multiplicateur, & le produit, (en ayant égard aux regles qui ſont relatives, ſoit aux ſignes, ſoit aux coefficiens, ſoit aux lettres, ſoit enfin aux expoſans des lettres ſemblables),

$$\begin{array}{r} 2a^2-4b^2 \\ a^2+6b^2 \\ \hline 2a^4-4a^2b^2 \\ +12a^2b^2-24b^4 \\ \hline 2a^4+8a^2b^2-24b^4 \end{array}$$

eſt $2a^4-4a^2b^2$; enſuite multipliant le multiplicande par $+6b^2$, le produit eſt $12a^2b^2-24b^4$ qu'on écrit en plaçant ſous chaque terme du 1.er produit, les termes qui leur reſſemblent. Enfin ajoutant enſemble ces produits partiels ; leur ſomme eſt $2a^4-4a^2b^2+12a^2b^2-24b^4$: & comme les termes $4a^2b^2$ & $12a^2b^2$ ſont des termes ſemblables, puiſque c'eſt la quantité a^2b^2 répétée, douze fois dans l'un & quatre fois dans l'autre : comme d'ailleurs l'un eſt ajouté & l'autre retranché ; la différence ſeule (58) de ces deux termes, doit être ajoutée aux autres termes du produit. Donc le produit total, réduit à l'expreſſion la plus ſimple, doit être $2a^4+8a^2b^2-24b^4$.

63. La diviſion des quantités algébriques a des regles qui ſont uniquement fondées ſur celles de la multiplication. Elles dérivent toutes de ce principe général déjà expoſé ailleurs, qui eſt que le produit du diviſeur par le quotient d'une diviſion, eſt toujours égal au dividende. Avant de commencer une diviſion algébrique, on obſerve d'ordonner les termes du dividende, ainſi que du diviſeur, par rapport à une même lettre ; ou bien, qu'on les arrange de maniere, que dans le premier terme du dividende ou du diviſeur, ſoit celui où la lettre choiſie, a le plus haut expoſant ; & que les termes ſuivans ſoient ceux où cette même lettre a un expoſant d'autant plus petit, qu'ils s'éloignent d'avantage du pemier terme ; par ce moyen, on rend

la comparaiſon à faire entre les premiers termes des deux quantités à diviſer, d'autant plus facile que dans un tel ordre, ces termes ont alors une quantité commune.

Après cette diſpoſition préalable, on exécute la diviſion demandée ; & comme, dans la diviſion numérique, on cherche combien le premier chiffre du dividende contient le premier chiffre du diviſeur ; de même auſſi en algebre, au lieu de diviſer réellement tout le dividende par le diviſeur, pour préſumer le quotient, on ſe contente de diviſer le premier terme de l'un, par le premier terme de l'autre. Le quotient étant trouvé, on le multiplie par le diviſeur entier, afin de ſouſtraire le produit du dividende, & afin de juger, ſoit de la convenance du quotient, ſoit du reſte du dividende, qui eſt encore à diviſer par le diviſeur propoſé. Toutes les regles de la diviſion algébrique, ſe reduiſent donc à celle d'un terme ſeul par un autre terme ; & ces regles dans leur application, doivent indiquer, & le ſigne, & la compoſition du quotient. Par la premiere de ces regles, le ſigne du quotient eſt +, toutes les fois que celui du diviſeur & celui du dividende ſont les mêmes ; mais s'ils ſont contraires, le ſigne - devient celui du quotient, parce que le produit du diviſeur multiplié par le quotient, doit avoir le ſigne du dividende. Par la ſeconde regle, & d'après le même principe, le coefficient du quotient doit être le réſultat de la diviſion du coefficient du dividende, par celui du diviſeur. Enfin, par la troiſieme regle, & les mêmes raiſons, les lettres compoſantes du dividende doivent être écrites au-deſſus des lettres du diviſeur, & en être ſéparées par un trait horiſontal. Lorſque les termes diviſés ont des lettres ſemblables, l'expoſant de ces lettres communes dans le quotient, doit être la différence, de l'expoſant de pareilles lettres du dividende, à l'expoſant des mêmes lettres du diviſeur. Les autres regles qu'on obſerve, pour continuer la diviſion, & vérifier le quotient déjà trouvé, ſont celles de la multiplication & de la ſouſtraction ; c'eſt-à-dire, qu'on multiplie le

quotient par le diviseur, & qu'on le retranche du dividende. Le reste de tout le dividende, devient ensuite un nouveau dividende partiel qui ne cesse d'être ordonné par rapport à la même lettre, comme l'étoit le dividende entier avant le commencement de la division : & on cherche un nouveau quotient, en suivant le procédé indiqué pour trouver le premier. Un exemple détaillé va faire connoître l'application de toutes les regles dont on vient de parler. Soit proposé de diviser la quantité, $7ac-5ab+22bc+6a^2-20c^2-6b^2$ par $2b+3a-4c$. Comme les termes de ces deux quantités, ne sont

$$\begin{array}{l|l} 6a^2-5ab+7ac-6b^2+22bc-20c^2 & 3a+2b-4c \\ \hline -6a^2-4ab+8ac & 2a-3b+5c \\ \hline -9ab+15ac-6b^2+22bc-20c & \\ +9ab \qquad +6b^2-12bc & \\ \hline 15ac+10bc-20c^2 & \\ 0 & \end{array}$$

pas dans un ordre relatif à une lettre commune, on les ordonne, ou on les arrange pour la lettre a, & on les écrit comme on le voit ici. Le dividende & le diviseur, étant dans cet état ; on divise le terme $6a^2$ du dividende, par le premier terme $3a$ du diviseur ; le quotient présumé est $2a$. Ensuite, on multiplie $2a$ par le diviseur entier, ce qui donne pour produit, $6a^2+4ab-8ac$; & pour le soustraire on l'écrit sous le dividende, avec lequel on l'ajoute, après avoir changé les signes de chaque terme de ce produit. On écrit donc $-6a^2-4ab+8ac$, & ces termes réunis au dividende, forment, après la reduction des termes semblables & de ceux qui se détruisent, la somme suivante $-9ab+15ac-6b^2+22bc-20c^2$. (Car $-6a^2$ & $+6a^2$ se réduisent à zero, & $-5ab$ réunis avec $-4ab$, ne sont autre chose que le produit $-ab$ répété neuf fois, ainsi de suite). La somme trouvée, ou le reste de la soustraction, est une partie du dividende, qui est encore à diviser par le diviseur ; ainsi l'opération doit continuer commce elle a déjà été faite. On divise donc $-9ab$ par $3a$, & le quotient présumé est $-3b$. Ce quotient étant multiplié par le diviseur, & le produit étant retranché

retranché du nouveau dividende ou du premier reste, on trouve un second reste $15ac+10bc-20c^2$ qu'on divise aussi par le diviseur. Le quotient de $15ac$ divisé par $3a$, est $5c$; & le produit de $5c$, par le diviseur qui est $15ac+10bc-20c^2$, étant retranché du dernier dividende, il ne reste rien. Ce qui démontre évidemment que le quotient exact de la division du dividende par le diviseur proposé est $2a-3b+5c$. On s'en assure, particulierement, en multipliant ce quotient par le diviseur donné; puisque le produit est égal au dividende proposé.

64. Les quatre opérations algébriques que nous venons d'exposer, sont simples, intelligibles & de l'exécution la plus facile. Elles peuvent être employées comme celles de l'arithmétique, à la solution des mêmes questions; mais elles peuvent l'être, aussi heureusement, à des questions plus compliquées. L'étendue de leur application est même moins bornée & moins difficultueuse; & cet avantage est attaché, soit à la forme générale des signes qui sont adoptés, soit à la méthode d'exprimer algébriquement toute question proposée. Cette méthode est fondée sur une remarque générale, savoir, que dans une question quelconque, il est toujours une quantité qui doit être égale à d'autres quantités conbinées, suivant des regles déterminées. Cette méthode est telle, que l'expression algébrique de l'énoncé d'une question, est toujours simple & précise, qu'elle ne renferme que des conditions essentielles, & qu'elle les présente dans l'ordre le plus propre à faciliter la recherche de la solution démandée. C'est par cette méthode qu'on établit entre des quantités, soit connues, soit inconnues, une égalité qui est appuyée sur l'état d'une question proposée, & ces quantités ainsi égalées l'une à l'autre, forment ce qu'on nomme une équation. Par exemple, si b & c représentent deux quantités; & si d est la différence de la premiere à la seconde; on peut dire que la quantité b étant déminuée de c, devient égale à d, & cette idée peut être rendue algébriquement par $b-c=d$. Cette expression simple, est une image de toute équation, puisque ses termes sont des signes généraux qui pourroient repré-

ſenter toute ſorte de quantité. Comme elle, toute équation eſt compoſée de deux parties qui ſont ſépaaées par le ſigne =, deſtiné à annoncer leur égalité parfaite ; & la totalité des termes qui ſont placés à la gauche du ſigne d'égalité, reçoit le nom de premier membre de l'équation, tandis que la totalité des termes qui ſont à la droite de ce même ſigne, eſt nommée le ſecond membre.

65. Cette égalité entre deux quantités quelconques, conduit à pluſieurs conséquences, & à pluſieurs regles générales, dont l'application eſt ſurtout utile à la ſolution des problêmes. Ces conséquences ſont, que les deux membres d'une équation, peuvent être chacun augmenté ou diminué, multiplié ou divisé, par une même quantité, ſans que leur égalité ceſſe jamais d'avoir lieu. Ainſi, quant on ajouteroit la quantité m, à l'un & à l'autre membre de l'équation précédente $b\text{-}c = d$, on pourroit toujours dire $b\text{-}c+m = d+m$. Mais ſi les deux membres étoient augmentés non de m mais de c, on auroit encore $b\text{-}c+c = d+c$ ou $b = d+c$ (parceque, dans le 1.er membre, les quantités réunies $-c$ eſt $+c$ ſe détruiſent réciproquement), & cette derniere équation $b = d+c$ étant comparée à la primitive $b\text{-}c = d$, qui eſt composée comme elle, des mêmes quantités; on voit que la quantité $-c$, eſt effacée du 1.er membre de celle-ci, & ajoutée dans le 2.e membre avec le ſigne +. Delà on peut conclure cette régle générale, qu'un terme d'un équation étant effacé d'un de ses membres, doit être ajouté à l'autre membre avec un ſigne contraire. Remarquons que, par cette transformation, l'équation $b = d+c$ exprime un principe connu de l'arithmétique, qui eſt que, la différence de deux quantités, & la plus petite de ces quantités, étant ajoutées enſembles, leur ſomme eſt égale à la plus grande. La même régle fondée ſur les mêmes raiſons, fait voir que l'équation $b\text{-}c = d$ peut être transformée en celle-ci $b\text{-}d = c$; équation qui annonce, comme on le ſait d'ailleurs, que ſi la différence de deux quantités, eſt rétrancheé de la plus grande, celle-ci devient égale à la plus petite de ces mêmes quantités. Ces remarques ſont placées ici, pour

donner une idée premiere de la fécondité des conséquences, que l'algebre sert à dévoiler dans la solution d'une proposition donnée.

Si le produit des deux quantités b & c, multipliées l'une par l'autre, est représenté par p; on peut dire que $bc=p$. Ensuite, comme les deux membres de cette équation, peuvent être divisés par une même quantité, sans que leur égalité soit troublée, on peut supposer que cette quantité qui doit servir de diviseur commun, soit c, alors on doit avoir l'équation $\frac{bc}{c}=\frac{p}{c}$ ou $b=\frac{p}{c}$; parce que $\frac{c}{c}=1$. On doit remarquer ici que la quantité c, qui étoit facteur du 1.er membre, en a été effacé pour être transportée comme diviseur de tout le 2.e membre, sans changer son signe primitif. C'est pourquoi il résulte de cette considération, une 2.e regle générale, savoir que, dans une équation, on peut effacer le facteur d'un membre, pour le placer comme diviseur de l'autre, sans faire de changement au signe qu'il pourroit avoir, & sans cesser de conserver, malgré cette opération, l'égalité des deux membres. Cette opération $b=\frac{p}{c}$ exprime une vérité connue, c'est-à-dire, qu'en divisant un produit par un de ses deux facteurs, le quotient est égal à l'autre facteur.

Si le quotient de la division de b par c est représenté par q, on doit avoir l'équation $\frac{b}{c}=q$; & l'égalité de ces deux membres, ne changeroit pas, si on les multiplioit l'un & l'autre par c. C'est pourquoi on a encore l'équation $\frac{bc}{c}=qc$, ou $b=qc$, & on doit remarquer que c qui étoit diviseur du 1.er membre dans la premiere équation, est devenu facteur du deuxieme membre dans la même équation transformée sans avoir reçu un signe différent. Par conséquent on peut établir comme regle générale, que pour faire disparoître le diviseur d'un membre d'équation, il faut l'écrire comme facteur de tout le second membre,

& avec le ſigne qu'il avoit dans le premier membre. Cette transformation de l'équation $\frac{b}{c} = q$, en celle $b = qc$ rappelle un autre principe général d'arithmétique : ſavoir : que le quotient de la diviſion de deux quantités, étant multiplié par le diviſeur, le produit eſt égal au dividende.

Remarquons enfin que, dans l'application de la ſeconde & de la troiſieme regle générale, la quantité qu'on fait paſſer d'un membre dans un autre, pour faire fonction de diviſeur ou de facteur, doit être facteur ou diviſeur commun, à tous les termes du membre dans lequel cette quantité eſt effacée, parce que, ſans cette condition, les deux membres de l'équation ne ſeroient pas complétement diviſés, ou multipliés par une même quantité.

66 Deux exemples détaillés, vont ſervir à faire conoître l'uſage de l'analyſe ou de la methode des équations, & l'application des regles qu'il faut ſuivre, pour produire leurs transformations. 1.° Si un vaiſſeau flottant eſt d'un poids égal à celui de 3000 tonneaux, on demande combien il doit déplacer de pieds cubes d'eau de mer. (un tonneau peſe 2000^{l}, & un pied cube d'eau de mer 72^{l}.) Quelque ſoit le nombre des pieds cubes du déplacement, on peut le repréſenter par le ſigne général x, alors la quantité $72x$ doit être le poids total du vaiſſeau, eſtimé en livres. Mais ce poids total, eſt auſſi exprimé par 2000^{l}, répétées autant de fois qu'il y a de tonneaux, ou par 6000000; parconſéquent, en rapprochant ces deux expreſſions, il eſt permis de faire l'équation ſuivante $72x = 6000000$l. Dans cette équation il y a une quantité cherchée qui eſt x, & qui reſteroit connue & déterminée, ſi elle étoit ſeule dans un membre de l'équation, tandis que l'autre membre ne ſeroit composé que de quantités connues. L'équation trouvée, peut aiſément être ramenée à cet état, en ſuivant la ſeconde regle démontrée précédemment ; c'eſt-à-dire, en effaçant le facteur 72 du premier membre, & en l'écrivant comme diviſeur de tout le ſecond membre. Par cette opération, l'équation premiere ſe

change en celle-ci, $x = \frac{6000000}{72} = 83333 \frac{1}{3}$ pieds cubes. Un vaiſſeau qui peſe 3000 tonneaux, déplace donc $83333 \frac{1}{3}$ pieds cubes d'eau de mer.

2.° Un capitaine a commandé un navire pendant trois campagnes; à chaque voyage, quoique ſa dépenſe montat à 300 livres, l'argent qu'il pouvoit avoir, augmentoit d'un tiers, & ſa fortune s'eſt trouvée doublée, après les trois campagnes; on demande quel devoit être ſon bien avant le premier armement. Repréſentons ce bien par x, & 300 livres par b; alors $x-b$ exprime ce qui reſtoit à ce capitaine, après une dépenſe de 300 livres pendant ſa premiere campagne; mais comme il gagnoit le tiers de cette ſomme $x-b$, ſon bien à la fin de la premiere campagne étoit repréſenté par $x-b+\frac{x-b}{3}$ ou par $\frac{4x-4b}{3}$. A la fin de la ſeconde campagne, ſon bien, en ayant égard ſeulement à ſa dépenſe, étoit $\frac{4x-4b}{3}-b$, ou $\frac{4x-7b}{3}$; mais en y ajoutant le gain de cette campagne, & qui étoit le tiers de ce même bien qui lui reſtoit, on doit exprimer tout l'argent qu'il poſſédoit après la deuxieme campagne, par $\frac{4x-7b}{3}+\frac{4x-7b}{9}$ ou par $\frac{16x-28b}{9}$. A la fin de la 3.e campagne, s'il n'avoit rien gagné, ſa dépense b auroit réduit ſon bien à $\frac{16x-28b}{9}-b$ ou à $\frac{16x-37b}{9}$, mais ſon gain a été $\frac{16x-37b}{27}$ par conſéquent, à cette époque, ſa fortune totale devoit être repréſentée par $\frac{16x-37b}{9}+\frac{16x-37b}{27}$. Elle devoit d'ailleurs, ſuivant la queſtion propoſée, être égale au double de ce qu'il avoit avant le premier armement; ainſi on peut faire cette équation $2x = \frac{16x-37b}{9} + \frac{16x-37b}{27}$; parce que ces deux membres étant l'un & l'autre l'expreſſion de la fortune totale du capitaine, ſont néceſſairement égaux. Dans cette équation, on doit chercher la valeur de x, parce

que c'eſt la quantité démandée par la queſtion. C'eſt pourquoi il faut, en appliquant les regles des équations, transformer cette équation en une autre, dont l'un des membres, ne contienne que x, tandis que l'autre membre ne ſera compoſé que de quantités connues. Dans cette vue, il faut faire diſparoître le dénominateur 27, qui ne diviſant pas le premier terme du ſecond membre, doit en devenir un facteur, ainſi que du premier membre. On doit donc avoir $54x = 48x - 111b + 16x - 37b = 64x - 148b$. Les dénominateurs de la premiere équation étant ainſi diſparus, réuniſſons dans un même membre, les termes ou ſe trouve x; on a l'équation, $148b = 10x$: & dégageant x, du facteur 10 qui le multiplie, on arrive à cette équation finale $x = \frac{148b}{10}$. Elle donne une expreſſion ſimple de la valeur de x, dans laquelle il ſuffit de ſubſtituer 300 l à la place de b, pour connoître qu'elle eſt égale à 4440 l, c'eſt-à-dire que la fortune du capitaine ſuppoſé étoit de 4440 l avant ſes trois campagnes.

67. Après avoir démontré, & les principes & les regles & les uſages de l'arithmétique; après avoir fait une digreſſion utile, ſur l'algebre ou ſur un moyen général de former toutes les combinaiſons des quantités, il faut nous appuyer ſur ces connoiſances premieres & fondamentales, pour nous élever à de plus hautes conſidérations, dont l'application n'eſt pas moins néceſſaire à la marine. Les nouveaux ſujets que nous devons traiter, ſont les puiſſances des nombres, leurs rapports, ainſi que les propriétés des proportions & des progreſſions. Les puiſſances des nombres qui ſont des produits de ces nombres par eux mêmes, ſont fréquemment employées dans la comparaiſon des quantités ſemblables; car nous verrons ailleurs, que, ſi les voiles de deux vaiſſeaux ſont ſemblables, leurs ſurfaces ſont entre elles comme les ſecondes puiſſances de leurs dimenſions, ou comme les produits de ces dimenſions multipliées par elles-mêmes; que les ſolidités des boulets, des ancres, des mâts, des cordages, des vaiſſeaux &c, comparées ſé-

parément, ſoit dans le cas de ſimilitude, comme les troiſiemes puiſſances de leurs dimenſions. On verra auſſi que les troiſiemes puiſſances des largeurs de la flotaiſon d'un bâtiment, entrent dans le calcul de la ſtabilité; que la réſiſtance oppoſée par l'eau au mouvement d'un vaiſſeau, dépend du quarré ou de la deuxieme puiſſance de la viteſſe &c. ainſi, après ces indications nombreuſes, & qu'il ſeroit poſſible de multiplier encore davantage, il ne doit pas paroître douteux que la connoiſſance des puiſſances des nombres, ainſi que des moyens qu'il faut employer ou pour les former, ou pour les décompoſer, ne ſoient très-nécéſſaires à l'homme de mer. Celles des rapports, des proportions, & des progreſſions des nombres, ſont encore d'une utilité plus générale, puiſque dans la marine, comme dans la ſociété, nous ne jugeons de tous les objets, que par comparaiſon.

Conſéquemment à toutes ces conſidérations, & à ces vues d'utilité, les ſujets annoncés précédemment, doivent donc faire partie de la ſcience de l'homme de mer: & on en ſera ſur-tout convaincu, lorſque nous ſerons parvenus aux parties de cette ouvrage, où il ſera permis d'indiquer les différens cas auxquels l'application de ces connoiſſances, devient eſſentielle & intéreſſante.

68. *Puiſſances des nombres.* Le produit d'un nombre multiplié par lui-même, eſt nommé la deuxieme puiſſance de ce nombre, ou ſon quarré; & ce quarré étant multiplié par le premier nombre, le produit qui en réſulte, reçoit le nom de troiſieme puiſſance de ce nombre, ou de ſon cube. On voit donc qu'un nombre quelconque eſt deux fois facteur dans ſa ſeconde puiſſance, trois fois facteur dans ſa troiſieme puiſſance & ainſi de ſuite; de ſorte que dans ſa centieme puiſſance, il ſeroit cent fois facteur. On voit auſſi que la premiere puiſſance d'un nombre n'eſt autre choſe que ce nombre lui-même.

Les regles qu'il faut ſuivre, pour élever un nombre à une puiſſance quelconque, ſont donc abſolument les mêmes que celles, déjà détaillées, de la multipli-

cation: ainſi veut-on connoître, par exemple, les diverses puiſſances du nombre 3. La premiere eſt 3; la deuxieme eſt le produit de 3 par 3, ou 9; la troiſieme eſt 3.3.3, ou 27; la quatrieme eſt 3.3.3.3, ou 81, &c. On pourroit auſſi, comme en algebre, employer des expoſans (58) pour indiquer ces mêmes puiſſances, & les repréſenter par $3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5$, &c. ſi la quantité qu'il faut élever à de telles puiſſances, étoit déſignée par un ſigne général, tel que b, ſes puiſſances ſeroient exprimées par b, b^2, b^3, b^4, b^5, &c. comme, entre les différentes puiſſances des nombres, il n'y a que la deuxieme & la troiſieme dont la connoiſſance ſoit d'un intérêt preſſant pour un homme de mer; nous nous bornerons à en déveloper, ſoit la compoſition, ſoit la décompoſition. Nous allons donc commencer par traiter des quarrés des nombres, enſuite de leurs cubes, & enfin des racines de ces puiſſances, ou des moyens de reconnoître, ſoit dans un quarré, ſoit dans un cube, le nombre qui a dû ſervir à former. l'un ou l'autre

69. La deuxieme puiſſance d'un nombre, ou ſon quarré eſt, en général, le produit de ce nombre multiplié par lui-même; & un tel produit préſente des caracteres diſtinctifs, qui méritent d'être remarqués. Un nombre peut être compoſé, ou d'un chiffre, ou de pluſieurs. Dans le premier cas, ſon quarré ne doit pas renfermer des centaines, puiſque le quarré de 9, qui eſt le plus grand chiffre, n'eſt que 81; mais dans le deuxieme cas, c'eſt-à-dire, ſi pour écrire un nombre, il faut employer deux ou pluſieurs chiffres, alors ſon quarré renferme pluſieurs produits partiels qu'il eſt nécéſſaire de faire connoître. Conſidérons, qu'un nombre quelconque, quoiqu'il contienne des unités, des dixaines, des centaines, des milles &c. peut cependant être regardé comme uniquement compoſé de dixaines & d'unités, en comprenant, dans le nombre de ſes dixaines, toutes celles qui ſont néceſſaires pour former ſes centaines, ſes milles &c; alors le quarré d'un tel nombre, enviſagé ſous ce dernier point de vue, renferme toujours, & le quarré des dixaines de ce nombre, & celui de ſes unités, &

le double produit des unités multipliées par les dixaines. En effet ſoit le nombre 37 à élever au quarré ou à multiplier par lui-même ; ſi on ſuit, dans tous ſes détails, la multiplication ci-jointe, qui donne le quarré demandé 1369, on doit reconnoître que les dixaines de 37 ainſi que ſes unités ſont chacunes multipliées par elles-mêmes, ou élevées ſéparément au quarré ; & que le produit des dixaines de ce nombre, multiplié par ſes unités, eſt répété ou pris deux fois.

```
 37      900
 37       49
----     420
259     ----
111     1369
----
1369
```

Ainſi le quarré 1369, renferme néceſſairement les trois produits partiels, qui ont été déſignés. On peut confirmer encore la préſence de ces mêmes produits dans 1369, en les formant chacun ſéparément, & en les réuniſſant enſemble ; voici ces détails eſſentiels. Le quarré des dixaines 3, du nombre 37, eſt 9 centaines ; parce que le produit, de dixaines répétées un nombre de dixaines de fois, eſt néceſſairement de la claſſe des centaines. Le quarré des unités eſt 49 unités ; le produit des unités 3 multipliées par les unités 7, eſt vingt-une dixaine, par une raiſon ſemblable à celle qui vient d'être préſentée ; & le double de ce produit eſt 42 dixaines ou 420 unités. Ces produits étant arrangés comme ils doivent l'être pour être ajoutés enſembles, compoſent ainſi une ſomme 1369, c'eſt-à-dire, qu'ils forment le quarré entier du nombre 37. Ces derniers détails ont été nommés eſſentiels & dignes de la plus grande attention, parce qu'ils doivent ſervir, comme on le verra bientôt, à diriger la recherche de la racine quarrée d'un nombre quelconque. On doit y remarquer que le quarré des dixaines qui eſt dans le nombre 1369, ne peut être contenu que dans les centaines de ce dernier, & que le double produit des dixaines de 27 multipliées par les unités, ne peut être renfermé que dans les dixaines de 1369, à cauſe de la nature de ces mêmes produits. Enfin on peut conclure de tout ce qui précéde, que ſi les dixaines, dont un nombre eſt compoſé, ſont aſſez nombreuſes pour former des centaines & même des milles, le quarrés de ces

centaines doit être renfermé dans la classe des dixaines de milles, & celui des milles dans la classe des millions.

70. Si on descend actuellement des nombres entiers aux nombres fractionnaires, le quarré de ces derniers est aussi, par le principe général, le résultat de la multiplication de ces nombres par eux-mêmes. C'est pourquoi on forme le quarré d'une fraction donnée, en élevant séparément au quarré, son numérateur & son dénominateur. On doit remarquer en particulier, que si un nombre est composé de décimales, son quarré doit avoir deux fois autant de décimales qu'il en a lui-même; soit parceque ce nombre est considéré comme une fraction ordinaire, & qu'alors son dénominateur a deux fois moins de zeros que son quarré; soit parceque le produit qui résulte de la multiplication des nombres décimaux, a toujours autant de chiffres décimaux, qu'on en compte dans tous les facteurs (35): ainsi le quarré de $\frac{2}{5}$ est $\frac{4}{25}$, & celui de 0, 4 est 0, 16.

Ajoutons ici qu'en algebre, si un nombre composé de dixaines & d'unités est représenté par $a+b$ (en supposant que ses dixaines soient a, & ses unités b); le produit d'une telle quantité multipliée par elle-même, doit être, après toute réduction faite, $= a^2+2ab+b^2$. dans un pareil produit, on apperçoit evidemment les trois produits partiels qui composent le quaré du nombre représenté; tandis que formés arithmétiquement tous ces produits se trouvent confondus; sans distinction, dans le quarré numérique. On peut même conclure de cette formule algébrique, un moyen simple d'élever au quarré un nombre composé d'unités & de fractions. En effet soit le nombre $3\frac{5}{7}$ à élever au quarré, on forme les trois produits partiels, déja indiqués, & en les ajoutant ensemble, ils font la somme suivante $9+4\frac{2}{7}+\frac{25}{49}$, ou $13\frac{39}{49}$.

71. Si un nombre est multiplié par son quarré, le produit qui en résulte, & où il est trois fois facteur, est son cube, ou sa troisieme puissance. Ce nombre est-il exprimé par un seul chiffre, son cube ne peut avoir plus de trois chiffres, puisque le cube

de 9, qui eſt le plus grand des chiffres, n'eſt que 729; mais eſt-il composé de dixaines & d'unités, ſon cube eſt formé de quatre produits partiels qui ſont, le cube de ſes dixaines, celui de ſes unités, & les triples produits, ſoit du quarré des dixaines multipliées par les unités, ſoit du quarré des unités multipliées par les dixaines. On peut ſe convaincre aiſément de la préſence de ces ſeuls produits dans le cube d'un nombre, en ſuivant la multiplication, des trois produits partiels qui compoſent ſon quarré, par les dixaines & les unités de ce même nombre: L'algebre rend ces produits plus ſenſibles: car $(a^2+2ab+b^2)$ qui eſt la formule du quarré, d'un nombre quelconque repréſenté par $a+b$, (en ſuppoſant ſes unités b & ſes dixaines a) étant multipliée par $a+b$, on trouve pour produit, ou pour le cube de $(a+b)$, la quantité $a^3 +3a^2b+3ab^2+b^3$. On voit ici tous les produits partiels qui ont été annoncés. *Ils* y ſont nettement ſeparés, & bien caractériſés; d'ailleurs, il eſt encore un autre moyen, mais indirect, qu'on peut employer pour s'aſſurer que de tels produits, concourent ſeuls à former le cube d'un nombre donné. Il conſiſte à prendre ſéparément ces produits, & à les ajouter enſemble pour comparer leur ſomme, au cube d'un nombre, formé ſuivant les regles ordinaires de la multiplication. Par exemple, nous avons vu, précédemment, que le quarré de 37 eſt 1369. Si on multiplie ce dernier par le premier, on trouve que le nombre 50653, eſt le cube de 37. Formons actuellement les produits partiels annoncés. 1° Le cube des trois dixaines de 37, eſt 27 milles, parce que le quarré de ces dixaines, qui eſt un nombre de centaines, étant répété des dixaines de fois, doit devenir un nombre de milles. 2° Le cube des unités 7, ne peut être qu'un nombre d'unités, & il eſt 343. 3° Le triple produit du quarré des dixaines 3, par les unités 7, doit être de la claſſe des centaines, & ce nombre eſt 189 centaines ou 18900 unités. 4°

1369	27000
37	343
———	18900
9583	4410
4107	———
———	50653
50653	

enfin, le triple produit du quarré des unités, multiplié par les dixaines, eſt de la claſſe des dixaines; & ce nombre eſt 441 dixaines, ou 4410 unités. Si on réunit enſuite ces divers produits, leur ſomme eſt 50653, ou un nombre exactement égal au cube de 37. Nous remarquons ici, comme nous l'avons fait à l'égard des parties du quarré d'un nombre, que les produits partiels qui entrent dans la compoſition du cube d'un nombre, n'ont été détaillés que pour mieux les faire connoître par leur quantité, & par l'eſpece de leurs unités; & ſurtout afin qu'ils puiſſent être rappellés, comme des guides eſſentiels dans les opérations, qui ont pour objet l'extraction des racines cubiques des nombres.

Nous ajouterons que pour élever une fraction ordinaire au cube; il faut cuber ſéparement, & ſon numérateur, & ſon dénominateur. Si des fractions ſont ſans dénominateur apparent, ou ſi elles ſont exprimées en décimales; on forme leur cube, en les multipliant deux fois de ſuite par elles-mêmes, comme ſi elles repréſentoient des unités entieres, ou ſans égard à leur virgule; & en ſéparant dans le produit, trois fois autant de chiffres décimaux, qu'on en compte dans les nombres propoſés. Cette derniere regle eſt fondée ſur ce qu'un nombre décimal, eſt trois fois facteur dans ſon cube; & que tout produit doit toujours avoir autant de chiffres décimaux, qu'il y en a dans tous ſes facteurs. C'eſt par cette raiſon que le cube de $\frac{2}{5}$ eſt $\frac{8}{125}$, & celui de 0, 4 eſt 0,064.

72. *Racines des nombres.* Un nombre, qui eſt élevé à une puiſſance quelconque, eſt la racine quelconque de cette puiſſance. Ainſi la racine quarrée, ou cubique d'un nombre propoſé, eſt un autre nombre plus petit, qui, multiplié par lui-même, ou une fois, ou deux fois de ſuite, donne un produit égal au nombre propoſé. La racine cubique de 64, par exemple, eſt 4, parceque le produit 4.4.4 eſt 64. Précédemment, nous n'avons cru devoir parler que de la deuxieme & de la troiſieme puiſſances des nombres ainſi il ne s'agira ici que de leurs racines, deuxieme &

troisieme: & pour proceder avec ordre, nous allons démontrer & détailler les regles qu'il faut suivre pour extraire la racine quarrée d'un nombre donné.

Des réflexions déjà présentées, ne permettent jamais de douter, à l'inspection d'un nombre proposé, si sa racine quarrée doit être composée d'un chiffre ou de plusieurs. Car ce nombre, est-il écrit avec moins de trois chiffres, sa racine ne peut en avoir qu'un seul; mais est-il formé par plus de deux chiffres, sa racine doit être composée de dixaines & d'unités. Dans tous ces cas, un nombre dont on propose d'extraire la racine quarrée, doit être considéré comme étant le quarré de la racine cherchée; & s'il est écrit avec plus de deux chiffres, il doit par conséquent être regardé comme renfermant le quarré des dixaines de sa racine, celui de ses unités, & le double produit des dixaines par les unités. C'est en connoissant ainsi la composition d'un nombre donné, qu'il devient facile d'en exécuter la décomposition complette, & par conséquent de découvrir sa racine. Nous n'appliquerons la démonstration de l'extraction de la racine quarrée, qu'à un nombre simple pour en faciliter l'intelligence, & pour l'étendre ensuite sans obscurité à l'extraction de la racine quarrée d'un nombre plus considérable. Soit par exemple, le nombre 625 dont on demande la racine quarrée; comme il est écrit avec trois chiffres, sa racine doit avoir des dixaines, & des unités; & ces deux parties, doivent être déterminées séparement pour être réunies ensuite, & former ensemble la racine de 625. Le quarré des dixaines de cette racine doit se trouver dans 625, & comme un tel produit est de la classe des centaines, on ne peut le chercher que dans le seul chiffre 6. Cette remarque conduit donc à la regle générale suivante savoir, que pour trouver les dixaines de la racine quarrée d'un nombre donné, on doit séparer les deux derniers chiffres qui sont sur la droite de ce nombre, comme ne pouvant faire partie du quarré de ses dixaines. Après cette séparation préalable,

6.25	25
22	

On extrait la racine quarrée, du plus grand quarré qui peut être contenu dans les chiffres placés à gauche des chiffres séparés; & on trouve ainsi les dixaines de la racine demandée. Par exemple, le plus grand quarré contenu dans 6, est 4: sa racine est 2; & ce chiffre 2 exprime les dixaines de cette racine de 625. Les dixaines de cette racine, étant ainsi trouvées, il faut chercher ses unités; en conséquence on retranche du nombre proposé le quarré des dixaines trouvées de la racine; & le reste de tout ce nombre, contient alors, le double produit des dixaines trouvées, par les unités, & le quarré des unités. Dans l'exemple présent, ce reste est 225; & le produit du double des dixaines de sa racine par les unités cherchées, doit se trouver dans les 22 dixaines restantes: ainsi ce produit ayant pour facteurs, le double des dixaines, & les unités; si on le divise par le premier, le quotient doit exprimer les unités de la racine cherchée. Delà il suit une troisieme regle générale, qui est de placer, à la droite du reste de la premiere tranche, le premier chiffre de la tranche suivante, & de diviser le nombre qu'ils expriment par le double des dixaines trouvées, pour connoître les unités de la racine. Ainsi, dans l'exemple proposé, on doit écrire deux à côté des deux dixaines restantes de la premiere tranche; & diviser 22 par le double des dixaines de la racine qui est 4. Le quotient est 5, & il est deux moyens de s'assurer qu'il exprime le nombre des unités de la racine. Le premier, est d'élever la racine entiere au quarré; de comparer ce produit au nombre proposé; & s'il lui est égal, ou peu inférieur, la racine trouvée est convenable. C'est ainsi que 625, qui est le quarré de 25 racine trouvée, annonce dans l'exemple proposé, que 25 est réellement & sans reste la racine quarrée de 625. Le second moyen, est de former le double produit des dixaines par les unités, & de l'ajouter au quarré des unités trouvées. Si cette somme est égale ou peu inférieure à la partie du nombre proposé, qui est restée après la soustraction du quarré des dixaines, la racine cherchée est bien déterminée. Ce reste dont nous venons de parler est dans l'exemple

présent 225 ; or le double produit des 2 dixaines de la racine multipliées par les unités présumées 5, est de 20 dixaines, ou de 200 unités ; & le quarré des unités est 25 ; par conséquent leur somme qui est aussi 225, devient une nouvelle preuve que le nombre 25 est la racine exacte de 625.

Le procédé qui vient d'être suivi pour parvenir à la racine d'un nombre, tel que 625 qui n'a pas plus de 4 chiffres, est aussi celui qui doit diriger l'extraction de la racine quarrée de tout nombre qui a plus de 4 chiffres. En effet soit un nombre tel que 208847 dont la racine quarré est demandée. En raisonnant comme précédemment, on doit le regarder comme le quarré de la racine cherchée, & par consequent comme contenant le quarré des dixaines de cette racine, (en tel nombre qu'elles puissent être), celui de ses unités, & le double produit des dixaines par les unités. Le quarré des dixaines est nécessairement & exclusivement remfermé dans les 2088 centaines du nombre proposé ; & comme dans 2088, il y a plus de deux chiffres, la racine de ce quarré doit avoir aussi plus d'un chiffre : c'est-à-dire que la racine totale du nombre proposé doit être composé de dixaines, de centaines, & d'unités ; ou que ses dixaines, sont un assemblage, de dixaines de dixaines, & d'unités de dixaines. D'après ces considérations, il faut donc regarder 2088 centaines, comme contenant, le quarré des des dixaines de dixaines de la racine totale, celui des dixaines, & le double produit des dixaines multipliées par les dixaines de dixaines. Il faut donc extraire la racine quarrée de 2088 comme on a extrait précédément celle de 625 : c'est-à-dire, qu'on doit commencer par partager le nombre proposé en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite, comme on le fait ici. Ensuite extrayant de 2088 la racine quarrée, on trouve, en se conformant aux regles précédentes, qu'elle est 45. Cette premiere racine doit être regardée comme exprimant le nombre des di-

20.88.47	456
634	

xaines qui ſont partie de la racine entiere du nombre 208847 : il ne reſte donc qu'a chercher les unités de cette racine. C'eſt à cet effet, qu'on ſouſtrait de 2088, le quarré des dixaines trouvées, qui eſt 2025, & qui eſt le plus grand quarré contenu dans 2088. Le reſte eſt 63 centaines, qui réunies à la tranche ſuivante, forment une ſomme 6347 où doivent ſe trouver, & le double produit des 45 dixaines multipliées par les unités & le quarré des unités de la racine. Ainſi, écrivant ſur la droite de 63 le chiffre des dixaines de la tranche 47, la quantité 634 dixaines, doit contenir le double produit des dixaines trouvées par les unités cherchées. On doit donc, comme précédemment, diviſer 634 par le double de 45, ou par 90, pour connoître les unités de la racine. Le quotient eſt 7 ; mais il n'eſt que préſumé, & pour vérifier ſi réellement les unités de la racine ſont au nombre de 7, il faut élever 457 au quarré, & le comparer au nombre propoſé. Ce quarré eſt 208849 : il eſt plus grand que 208847 ; ainſi le nombre 456 doit être la racine totale, du plus grand quarré contenu dans 208847 & elle eſt exprimée en unités entieres.

Telle eſt la maniere d'extraire la racine quarrée d'un nombre quelconque, lorſque cette racine ne doit être qu'un nombre d'unités ; & on voit par les deux exemples précédents, que l'extraction d'une telle racine, doit être faite ſuivant les mêmes regles, ſoit lorſque le nombre propoſé eſt un quarré parfait, comme 625 ; ſoit lorſqu'il eſt imparfait comme 208847. La ſeule différence eſt dans les réſultats & elle conſiſte en ce que le reſte n'eſt nul, que dans le cas ſeul où le nombre propoſé eſt un quarré parfait. Remarquons d'ailleurs, que dans tout autre cas, la grandeur de ce reſte ne peut jamais ſurpaſſer le double de la racine, parce qu'autrement le dernier chiffre trouvé de la même racine ſeroit trop petit d'une unité.

S'il importoit d'exprimer la racine quarrée d'un nombre propoſé qui n'eſt pas un quarré parfait, non ſeulement en unités entieres, mais auſſi en parties d'unités ; c'eſt-à-dire, s'il falloit approcher de ſa racine

cine réelle, à un dixieme, ou à un centieme, ou à un millieme près, alors on ne doit pas négliger la partie qui reste du nombre proposé, après la soustraction du quarré de cette partie de la racine qui est exprimée en unités entieres. On s'en sert pour trouver les fractions d'unité qui entrent dans la composition de la racine approchée. A cet effet, on ajoute à la suite du nombre proposé, ou deux zeros, ou 4, ou 6, suivant que la question exige que cette racine soit approchée, à un dixieme, ou à un centieme, ou à un millieme près. Cette regle est fondée sur ce qu'une racine étant composée de chiffres décimaux, son quarré doit en avoir deux fois davantage. Ainsi étant proposé un nombre, on ne peut en chercher une racine quarrée, qui soit exprimée en dixiemes, par exemple, à moins que le nombre lui-même ne soit un nombre de centiemes, & ainsi de suite; puisque la quantité proposée doit toujours être regardée comme le quarré de la racine, quelle qu'elle puisse être. Si on se propose donc de chercher la racine quarrée, du nombre précédent 208847, approchée à un centieme près, il faut écrire à sa suite quatre zeros, ou le multiplier par 10000, afin de le reduire en dix milliemes, parceque regardé comme le quarré d'un nombre de centiemes, il doit lui-même être un nombre de dix-milliemes. L'opération doit donc être preparée en écrivant 2088470000. Ensuite on extrait la racine quarrée de ce nombre, comme s'il étoit composé d'unités entieres, & par conséquent, en observant les regles déjà indiquées, on le partage en tranches de deux chiffres chacune, en commençant par la droite. On cherche la racine du plus grand quarré contenu dans 208847, & cette racine, déjà trouvée plus haut, est 456. On la considére comme exprimant les dixaines de la racine demandée; on continue l'opération en suivant toujours les mêmes regles; & on parvient à trouver le nombre 45699 pour la racine du plus grand quarré contenu

20.8847.00.00	45699
71399	

dans 2088470000 unités. Cette racine eſt approchée à une unité près, & comme elle eſt cent fois plus grande que la racine de 208847, celle-ci doit être 456,99. Elle eſt ainſi approchée à un centieme près de la vraie racine, d'autant plus que le reſte qui eſt 71399, n'eſt pas égal au double de la racine

Les regles qui viennent d'être ſuivies pour déterminer une racine exprimée en unités, & en parties d'unité, ſont auſſi celles auxquelles on doit ſe conformer pour extraire la racine quarrée d'une quantité décimale quelconque. Les mêmes principes démontrent, qu'avant une telle opération, il eſt néceſſaire de rendre pair, le nombre des chiffres décimaux de la quantité propoſée, par le moyen de zeros ajoutés à ſa ſuite; qu'après cette préparation eſſentielle, on doit extraire la racine, de cette quantité comme ſi elle repréſentoit des unités entieres; & enfin qu'il faut ſéparer par une virgule, dans cette racine, & ſur la droite, un nombre de chiffres, égal à la moitié des chiffres décimaux qu'on compte dans le nombre propoſé.

Quant aux fractions ordinaires qui ont un numérateur & un dénominateur, la méthode d'en extraire la racine quarrée, eſt inverſe de celle qui a été indiquée pour les élever au quarré. C'eſt pourquoi on doit extraire ſéparement, la racine quarrée de leur numérateur, & celle de leur dénominateur. On réduit d'ailleurs cette recherche à une ſeule opération, ſi on le juge commode, en transformant la fraction donnée en une autre, dont le dénominateur ſoit un quarré parfait; ou en multipliant ſes deux termes par le dénominateur. Alors, comme on connoît la racine du dénominateur de cette fraction transformée, il ne s'agit plus que d'extraire la racine quarrée du numérateur, & de la diviſer par celle du dénominateur, pour déterminer la racine cherchée de la fraction propoſée. C'eſt ainſi, qu'étant demandée la racine de $\frac{3}{5}$, il eſt plus commode de chercher celle de $\frac{15}{25}$ qui eſt égale à la premiere fraction, & dont le dénominateur à 5 pour racine.

Ensuite la racine de 15, approchée à un centieme près, est égale à 3,87; parconséquent la racine cherchée est 3,87 divisés par 5, ou 0,774. Si la fraction $\frac{3}{5}$ eut été réduite en décimales comme elle est égale à 0,6, sa racine approchée à un millieme près (en la cherchant comme celle de 600000 unités) auroit été trouvée égale à 0,774.

73. Telle est la méthode arithmétique, d'extraire la racine quarrée d'un nombre. En algebre, les regles suivies pour le même but, sont à peu près les mêmes. On sait que si a représente une quantité, son quarré est a^2, parce qu'étant multipliée par elle-même, on doit ajouter son exposant à lui-même, ou le multiplier par 2 qui est l'exposant de la puissance. D'où il suit, que pour revenir d'un quarré à sa racine, ou pour extraire la racine quarrée d'une quantité algébrique quelconque; il faut diviser par 2 l'exposant de la quantité proposée. C'est ainsi que la racine quarrée de a^3 est $a^{\frac{3}{2}}$ (on devroit écrire les deux signes plus & moins; parcequ'il est toujours incertain, si un quarré tel que a^2 par ex. résulte de $+a$ ou de $-a$ élevé au quarré), celle de a^2b^4 est ab^2, &c. Si une quantité est composée de deux parties qui soient représentées par $a+b$; son quarré, suivant les regles ordinaires, est $a^2+2ab+b^2$; c'est-à-dire, qu'il est formé de plusieurs termes. C'est pourquoi, propose-t-on d'extraire la racine quarrée d'une quantité algébrique représentée par plusieurs termes, cette racine doit être composée au moins de deux termes; & la quantité proposée qui doit être considérée comme le quarré de cette racine, contient nécessairement tous les produits partiels qui sont analogues à ceux de la formule générale $a^2+2ab+b^2$. L'opération de l'extraction de cette racine exige alors que les termes de la quantité donnée, soient arrangés dans un ordre déterminé. Il faut que le premier terme soit, comme dans la formule, un quarré parfait & positif; & que les autres termes soient ordonnés par rapport à une des lettres, qui est élevée au quarré dans le premier terme. Après ces préliminaires, on

extrait la racine par le même procédé qui a été employé pour déterminer celle des nombres. On extrait la racine quarrée du premier terme, & on efface ce terme de la quantité proposée; ensuite on divise le premier terme du reste, par le double de la racine trouvée; & le quotient est le deuxieme terme de la racine cherchée. On vérifie cette racine, en l'élevant au quarré & en la comparant à la quantité proposée. Enfin on continue l'opération, comme pour les nombres, jusqu'à ce que tous les termes de la racine ayent été déterminés. Par exemple, doit-on extraire la racine de $2ac-2ab+b^2+c^2-2bc+a^2$. On l'ordonne par rapport à une lettre telle que a & on écrit $a^2-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2$. On extrait la racine de a^2 qui est a, & on l'écrit à la racine. On divise le premier terme du reste qui est $-2ab$ par $2a$, & le quotient $-b$ qu'on écrit à la racine, devient un second terme de la racine cherchée. On éleve $a-b$ au quarré, & on rétranche de la quantité propoposée $a^2-2ab+b^2$. le reste est $2ac+c^2-2bc$. On continue l'opération, en divisant encore le premier terme de ce dernier reste, par le double de la racine trouvée ($a-b$) ou par $2a$ qui est le premier terme de cette racine doublée. Le quotient est c. On l'écrit à la racine. On éléve au quarré la racine entiere ($a-b+c$); & ce quarré étant parfaitement égal à la quantité proposée, la racine cherchée se trouve être réellement & sans reste $a-b+c$. C'est ainsi qu'on doit extraire la racine quarrée de toute quantité algébrique.

$a^2-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2$	$a-b+c$
$-2ab+2ac+b^2-2bc+c^2$	
$+2ac-2bc+c^2$	

Nous venons de voir comment on extrait une racine quarrée algébriquement, & il nous reste à faire l'application de cette méthode, aux équations du deuxieme degré, c'est-à-dire à celles dans lesquelles la la plus haute puissance de l'inconnue, est son quarré. Si on propose de déterminer la valeur de l'inconnue q, étant donnée l'équation $q^3 = b^2$ & la quantité b étant connue: il faut extraire également la racine quarrée de chacun des membres de cette équation; & cette

opération faite, on a $q = b\frac{1}{2}$; équation qui donne la quantité cherchée. Mais ſi on a l'équation, $q = n^2 + 2bn$, dans laquelle la valeur de n eſt ſeule inconnue & démandée, alors voici comment on la détermine, ou comment on réſout cette équation. On voit que le deuxieme membre (n^2+2bn), s'il étoit augmenté de b^2, ou s'il étoit $n^2+2bn+b^2$, exprimeroit un quarré parfait dont la racine eſt $n+b$. C'eſt pourquoi le 2.e membre de l'équation propoſée peut être rendu ſuſceptible d'avoir une racine quarrée exacte; & on y parvient, en lui ajoutant le quarré de b, ou le quarré de la moitié du coefficient de l'inconnue n. Mais comme l'égalité des deux membres de l'équation donnée, ne doit pas être changée, le premier membre doit être auſſi augmenté du même quarré de b. L'équation propoſée doit donc être changée en celle-ci $q+b^2 = n^2+2bn+b^2$ & comme les racines quarreés des deux membres de cette derniere équation, ſont néceſſairement égales, on a $(q+b^2)\frac{1}{2} = n+b$, ou $n = (q+b^2)\frac{1}{2} - b$. Ce procédé conduit par conſéquent à la connoiſſance de la valeur de l'inconnue n; & c'eſt celui qu'il faut ſuivre, pour réſoudre toute équation du deuxieme dégré; en obſervant toujours, 1.° que tous les termes, où ſe trouve l'inconnue, ſoient ſeuls placés dans un membre : 2.° que le terme qui renferme le quarré de l'inconnue, ſoit poſitif ou précédé du ſigne +, & dégagé de tout facteur ou diviſeur étranger.

Nous avons dit plus haut que la partie qui reſte d'un nombre, lors qu'on en a ſouſtrait le plus grand quarré qu'on préſume y être contenu, ne doit jamais ſurpaſſer le double de la racine trouvée. Cette vérité eſt aiſément rendue ſenſible par le ſecours de l'algebre. En effet ſoit a la racine préſumée d'un nombre donné ou du plus grand quarré qu'il contient. Si, ſur cette racine, on s'étoit trompé en moins, d'une ſeule unité, alors le plus grand quarré contenu dans le nombre donné, ſeroit donc celui de $a+1$, ou a^2+2a+1. C'eſt pourquoi en retranchant a^2 qui eſt le quarré de la racine trouvée du nombre propoſé, le reſte doit être égal à $2a+1$, ſi l'erreur commiſe ſur la racine, eſt d'une unité entiere. Par conſéquent, toutes les fois

reste, dont on vient de parler, ne surpasse pas 2a, ou le double de la racine présumée, cette racine est convenable.

74. La méthode d'extraire la racine cubique d'un nombre quelconque, est analogue à celle que nous venons de développer. Comme elle, elle est fondée sur la forme & la composition d'une puissance troisieme. Ainsi le nombre dont on propose d'extraire la racine cubique, doit toujours être regardé, dans l'opération, comme le cube de cette même racine. Ce nombre proposé est donc considéré, comme composé de quatre produits partiels; c'est-à-dire, du cube des dixaines de la racine; de celui de ses unités, & du triple produit, soit du quarré des dixaines multiplié par les unités, soit des dixaines par le quarré des unités; & si, n'étant pas un cube parfait, on en demande la racine cubique approchée à un dixieme ou à un centieme; il faut ajouter à la suite de ce nombre ou 3 ou six zeres; pour rendre le nombre de ces décimales, multiple de 3. Cette derniere regle est fondée, sur un principe déjà présenté précédemment; & nous ajouterons, que si la racine cubique d'un nombre doit être exprimée en dixiemes, par exemple, ce nombre qui est regardé comme le cube de cette racine, doit avoir trois fois plus de chiffres décimaux, ou être composé de milliemes. Si ce nombre est entier, il doit donc être reduit en milliemes, pour que sa racine soit approchée à un dixieme, & il le seroit en millioniemes, si sa racine devoit être approchée à un centieme.

Après ce qui a été dit sur la racine quarrée; & après avoir démontré l'analogie des méthodes employées pour extraire les racines quarrées & cubiques des nombres; il doit suffire, pour faire connoître les regles particulieres de l'extraction de la racine cubique d'un nombre quelconque, de donner un exemple détaillé de l'opération entiere. Soit proposé d'extraire du nombre 75 la racine cubique approchée à un centieme, sa racine doit donc être un nombre de centiemes; ainsi 75 doit être transformé en millioniemes, c'est-à-dire, qu'il s'agit d'extraire la racine cubique de

7500000 millioniemes; & comme elle doit être cent fois plus petite que celle de 7500000 unités, il faut extraire celle de ce dernier nombre, pour en conclure celle qui est cherchée. Il y a plus de trois chiffres dans 7500000; ainsi sa racine doit être composée, & d'un nombre de dixaines, & d'un nombre d'unités, qu'il faut chercher séparement.

75.000.000	422
110	
9120	

Considéré comme le cube de cette racine, le nombre proposé doit contenir les quatre produits partiels qui entrent dans la composition d'un cube. L'un de ces produits, qui est le cube des dixaines, est de la classe des milles; ainsi les 3 derniers chiffres de 75000000 ne peuvent en faire partie; par conséquent, on doit les séparer par un point, pour ne considérer que la partie de ce nombre, qui est placée sur la gauche, & qui est 75000. C'est en cherchant la racine cubique de 75000, séparement, qu'on détermine les dixaines de la racine demandée. Mais ce nombre a plus de trois chiffres, ainsi sa racine cubique particuliere renferme des dixaines & des unités qu'il faut chercher séparément. On doit donc distraire les trois derniers chiffres de 75000, parceque le cube des dixaines de la racine de ce nombre partiel, ne peut être contenu que dans 75; & c'est en suivant ces diverses dispositions raisonnées, qu'on peut en conclure pour regle générale, que tout nombre, dont la racine cubique est demandée, doit préalablement être partagé en tranches de trois chiffres chacune, (à commencer par la droite). Procédant ensuite à chercher la racine cubique du nombre partiel 75000, on trouve que le plus grand cube renfermé dans 75 est 64. Sa racine qui est 4, est le nombre des dixaines de la racine de 75000. On retranche le cube 64 de 75, & le reste est 11: de sorte que le reste de 75000 qui est 11000, renferme les trois autres produits partiels qui entrent dans le cube de la racine de 75000. Entre ces produits, il ne faut considérer que celui du triple quarré des dixaines trouvées, multiplié par les unités cherchées. Il est de la classe des

que le centaines, & les deux derniers chiffres du reste 11000, ne peuvent en faire partie. C'est pourquoi, on doit se contenter, pour déterminer les unités de la racine de 65000, de placer à la droite du reste 11 de la premiere tranche, le premier chiffre o de la tranche suivante, pour réunir ensemble les centaines du nombre 11000. Ce nombre 110 contient un produit qui a pour facteurs, & le triple du quarré des dixaines, & les unités. Ainsi on doit le diviser par le triple du quarré des dixaines, pour déterminer les unités cherchées. Le quotient est 2; par conséquent la racine cubique & particuliere de 75000 étant 42, ce dernier nombre exprime les dixaines de la racine totale de 75000000. Comme les unités de cette racine totale restent à chercher, il faut continuer l'opération de la même maniere. On doit donc élever 42 au cube & le soustraire de 75000. Ce cube est 74088, qui différe du précédent de 912, & qui est le plus grand cube contenu dans 75000. (Car le reste 912 ne surpasse pas le triple de la racine 42, multiplié par cette racine augmentée d'une unité. En effet ce dernier produit indiqué, est 3.42.43 ou 5418, nombre qui est bien supérieur à 912.) On écrit, à la suite du reste 912 des deux premieres tranches, le premier chiffre zero de la troisieme tranche, & on forme ainsi un nombre de 9120 centaines, qui contient particulierement le produit du triple quarré des dixaines trouvées 42, multiplié par les unités cherchées. On divise 9120 par le triple quarré de 42, le quotient qui est à peu-près 2, exprime le nombre des unités de la racine totale : par conséquent la racine cubique de 75000000 unités est 422, en ne la déterminant qu'à une unité près. La racine cherchée de 75, & approchée à un centieme, est donc 4,22. Telle est l'opération détaillée qu'il faut faire, pour parvenir à découvrir la racine cubique d'un nombre entier quelconque.

Il est aisé de conclure, de ce qui vient d'être démontré, que si on cherche la racine cubique d'un nombre de décimales, il faut, avant toute opération, rendre le nombre des chiffres décimaux, multiple de

3, par le moyen de zeros ajoutés à la ſuite du nombre donné; & enſuite on en extrait la racine cubique, comme s'il étoit un nombre entier, ſous la condition de ſéparer à la racine, & ſur ſa droite, un nombre de chiffres, qui ſoit le tiers de celui des chiffres décimaux, que preſente le nombre propoſé. S'il eſt queſtion de trouver la racine cubique d'une fraction ordinaire; on conçoit, par la formation du cube d'une fraction, qu'il faut extraire ſéparément la racine cubique, & du numérateur & du dénominateur. On abrége même cette opération, en transformant la fraction donnée, en une autre dont le dénominateur ſoit un cube parfait; ou en la multipliant par le quarré de ſon dénominateur: parce qu'alors on connoît la racine cubique du dénominateur de la fraction transformée, & il ne reſte qu'à extraire celle de ſon numérateur, pour obtenir la racine cubique de la fraction propoſée. Soit demandée celle de $\frac{3}{5}$, par exemple, il faut chercher la racine, de $\frac{75}{125}$ qui lui eſt égale. Le dénominateur 125, a 5 pour racine; & celle de 75 approchée à un centieme eſt 4, 22, comme on l'a vu précédemment. Ainſi la fraction $\frac{3}{5}$ a pour racine cubique 4,22 diviſés par 5, ou 0,844. Si on cherchoit à un millieme près, celle de la quantité décimale 0,6; ſuivant les regles données ci-deſſus, on la concluroit de la racine de 600000000 unités, & on trouveroit qu'elle eſt 0,844, ou qu'elle eſt égale à celle de $\frac{3}{5}$; comme cela doit être, puiſque $\frac{3}{5}$ & 0,6 ſont deux quantités parfaitement égales entr'elles.

75 Si une quantité eſt repréſentée algébriquement par a, ſon cube eſt a^3; car elle doit être trois fois facteur dans ſon cube: & comme pour former un produit de lettres ſemblables (58), il faut ajouter enſemble leur expoſans, le nombre 3 doit être l'expoſant de a élevé au cube. De là il ſuit en général, que pour extraire la racine cubique d'une quantité algébrique, il faut diviſer ſon expoſant par 3. C'eſt ainſi que la racine cubique de a^2 eſt $a^{\frac{2}{3}}$; & il n'y a pas ici, comme pour la racine quarrée, d'in-

certitude sur le signe, parceque le cube d'une quantité, est, comme elle, positif ou négatif.

On sait aussi que le cube, d'une quantité algébrique qui a plus d'un terme, & qui est réprésentée par $a+b$, est $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$; & c'est en remarquant cette composition du cube, qu'il devient aisé de fixer les regles de l'extraction de la racine cubique. En effet, une quantité algébrique, composée de plusieurs termes, étant proposée, & sa racine cubique étant démandée, il faut la comparer à la formule du cube de $a+b$, parce qu'elle doit être considérée comme le cube de sa racine. Ainsi elle doit être ordonnée de maniere que son premier terme soit un cube parfait, & que le rang des autres termes, soit déterminé, par rapport à une des lettres qui est élevée au cube dans le premier terme.

Après cet arrangement préalable, on extrait la racine cubique du premier terme, en divisant son exposant par 3, & on le retranche de la quantité donnée. Le reste ne contient plus alors que trois autres produits partiels, déjà indiqués par la formule; & en divisant le premier terme de ce reste, par le triple quarré de la racine trouvée, on détermine par le quotient, le second terme de la racine cherchée. On vérifie ensuite cette racine, en l'élevant au cube; & en comparant ce cube à la quantité proposée. On continue enfin la même opération jusqu'à ce que tous les termes de cette racine ayent été trouvés. Voici un exemple qui va completter les éclaircissemens qu'on peut desirer. Soit proposé d'extraire la racine cubique de $x^6-8b^3x^3-6bx^5+12b^2x^4$. On doit l'ordonner par rapport à la lettre x, & l'écrire dans l'ordre ci-joint. La quantité étant présentée sous cette forme, on extrait la racine cubique de x^6 en divisant l'exposant 6 par 3 & cette racine est x^2. Retranchant x^6 de la quantité proposée, on divise le premier terme du reste, c'est-à-dire $-6bx^5$ par le triple quarré de la racine trouvée,

$x^6-6bx^5+12b^2x^4-8b^3x^3$	x^2-2bx
$-6bx^5+12b^2x^4-8b^3x^3$	

ou par $3x^4$, & le quotient $-2bx$ devient le second terme de la racine. Enfin on éleve x^2-2bx au cube ; & comme ce cube eſt parfaitement égal à la quantité propoſée, la racine cubique de celle-ci eſt réellement & ſans reſte, x^2-2bx.

Nous avons dit en parlant des racines cubiques des nombres, que le reſte de l'extraction, ne doit jamais ſurpaſſer le triple produit de la racine trouvée, multipliée par cette racine même augmentée d'une unité; & ce principe devient d'une demonſtration facile, par le moyen de l'algebre. Car ſoit a la racine cubique préſumée d'un nombre donné, ou du plus grand cube qu'il peut contenir; ſi, ſur cette racine on avoit fait une erreur en moins, & d'une ſeule unité, alors le nombre propoſé devroit renfermer le cube de $(a+1)$ ou a^3+3a^2+3a+1. Le reſte ſeroit donc égal, ou ſupérieur à $3a^2+3a+1$; par conſéquent, ſi ce reſte ne ſurpaſſe pas $3a^2+3a$, ou $3a(a+1)$, la racine trouvée ne peut être en erreur d'une unité, & elle doit être regardée comme convenable, ou comme celle du plus grand cube contenu dans le nombre propoſé.

76. *Rapports & proportions des nombres.* Dans l'art de la marine, il eſt ſans doute des rapports de convenance, qui ſervent à déterminer, la grandeur des bâtimens, leur artillerie, leur forme, leur ſolidité & le nombre des hommes qui peuvent être néceſſaires pour les conduire à leur deſtination ; mais l'idée qu'on attache alors au mot de rapport n'embraſſe que des qualités qui rendent un vaiſſeau propre à remplir telles & telles vues, comme à faire telle campagne, à combatre en ligne, à réſiſter à des mers dures, à porter de grands poids, à avoir une marche rapide, à entreprendre diverſes pêches, divers genres de commerce, &c. Des tels rapports peu ſuſceptibles d'être ſoumis à un calcul précis, ne ſont pas ceux que l'arithmétique conſidére. Celle-ci n'apprend à comparer que des nombres; & comme on a vu que les nombres ont été imaginés pour exprimer de combien d'unités une quantité eſt compoſée ; toutes les quantités de même eſpece, ne deviennent comparables que par les nombres ſeuls

qui expriment leur grandeur. Ainſi dans un vaiſſeau, on compare, ou à ſa largeur principale, ou à la longueur de ſa quille, les dimenſions & des pieces de ſa charpente, & des mâts, & des vergues, & des voiles, & des cordages, & des ancres, & des cables, &c, en les eſtimant en pieds, ou en pouces, ou en lignes. Ainſi, dans le commerce avec l'étranger, on compare les meſures de France, avec celles qui ſont adoptées par les autres nations, & qui ſont connues ſous le nom de livres, de pieds, de braſſes, de tonneaux, de laſts, de lieues, de milles&c. Les réſultats de ces comparaiſons ne peuvent conſiſter que, dans la différence des quantités miſes en parallele, ou dans le nombre de fois qu'elles ſe contiennent : & de tels reſultats ſont, ce qu'on nomme les rapports, ou les raiſons de ces quantités. Il y a cette diſtinction, que le rapport qui exprime combien la grandeur d'une quantité ſurpaſſe celle d'une autre, eſt nommée arithmétique, tandiſque qu'on donne le nom de géométrique, à celui qui exprime combien de fois l'une contient l'autre. Conſéquemment à ces difinitions, on voit qu'en traitant de la ſouſtraction, & de la diviſion des quantités, nous avons donné toutes les regles qui peuvent être néceſſaires pour calculer ces différens rapports. Ainſi le nombre 12 étant comparé au nombre 4, leur rapport arithmétique, ou leur différence eſt 8; & leur rapport géométrique, ou le quotient de 12 diviſé par 4, eſt 3. De même le port d'un bâtiment étant de 250 tonneaux, & celui d'un autre bâtiment, de 750 tonneaux, leur rapport arithmétique eſt 500 tonneaux: & leur rapport géométrique eſt 3; c'eſt-à-dire, que la charge qui peut être tranſportée par le dernier, ſurpaſſe de 500 tonneaux, celle du premier, & ſe trouve être en même temps, trois fois plus grande qu'elle.

77. La différence de deux quantités, ne varie pas lorſque chacune eſt également augmentée ou diminuée; par conſéquent le rapport arithmétique de deux termes reſte conſtamment le même, quoique ces deux termes ſoient augmentés, ou diminués d'un même nombre. Le rapport arithmétique de 12 à 4 eſt 8, & il

reſte toujours 8, quoiqu'on ajoute, par exemple, le nombre 20 à l'un & à l'autre; car la différence de 32 à 24 eſt 8, ainſi que celle de 10 à 2.

Nous avons fait voir précédemment, (25) en parlant de la diviſion des nombres, qu'un dividende & ſon diviſeur, étant également multipliés, ou diviſés par un même nombre, le quotient qui eſt en réſulte, eſt conſtamment le même dans toutes ces combinaiſons. Par conſéquent le rapport géométrique de deux quantités, ne peut pas changer, lors qu'on multiplie, ou qu'on diviſe l'une & l'autre, par un même nombre. Les nombres 12 & 4, par exemple, étant diviſés chacun par 2, & multipliés l'un & l'autre par 10, conſervent entr'eux le même rapport géométrique, qui eſt 3. Car le nombre 2 eſt contenu, trois fois dans ſix, comme 40 dans 120, & comme 4 dans 12.

Un rapport géométrique qui conſiſte dans la diviſion d'une quantité par celle qui lui eſt comparée, peut auſſi être regardé comme une fraction dont la premiere quantité eſt le numérateur, & la ſeconde le dénominateur; & comme une fraction peut être le réſultat de la multiplication de deux, ou de pluſieurs fractions, un rapport géométrique peut auſſi être le réſultat de la multiplication de pluſieurs autres rapports géométriques. Dans ce cas, un tel rapport reçoit le nom de rapport composé. C'eſt ainſi que le rapport de 24 à 240, eſt composé de deux rapports qui ſont ceux de 4 à 12, & de 6 à 20. Car la fraction $\frac{24}{240}$, eſt le produit de la fraction $\frac{4}{12}$ multipliée par $\frac{6}{20}$. De même qu'on peut composer un rapport géométrique, on peut auſſi le décomposer en rapports partiels, & cette double opération eſt ſouvent utile pour conduire à la ſolution de certains problêmes.

78. Des rapports arithmétiques ou géométriques, qui ne ſont que des différences, ou des quotiens, ſont des nombres qui peuvent être comparés entr'eux comme d'autres quantités. Deux rapports peuvent donc être égaux, ou inégaux; & leur égalité eſt ſur-tout intéreſſante par ſes conſéquences. Dans ce cas, on peut toujours dire que le rapport de deux quantités eſt

le même que celui de deux autres quantités ; ou que de quatre quantités comparées deux à deux dans ces rapports, la premiere est à l'égard de la seconde, comme la troisieme, est à l'égard de la quatrieme. L'assemblage de quatre quantités qui sont rangées dans l'ordre indiqué, & qui sont comparées deux à deux, reçoit le nom de proportion. Quatre quantités sont donc en proportion, ou peuvent être mises en proportion, lorsque le rapport des deux premieres est égal à celui des deux dernieres. Comme nous avons défini deux especes de rapports, il y a aussi deux especes de proportions ; & une proportion est arithmétique ou géométrique, selon que les rapports dont elle est composée, sont arithmétiques, ou géométriques.

Remarquons que, pour simplifier l'énoncé de toutes ces comparaisons, on est convenu de signes & de noms particuliers. S'il faut indiquer que le rapport de 12 à 4 est arithmétique, on écrit 12.4 ; c'est-à-dire, qu'un point sert à séparer les deux nombres comparés : & la séparation est faite par deux points, lorsque le rapport est géométrique, comme celui-ci 12:4. deux rapports égaux qui composent une proportion, sont aussi séparés l'un de l'autre ; mais c'est par deux points dans une proportion arithmétique, comme on le voit dans celle-ci, 16.9:25.18 ; & par 4 points, dans la proportion géométrique, comme dans la suivante 24:6::36:9. Les deux quantités qui sont comparées dans un même rapport, sont nommées les deux termes de ce rapport. La premiere est distinguée sous le nom d'antécédent, & la seconde sous celui de conséquent. Enfin dans une proportion, l'antécédent du premier rapport, & le conséquent du second, sont placés à ses extremités, & leur rang leur à fait donner le nom d'extrêmes ; comme le rang des deux termes intermédiaires (dont l'un est conséquent du premier rapport, & l'autre antécédent du second) les a fait distinguer sous le nom de termes moyens, ou de moyens.

79. Toute proportion arithmétique, a cette propriété particuliere, savoir : que la somme de ses deux termes extrê-

mes eſt égale à celle de ſes deux termes moyens. En effet dans une proportion quelconque donnée, imaginons qu'à chacun de ſes deux premiers termes, on ajoute le ſecond extrême ou le dernier conſéquent ; alors le premier terme devient la ſomme des deux extrêmes de la proportion donnée ; & comme le rapport primitif, n'eſt pas changé par cette opération ſuppoſée, le nouvel antécédent eſt égal à ſon conſéquent, augmenté de la raiſon qui regne dans la proportion, c'eſt-à-dire, au premier moyen de la proportion donnée, après qu'il a été augmenté, & du dernier conſéquent, & de la raiſon. Remarquons actuellement que la ſomme particuliere du dernier conſéquent & de la raiſon, eſt égale au ſecond antécédent ou au ſecond moyen ; par conſéquent enfin, la ſomme des deux extrêmes, eſt égale à celle des moyens, dans une proportion arithmétique quelconque.

Appliquons ces raiſons à un exemple pour les rendre plus ſenſibles. Soit la proportion 16.9:25.18 ; on peut dire ſans altérer l'égalité des rapports, 16+18. 9+18:25.18. Le premier terme de cette ſeconde proportion eſt la ſomme des extrêmes de la premiere, & il doit être égal, au ſecond terme (9+18) augmenté de la raiſon 7 qui eſt celle de la proportion (76) ; mais cette raiſon ajoutée au ſeul conſéquent 18, doit rendre celui-ci égal à ſon antécédent qui eſt le ſecond moyen ; par conſequent la ſomme du ſecond terme de cette ſeconde proportion & de la raiſon, n'eſt autre choſe que la ſomme des deux moyens de la premiere proportion donnée : donc la ſomme des extrêmes (16+18) doit être égale à (9+25) qui eſt la ſomme des moyens de la proportion donnée ; & cette égalité eſt confirmée par les réſultats de l'addition ſéparée, ſoit des deux extrêmes, ſoit des deux moyens ; car l'un & l'autre ſont 34.

Lorſque dans une proportion arithmétique, les deux termes moyens ſont les mêmes comme dans celle-ci 12.7:7.2 ; cette proportion reçoit le nom de continue ; & on énonce ſa propriété, qui eſt une ſuite

de la propriété de toute proportion, en disant que la somme de ses deux termes extrêmes, est égale au double d'un des termes moyens; parcequ'alors la somme de ses deux moyens, est le double d'un de ces moyens.

Si nous avons remarqué & démontré avec soin la propriété générale des proportions arithmétiques, c'est dans des vues d'utilité, & parce qu'elle présente une regle sure pour déterminer un des termes, d'une proportion arithmétique, dont les trois autres termes sont connus. En effet, le quatrieme terme d'une proportion est-il inconnu ; sa valeur est la différence du premier terme à la somme des moyens; parceque la somme des deux extrêmes de la proportion est égale à celle des deux moyens, & si de la premiere somme on retranchoit le premier exrême, le reste seroit le deuxieme extrême; par conséquent si de la somme des moyens, on soustrait l'extrême connu, la différence doit être égale à l'extrême cherché. Si le terme demandé étoit un moyen, on le détermineroit en soustrayant le moyen connu, de la somme des deux extrêmes. Ainsi cherche-t-on le troisieme terme x de la proportion suivante 16.9:x.18, on doit ajouter ensemble les extrêmes 18 & 16, & de la somme 34, retrancher le moyen 9; alors la différence 25 est le moyen cherché. Ces mêmes principes fournissent aussi une regle générale, pour trouver un moyen proportionnel arithmétique entre deux nombres donnés; c'est-à-dire pour compléter une proportion continue dont le terme moyen est inconnu. Il s'agit alors de prendre la moitié de la somme des deux nombres donnés, parcequ'ils doivent être les extrêmes, de la proportion proposée; & cette demi-somme est le moyen cherché, puisque le double de ce moyen doit être égal à la somme des extrêmes. Si, par exemple, on demande qu'elle est le terme moyen arithmétique qu'on peut placer entre deux nombres donnés 8 & 24, pour composer une proportion continue; il faut ajouter 8 & 24 qui doiveut être les extrêmes de la proportion; & la moitié 16 de leur somme, est alors le moyen demandé, de sorte qu'on peut

peut faire cette proportion, continue 8.16:16.24: parce que le rapport de 8 à 16 est 8, tel que celui de 16 à 24.

L'usage de la propriété des proportions arithmétiques est extrémêment borné; cependant il est quelque cas où elle est utilement employée dans la marine. Par exemple: supposons que les tirans d'eau d'un vaisseau à flot, soient, de 20 pied 6 pouces à l'avant, de 22 pieds 3 pouces à l'arriere, & qu'on demande son tirant d'eau moyen, ou le tirant d'eau du vaisseau, mesuré au milieu de la longueur de sa quille. Ce tirant d'eau cherché, est un moyen proportionnel arithmétique, entre les deux tirans d'eau donnés; parcequ'il doit différer également de l'un & de l'autre On le détermine, comme on l'a dit précédemment, en ajoutant ensemble les deux tirans d'eau donnés, (qui doivent former les extrêmes de la proportion continue demandée,) & en prenant la moitié de leur somme. Ce moyen est ici 21 pieds 4 pouces 6 lignes, & tel doit être le tirant d'eau moyen du vaisseau, ou la profondeur à laquelle le milieu de la longueur de sa quille, est placé au dessous du niveau de l'eau. Dans l'art de la navigation, on cherche souvent quelle est la latitude, qui tient le milieu, entre la latitude du point de départ d'un vaisseau, & celle du point de son arrivée. Cette latitude moyenne, qu'on nomme aussi latitude du moyen parallele, est un moyen proportionnel arithmétique, entre les deux latitudes données; par consequent elle est égale à la moitié de de la somme de ces dernieres. Ainsi la régle générale à obser ver & observée pour trouver la latitude du moyen parallele, est de prendre la moitié de la somme des latitudes de départ & d'arrivée.

80. La propriété de toute proportion géométrique, est que le produit de ses deux termes extrêmes, est égal à celui de ses deux termes moyens. Car considérons une proportion géométrique quelconque, & imaginons que ses deux premiers termes, dont l'un est un extrême, & l'autre un moyen, soient multipliés par le deuxieme extrême, ou le dernier con-

ſequent de la proportion donnée; alors le premier terme devient le produit des extrêmes de la premiere proportion: & comme le rapport primitif n'eſt pas changé, ce nouvel antécédent, eſt égal à ſon conſéquent multiplié par la raiſon de la proportion, c'eſt-à-dire, au premier moyen donné, multiplié par le deuxieme conſéquent, & multiplié encore par la raiſon. Comme le produit particulier du deuxieme conſéquent multiplié par la raiſon, eſt égal au 2.e antécédent ou au ſecond moyen; il s'enſuit que le produit du premier moyen multiplié non ſeulement par le deuxieme conſéquent, mais auſſi par la raiſon, doit être égal au produit des deux moyens; par conſéquent auſſi le nouvel antécédent, ou le produit des deux termes extrêmes de la proporion donnée, eſt égal au produit de ſes deux termes moyens. Par exemple: ſoit la proportion géométrique 36 : 12 : : 24 : 8. Elle peut être transformée en celle-ci (36.8) : (12.8) :: 24 : 8 où l'on voit que le prodnit 36.8 eſt celui des deux extrêmes de la premiere proportion. On ſait auſſi que l'antécédent 36 8 eſt égal au conſéquent 12.8.3 & que 8.3 eſt un produit égal au deuxieme moyen 24: par conſéquent le produit de 36, multiplié par 8, doit être égal à celui de 12 multiplié par 24. En effet le produit des moyens de la proportion ſuppoſée, eſt 288, ainſi que celui de ſes extrêmes.

Si dans une proportion géométrique, les deux moyens ſont égaux entre eux, comme dans celle-ci 36 : 12 :: 12 : 4; la même propriété qui vient d'être démontrée doit avoir encore lieu: mais à cauſe des circonſtances, elle eſt énoncée différemment, & on dit, que dans de telles proportions nommées continues, le produit des extrêmes eſt égal au quarré d'un des termes moyens; parce qu'effectivément le produit des moyens, eſt dans ce cas, celui d'un terme moyen multiplié par lui-meme, où ſon quarré. Ainſi dans l'exemple indiqué, le produit de 36 mutiplié par 4, doit être égal au quarré de 12, & l'opération juſtifie cette égalité.

81. Il résulte, de cette propriété des proportions géométriques, des conséquences dont l'application est aussi fréquente qu'elle est utile. En effet, on peut en conclure une regle propre à faire connoître un des termes, d'une proportion géométrique, dont les trois autres sont donnés. Cette regle est, qu'un terme, s'il est un extrême, est toujours égal au quotient de la division du produit des moyens par l'extrême connu ; ou s'il est un moyen, qu'il est égal au quotient de la division du produit des extrêmes par le moyen donné. Cette regle est fondée sur ce que le produit des extrêmes, étant égal à celui des moyens, on peut au besoin, considérer le produit des extrêmes, comme étant celui des moyens ou réciproquement. Comme le quotient du produit de deux facteurs, qui est divisé par un de ses facteurs, est toujours égal à l'autre facteur; il s'en suit que, si l'un quelconque, du produit des extrêmes d'une proportion, ou de celui des moyens, est divisé par un des extrêmes, le quotient doit être l'autre extrême; & que si le diviseur est un terme moyen, le quotient doit être l'autre moyen. Dans une proportion continue, le produit des extrêmes est égal au quarré d'un des termes moyens. Ainsi on doit conclure de ce principe que, pour déterminer un terme moyen géométrique, entre deux nombres donnés, il faut extraire la racine quarrée du produit des deux nombres. Car ce terme cherché est celui qui doit former chaque moyen d'une proportion continue, dont les nombres donnés sont les deux extrêmes; & comme le produit de ces derniers, est égal au quarré du terme moyen, celui-ci doit être la racine quarrée du produit des deux nombres donnés.

82. Dans une proportion géométrique quelconque, l'ordre des termes peut être changé de plusieurs manieres, sans qu'ils cessent de former une proportion, pourvu qu'une certaine condition soit observée. Cette condition est qu'il y ait toujours égalité entre le produit des extrêmes & celui des moyens. Ainsi dans une proportion donnée, les

extrêmes peuvent être mis à la place des moyens & réciproquement. Les extrêmes peuvent être mis l'un à la place de l'autre; & les mêmes changemens peuvent être faits dans le lieu des moyens; parceque dans tous ces cas, le produit des extrêmes reste nécessairement égal à celui des moyens. On peut dire aussi, que si deux produits quelconques sont egaux, leurs facteurs peuvent composer une proportion géométrique, parcequ'on peut regarder les facteurs de l'un de ces produits, comme les extrêmes d'une proportion, dont les moyens sont les facteurs du second produit. Par exemple: on sait que le produit 12.4 est égal à celui-ci 6.4.2. alors en regardant le premier produit comme celui des extrêmes d'une proportion, on peut dire 12:6::4.2:4 ou 12:6::8:4. l'ordre & la grandeur de ces quatre termes, sont tels que le produit des extrêmes est égal au produit des moyens; par conséquent ces quatre termes forment une proportion géométrique, & le rapport des deux premiers termes doit être égal à celui des deux derniers. Effectivement chacun de ces rapports est 2.

Etant donnés quatre termes quelconques en proportion géométrique, on peut, en conclure deux proportions différentes. On peut dire, la somme des deux premiers termes, est au second; comme la somme des deux derniers est au dernier: ou la différence des deux premiers termes, est au deuxieme: comme celle des deux derniers, est au quatrieme. En effet, par un tel arrangement, chaque antécédent est augmenté ou diminué de son conséquent; c'est pourquoi le rapport qu'il avoit avec lui est augmenté ou diminué d'une unité, puisqu'il le contient alors une fois de plus ou de moins: mais avant ce changement, chaque antécédent contenoit son conséquent le même nombre de fois, puisqu'il y avoit proportion, par conséquent l'égalité subsiste encore entre ces nouveaux rapports, après l'opération indiquée: & leurs termes, doivent former les proportions qui ont été énoncées. Ainsi étant donnée la proportion 36:9::

24:6 on peut en conclure les deux proportions ſuivantes 45:9::30:6 & 27:9::18:6.

Si deux proportions géométriques ſont multipliées ou diviſées l'une par l'autre, c'eſt-à-dire antécédent par antécédent, & conſéquent par conſéquent; les produits ou les quotiens qui en réſultent, ſont auſſi des termes en proportion. Car, en faiſant une telle opération, on multiplie ou on diviſe les deux rapports égaux d'une proportion, par deux quantités égales, qui ſont les rapports d'une deuxieme proportion : par conſéquent les produits ou les quotiens réſultans, doivent être conſtamment égaux, quoiqu'ils ceſſent d'être les mêmes : & les termes de ces rapports composés, ou décomposés, forment néceſſairement une proportion. Soit propoſé de multiplier par ordre les termes des deux proportions ſuivantes $\left\{\begin{matrix} 6:2::15:5 \\ 24:3::32:4 \end{matrix}\right\}$ les quatre produits ſont 144, 6, 480, 20; & ils forment une proportion 144:6::480:20; parce que le rapport des deux premiers termes eſt 24, tel que celui des deux derniers. Ce rapport eſt composé des rapports particuliers 3, & 8 des proportions données. Si de cette propoſition générale, on deſcend au cas particulier de la multiplication d'une proportion par elle-même; on doit en conclure que quatre termes, étant en proportion géométrique, leurs quarrés doivent auſſi être en proportion. On démontreroit de la même maniere que leurs cubes & leurs puiſſances plus élevées, doivent auſſi être en proportion. Enfin il faut encore en conclure que les racines de ces mêmes puiſſances doivent être proportionnelles: ou que les racines quelconques, de quatre termes en proportion, doivent elles-mêmes être en proportion.

83. Les applications des propriétés des proportions arithmétiques, ainſi que celles des propriétés des proportions géométriques ſont fréquentes & nombreuſes. Il eſt très-aiſé de s'en convaincre généralement, en conſidérant que les objets les plus ordinaires de nos idées, ſe préſentent toujours à notre eſprit, avec des rapports plus ou moins composés;

& que parmi ces rapports, ceux qui ſont égaux ſont les élémens d'autant de proportions. Dans la pratique de l'art de la marine, il eſt une foule de cas où l'uſage des propriétés des proportions géométriques devient utile & nécéſſaire; & ſans les parcourir dans leurs variétés, je vais donner des exemples qui, par leur enſemble, pourront fournir aſſez de modeles à ſuivre, dans la réſolution des problêmes ordinaires, ou dans l'application de la régle, par laquelle on détermine un terme quelconque d'une proportion géométrique, dont les trois autres termes ſont connus.

Problême premier. Un vaiſſeau à fait 13 lieues en 5 heures, & on demande, combien il doit en faire dans 24 heures, en ſuppoſant ſon mouvement uniforme & conſtant.

La régularité de la marche de ce vaiſſeau, porte à conclure que dans un intervalle de temps, double ou triple, il doit franchir un eſpace deux ou trois fois plus grand. Ainſi le rapport des intervalles de temps eſt égal à celui des eſpaces parcourus ou à parcourir. C'eſt pourquoi on peut faire cette proportion $5:24::13^{l}:x$ (je nommerai toujours x, la quantité cherchée.) On pourroit dire auſſi, $24:5::x:13$, & en appliquant la régle annoncée, on trouve que la valeur de x qui eſt le quotient, du produit de 13 lieues multiplié par 24, diviſé par 5, eſt de $62\frac{2}{5}$ lieues. Le vaiſſeau d'après ſa marche, ſuppoſée uniforme pendant 5 heures de temps, doit donc faire $62\frac{2}{5}$ lieues en 24 heures.

2.e On ſait que l'entretien de l'équipage d'un bâtiment, doit coûter 1561 l. par ſemaine, ou pendant ſept jours; & il eſt queſtion de ſavoir à quel prix doit monter cette dépenſe, pendant la durée d'une campagne, qu'on ſuppoſe de 9 mois, ou de 270 jours.

Cette queſtion doit être réſolue comme la précédente, parceque la dépenſe journaliere de l'équipage d'un vaiſſeau peut être ſuppoſée réguliere, & que dans de l'eſpace 8 jours, par exemple, elle eſt deux fois plus grande que pendant 4 jours. Par conſéquent le rapport des nombres, de jours de dépenſes, eſt égal à celui

des valeurs de ces mêmes dépenses. Ainsi dans cette question, on doit chercher le terme inconnu, de la proportion suivante 7:270::1561:x; & on trouve que la dépense doit monter à 60210 liv.

3.e Une somme de 30000 doit être partagée entre tous les hommes de l'équipage d'un vaisseau; & on demande ce qui doit revenir à un matelot, à qui on a assuré deux parts, en supposant qu'il y ait 300 parts égales à distribuer.

La somme de 30000 l. est supposée divisée en 300 parties égales, & tout homme qui reclame avec justice un plus grand nombre de parts, doit obtenir une plus grande portion proportionnelle de la somme à partager. C'est pourquoi celui qui doit avoir dix parts par exemple, recevra une somme deux fois plus grande que celui qui n'a droit de prétendre qu'a 5 parts. On doit donc trouver la somme qui revient au matelot qui demande deux parts, en faisant la proportion 300:2::30000:x; & cette quantité x qui est de 200 liv. est la somme, que ce matelot doit recevoir dans le partage supposé.

4.e On veut faire assurer, sur un vaisseau, dont la campagne est déterminée, une somme de 155968 l.: & les assureurs exigent une prime de $4\frac{1}{2}$ pour cent; on demande quel est le prix total de l'assurance de la somme proposée.

Les conditions sont par conséquent, que chaque centaine de liv., doit payer, pour être assurée, $4^l 10^s$ de prime; & comme la somme proposée doit payer une prime proportionnelle, à celle qui est demandée pour 100 l. on peut faire la proportion suivante $100^l:4^l 10^s::155968:x$. La prime cherchée qui est désignée par x est de $7018^l 11^s 2,^d 4$.

5.e Certaines marchandises ont été vendues pour la somme de 4567l, payable à six mois; & avec la condition que le vendeur escompteroit à raison d'un intérêt annuel de six pour cent, si l'acheteur payoit avant l'échéance des six mois: on demande avec quelle somme l'acheteur peut s'acquitter, s'il

veut payer, au moment de la livraiſon des marchandiſes.

On voit que la ſomme de 4567^l renferme, & la ſomme à payer au moment de la livraiſon, & l'intérêt de cette ſomme derniere, pendant ſix mois. Ainſi il s'agit de ſéparer ces deux parties, qui ſont confondues dans 4567^l. D'après les conditions énoncées, une ſomme de 100 livres, payable à la livraiſon, devoit produire au vendeur 103^l au bout de ſix mois: c'eſt pourquoi la ſomme 4567^l, doit être à la ſomme à payer, dans le rapport de 103 à 100. On peut donc faire la proportion $103:100::4567:x$: & ce quatrieme terme x, étant trouvé de $4434^l\ 10^s$; l'acheteur ne doit compter au moment de la livraiſon que cette derniere ſomme, pour payer les objets de ſes achats. Si le débiteur ne payoit qu'au bout de cinq mois, il lui reviendroit encor une remiſe ou un eſcompte proportionnel. A cette époque, chaque objet, qui eut été payé 100^l à la livraiſon, doit l'être par $102^l\ 10^s$ au bout de cinq mois, ainſi en faiſant cette proportion $102^l\ 10^s:100::4567:x$, le terme x eſt néceſſairement la ſomme qui eſt due à la fin des cinq mois, lorsque la ſomme à payer après ſix mois, eſt 4567^l.

6.e L'équipage d'un vaiſſeau qui eſt en mer, n'a plus que pour douze jours de vivres; cependant, ſuivant les conjectures les plus probables, il ne peut arriver à un port qu'après trente jours de route: & on demande quel changement on doit faire à la ration ordinaire, de maniere que les vivres qui reſtent, ſuffiſent pour tous le tems qu'on croit devoir paſſer au large.

Cette ration doit diminuer & devenir d'autant plus petite, à l'égard de la ration ordinaire, que le nombre des jours que le vaiſſeau doit reſter en mer, eſt plus grand que celui des jours de vivres. Par conſéquent ces rations comparées ſe contiennent, dans un ordre oppoſé à celui des intervalles de tems correſpondans. On doit donc dire que ces rations ſont entr'elles dans un rapport inverſe des nombres de jours indiqués. Ainſi la ration nouvelle ou diminuée, eſt à la ration ordinaire, comme

12 sont à 30; par conséquent, si la ration ordinaire est prise pour l'unité, & la ration nouvelle désignée par x, on doit faire la proportion $30:12::1:x$; & la ration diminuée, ne doit donc plus être, dans les circonstances supposées, que les $\frac{12}{30}$ ou les $\frac{2}{5}$ de la ration ordinaire. Chaque homme de l'équipage, ne peut donc plus reclamer que les $\frac{2}{5}$ des vivres qu'il recevoit avant cette époque. (On donne à cette régle de trois, le nom d'inverse, tandis que les précédentes sont nommées directes. Mais les noms sont superflus, par-tout où le raisonnement seul doit servir de guide.)

7.e On avoit accordé à un équipage composé de 125 hommes, une gratification d'une certaine somme; & la mort ou l'absence ont réduit le nombre des co-partageans, à 75 : on demande quelle est l'augmentation de la part de chacun de ces derniers.

Cette part est augmenteé d'autant plus, que le nombre des co-partageans a diminué davantage. Le rapport de la part primitive de chacun, à la part nouvelle des hommes présens, est donc inverse de celui des nombres des partageans : ainsi regardant comme précédemment, la part primitive comme l'unité, on peut dire $1:x::75:125$; c'est-à-dire en déterminant x, que la part de chacun des 75 hommes présens, est égale aux $\frac{125}{75}$ ou au $\frac{5}{3}$ de leur part primitive; cette part est donc augmentée des deux tiers.

8.e Un capitaine français, commandant un bâtiment, est obligé de relâcher en Angleterre; & il fait pour 200 livres sterlings de dépenses, qu'il ne peut payer qu'en lettres de change. On demande quel est le nombre de livres tournois que doit présenter sa traite sur son correspondant, ou sur son armateur français; en supposant que le change de l'Angleterre sur la France, soit alors de 25 deniers sterlings.

La question se réduit à convertir 200l sterlings en livres tournois; ou bien à chercher une somme de livres tournois, qui soit égale à celle de 200l sterlings. Un tel rapport d'égalité, qui doit regner entre ces

deux ſommes, ne peut ſuffire ſeul pour cette recherche; mais un 2.e rapport d'égalité eſt donné par le change ſuppoſé. Car il indique que l'Angleterre donne 25 deniers ſtrelings pour 3 liv. tournois; ainſi reduiſant en deniers 200 l. ſterlings, à raiſon de 240 pour une livre; on peut dire $48000:x::25:3$: & la quantité x qui vaut 5760l, eſt le montant cherché de la lettre de change, exprimé en livres tournois. Ce capitaine pour acquitter ſa dette, doit donc tirer ſur ſon armateur français, en faveur de ſon créancier anglais, une lettre de change de 5760 liv. Cette opération de change eſt ſimple, & directe, mais ſes réſutlats quoique juſtes ne ſont pas toujours ceux qui conviennent le mieux. Un capitaine, dans la poſition où nous venons de l'imaginer, & attentif à l'intérêt de ſes commettans, doit, avant de tirer directement ſur la France, examiner s'il ne feroit pas plus avantageux, de faire payer à l'Angleterre la ſomme qu'il lui doit, en tirant ſur un correſpondant étranger, à qui ſon correſpondant françois, feroit une remiſe déterminée par le change. Par exemple, ſuppoſons le change de Londres avec la France, de 25d; celui d'Amſterdam avec la France de 48d de gros; & celui d'Amſterdam avec Londres de 36. Comme Amſterdam donne à Londres 36d de gros pour 20d ſterlings, on détermine aiſément, par la proportion ſuivante, le nombre de deniers de gros qu'Amſterdam doit donner pour 200l ſterlings, $20:36::48000;x$. Ainſi ce quatrieme terme étant 86400 deniers de gros; c'eſt avec cette ſomme, que la Hollande acquitteroit la dette, que le capitaine français a contracté en Angleterre. Quant à la remiſe que le correſpondant français doit faire au payeur hollandois pour le rembourſer; elle eſt proportionnelle au change qui annonce que 3 liv. tournois peuvent payer en Hollande 48 deniers de gros; & par conſéquent on en trouve le montant par cette proportion $48:3::86400:x$. Ce dernier terme eſt 5400, c'eſt-à-dire que, par cette nouvelle opération de change; le capitaine ne feroit payer que 5400l à ſon armateur français, au lieu de 5760l qu'indiquoit la premiere opération.

9.e Un bâtiment a fait en mer des avaries grosses, qui sont évaluées à 3000l, & qui doivent être payées par trois personnes associés dans l'armement de ce bâtiment. Mais les intérêst de ces associés, ne sont pas les-mêmes : le premier a un intérêt de 300 louis, celui du deuxieme est de 700 louis, & celui du 3.e est de 500 louis ; & chacun devant contribuer au payement, du dommage estimé 3000l, en raison de son intérêt particulier ; on demande quelle est la part contributive de chaque associé.

La somme de 3000l, doit être partagée en trois parties, qui soient entr'elles comme les nombres 300, 700, & 500, ou comme 3, 7 & 5 : & il y a entre le dommage total & la somme des intérêts, le même rapport, qu'entre une portion de ce dommage & l'intérêt partiel qui doit l'acquitter. C'est pourquoi, on doit trouver la part contributive de chaque associé par une proportion. Par exemple, s'agit-il de déterminer la somme qui doit être payée par le premier associé, & qui est désignée par x : on doit dire $1500:3000::300:x$ & on trouve que x ou cette part, est 600l. Deux semblables proportions, en changeant les termes convenablement, conduiroient aussi à trouver que la part du 2.e associé est de 1400l, & celle du 3e. de 1000l : & ces trois parties, ont entr'elles les rapports qui ont été indiqués.

10.e Une somme de 10000l, doit être partagée entre trois personnes associées dans un commerce ; mais elle doit l'être de maniere, que la part du 2.e associé soit double de celle du premier ; & celle du 3.e, triple de la part du second. On demande quelle somme doit recevoir chacun de ces associés.

Cette question se réduit à celle de partager 10000l en trois parties, qui soient entr'elles comme les nombres 1, 2 & 6 ; & la somme de ces derniers nombres, étant 9, il y a entr'elle & la somme à partager, le même rapport, qu'entre l'un quelconque de ces nombres & la portion correspondante des 10000l. On doit donc trouver la somme à recevoir par le 1.er associé, en faisant la proportion suivante, $9:10000^l::1:x$

& cettepart x, qui eſt $1111^l\,2^s\,2^d\,\frac{2}{3}$, ſuffit pour déterminer la part de chacun des deux autres aſſociés; puiſque la part du deuxieme, eſt double de la ſomme trouvée, & la part du troiſieme eſt égale à ſix fois la même ſomme. L'une eſt donc de $2222^l\,4^s\,5^d\,\frac{1}{3}$, & l'autre $6666^l\,13^s\,4^d$.

Si le partage eut dû être fait, avec cette nouvelle condition, que le 2.e aſſocié recevroit 180^l au-deſſus du double de la part du premier aſſocié, & qu'il reviendroit au troiſieme aſſocié, non ſeulement le triple de la part du ſecond, mais encore 500^l de plus; le calcul auroit été plus long, ſans être plus difficile. En effet, la ſomme de 10000^l doit alors être conſidérée comme renfermant, & trois ſommes partielles qui ſont entr'elles, comme les nombres 1, 2 & 6; & trois autres ſommes particulieres qui ſont 180^l, 500^l, & trois fois 180. Ainſi, prélevant ſur 10000^l la valeur des trois dernieres qui eſt de 1220^l, il reſte 8780^l; & cette derniere ſomme eſt celle qui doit être partagée, comme précédemment en trois parties qui ſoient proportionnelles aux trois nombres 1, 2 & 6. Après ce partage, on ajoute à la deuxieme part 180^l, & 1040^l à la troiſieme, & on a les ſommes partielles que chaque aſſocié devroit recevoir ſuivant les conditions de la queſtion.

11.e Trois armateurs ont contribué, quoique inégalement, à l'armement d'un corſaire qui a fait une priſe dont le gain net eſt de 40000^l Le premier avoit fourni pour l'armement, 500 louis, & 20 mois avant la priſe. Le deuxieme a fourni 600 louis, dix huit mois avant la même époque : & une miſe de 400 louis a été fournie par le 3.e, 15 mois avant la priſe : on demande quel eſt le gain de chaque aſſocié.

La part que chaque aſſocié doit avoir au gain total, doit dépendre non ſeulement de ſa miſe particuliere, mais auſſi de l'intervalle de temps, pendant lequel elle a été employée dans la ſociété. Les parts des aſſociés doivent donc être entr'elles & en raiſon de la grandeur réelle de leurs miſes, & en raiſon du tems pendant lequel la ſociété en a joui; c'eſt-à-dire qu'elles

doivent être en raison composée, & du rapport des mises, & de celui des intervalles de tems. Si on compare les parts des deux premiers associés : comme le rapport de leur mises est de 500:600, & comme celui des deux tems est 20:18, on a, en les multipliant l'un par l'autre, leur rapport composé 500.20:600.18. Et par conséquent on doit faire la proportion ; la part du premier est à celle du second, comme 500.20:600.18: On trouveroit par le même procédé, que la part du 1.er est à celle du troisieme, comme 500.20:400.15. Ainsi on peut établir cette suite de rapports égaux, 1.re : 2.e : 3.e ::500.20:600.18:400.15. Dans cette suite, on peut dire ; la somme des trois premiers termes est au troisieme, comme la somme de trois derniers est au dernier (82) : c'est-à-dire 40000:x::26800:6000. Cette quantité x, est le gain qui revient au troisieme associé. Le gain partiel du deuxieme associé, est déterminé par une pareille proportion qui est ; 40000:x:: 26800:10800. Enfin le gain du premier est donné par cette proportion, 40000:x::26800:10000, qui peut être simplifiée, & transformée en celle-ci, 400:268::x 10000. Le calcul du terme inconnu dans chacune de ces proportions est facile à faire & nous ne nous appesantirons pas sur de tels détails.

84. *Progressions des nombres.* Nous avons dit qu'une proportion est continue, lorsque les termes qui la composent sont tels, qu'on peut dire ; le 1.r est au 2.d comme le 2.d est à un 3.e terme. Si cette proportion étoit imaginée prolongée indéfiniment, ou si ce troisieme terme étoit moyen proportionnel entre le deuxieme & un quatrieme terme ; si celui-ci l'étoit entre le troisieme terme & un cinquieme, & ainsi successivement ; l'assemblage de tous ces termes, rangés dans l'ordre annoncé, seroit une progression. On peut donc dire en général qu'une progression est une suite de nombres particuliers, dont chacun a un même rapport avec celui qui le précéde dans l'ordre de cette suite ; & comme on distingue deux espéces de rapports ainsi que deux espéces de proportions, il y a aussi des progressions arithmétiques & des progressions

géométriques. Dans toute progression arithmetique, chaque terme différe, de celui qui le précéde, d'une même quantité; & dans toute progression géométrique, chaque terme contient celui qui le précéde, un même nombre de fois. Par exemple, les nombres suivans sont en progression arithmétique; 3.5.7.9.12.13 15 &c; & ceux-ci sont en progréssion géométrique; 2:6:18:54:162: &c. l'arrangement des termes, & les points qui les séparent, donnent une idée exacte de la forme & de l'ordre, qu'il faut observer, pour présenter & faire distinguer des progressions quelsque soient leur termes & leurs especes.

85. Toute progression arithmétique, a des propriétés particulieres. Si elle est croîssante, ou si ses termes augmentent en s'éloignant du premier; on peut dire qu'un terme quelconque est égal au premier augmenté de la raison répetée autant de fois qu'il y a de termes avant lui: (en nommant raison, la différence de chaque terme à celui qui le précéde immédiatement). En effet, d'après la nature du rapport, le deuxieme terme d'une progression arithmétique est égal au premier augmenté de la raison. Le troisieme terme est égal au deuxieme augmenté de la raison, ou au 1.^r augmenté de la raison répétée deux fois. De même le 4.e est égal au premier augmenté de la raison répetée trois fois. On trouveroit aussi que le centieme est égal au premier augmenté de la raison répetée 99 fois: par conséquent en général, un terme quelconque d'une progression arithmétique, est égal au premier augmenté de la raison répetée autant de fois qu'il y a de termes avant lui. Delà on conclut cette regle générale, qu'étant donnés, le premier terme & la raison d'une progression arithmétique, on détermine un de ces termes dont le rang est connu, en ajoutant le premier terme au produit de la raison multipliée, par le nombre des termes qui précédent celui qui est cherché. Par exemple, soit la progression 4.7.10 13. 16.19&c. dont le premier terme est 4 & la raison 3. si son dixieme terme est demandé, on le trouve en ajoutant 4 avec le produit de 3 multiplié par 9: & ce terme est 31. Si le premier terme d'une progression

n'étoit pas donné; & qu'on ne connut qu'un autre terme de cette progression, dont le rang seroit désigné; celui-ci serviroit également à trouver un terme quelconque de cette même progression, parce-qu'elle pourroit être regardée, comme ayant le terme connu, pour premier ou pour dernier terme, suivant l'exigence des cas. Soit donné par exemple le sixieme terme 19 de la progression précédente; & que le dixieme soit cherché: celui-ci doit être égal au sixieme augmenté de quatre fois la raison; en considérant le sixieme comme le premier terme d'une progression dont on cherche le cinquieme: & ce terme est alors 31, comme on l'a déterminé précédemment. Si généralement on désigne le premier terme par p la raison par r & le rang d'un terme x par n, on peut exprimer algébriquement cete propriété des progressions arithmétiques, en faisant cette équation $x = p + r(n-1)$. On voit ici bien clairement que des quatre quantités x, p, r, & n, trois étant données, il est aisé de déterminer la quatrieme, si elle est inconnue & cherchée.

Si le premier & le dernier terme d'une progression étoient connus, ainsi que le nombre des termes intermédiaires nommés moyens; on peut demander quels sont ces mêmes moyens: & un tel problême, est enoncé ordinairement en proposant d'inserer un certain nombre déterminé de moyens arithmétiques entre deux nombres donnés.

Il faut remarquer, pour résoudre ce problême, qu'on propose en d'autres mots, de faire une progression arithmétique qui ait, pour premier & pour dernier termes, les deux nombres donnés; & pour moyens, ou termes intermédiaires, d'autres nombres dont la grandeur est cherchée, & dont la quantité est connue. Comme on sait que chaque terme d'une progression est égal, à celui qui le précéde immédiatement, augmenté de la raison; il suffit par conséquent, pour déterminer successivement chacun des moyens demandés, de calculer la raison qui doit regner dans la suite de ces termes; parceque cette raison étant trouvée & ajoutée au plus petit des deux nombres donnés, la

somme doit être le premier moyen cherché; ensuite, celui-ci étant augmenté de la même raison, doit devenir le second moyen; & ainsi successivement.

La regle générale, pour déterminer la raison qui regne dans une progression arithmétique, dont on connoît les termes extrêmes, & le nombre des termes intermédiaires ou moyens, est de diviser la différence des deux termes extrêmes, par le nombre des moyens augmenté de l'unité. Le quotient est égal à la raison cherchée. Car le plus grand des nombres donnés, étant supposé le dernier terme de la progression proposée, doit être regardé comme une somme composée, & du premier terme donné, & de la raison répétée autant de fois qu'il doit y avoir de termes avant le dernier, ou autant de fois qu'il doit y avoir de moyens plus un. C'est pourquoi, si du dernier terme on retranche le premier, il ne doit rester que la raison répétée autant de fois qu'il doit y avoir de moyens plus un: & par conséquent, la raison est le quotient de la division de cette différence par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité. Par exemple, soit proposé d'insérer entre 4 & 19, quatre moyens arithmétiques: il faut trouver la raison, & par conséquent, diviser 15, par le nombre 5, qui est le nombre 4 des moyens demandés, augmenté de l'unité. La raison est donc 3. En l'ajoutant au premier terme 4, la somme 7 est le premier moyen. Augmentant ensuite celui-ci de la même raison 3, la somme 10 est le second moyen: & enfin observant la même regle successivement, on parvient à former la progression 4.7.10.13. 16.19, qui présente dans les quatre nombres 7,10,13, & 16, les quatre moyens arithmétiques qu'il falloit insérer entre 4 & 19.

S'il étoit nécessaire de déterminer la somme de tous les termes qui composent une progression arithmétique, il faudroit en connoître, & le premier, & le dernier, avec le nombre total des termes dont on cherche la somme. Ces derniers, & les principes déjà exposés, rendent cette somme facile à calculer, car elle est égale à la somme du 1.er & du dernier terme de la progression

progression, multipliée par la moitié du nombre de ses termes. En effet, soit supposée, pour fixer les idées & faciliter l'indication des termes comparés, une progression arithmétique composée de 20 termes. Si on considére, dans cette suite de termes, le rapport du premier au dixieme, on voit qu'il est égal à celui du onzieme au dernier, parceque la raison de la progression répétée neuf fois est la différence du 1.er terme au dixieme, comme elle est celle du onzieme au dernier. La somme des deux extrêmes de cete progression est donc égale à celle du dixieme & du onzieme terme. On prouveroit de même que la premiere somme est égale; & à celle du neuvieme terme & du douzieme; & à celle du huitieme & du trezieme: & ainsi de suite. (Si le nombre des termes eut été supposé impair, la même somme seroit démontrée être égale au double du terme moyen qui est également éloigné des deux extrêmes): par conséquent réunissant toutes ces sommes partielles, on doit en conclure que la somme de 20 termes en progression arithmétique, est égale à celle du premier & du dernier terme, multipliée par la moitié du nombre des termes. Ce raisonnement peut être étendu à une progression de termes, en nombre plus ou moins grand, & pair ou impair; & il conduiroit à cette regle générale que la somme de tous les termes d'une progression arithmétique est égale à celle du premier & du dernier terme, multipliée par la moitié du nombre des termes. C'est ainsi qu'étant donneé la progression 3.5.7.9.11.13.15.17; & la somme de ces termes étant démandée; il faut ajouter 3 & 17 dont la somme est 20, & multiplier celle-ci par 4 qui est la moitié du nombre des termes. Le produit 80 est donc la somme de tous les termes de cette progression & on trouveroit un résultat égal par l'addition effective des mêmes termes.

Voici quelques applications des propriétés des progressions arithmétiques.

1.° Si un vaisseau a fait deux lieues dans une premiere heure, & qu'ensuite sa marche ait été également accélérée d'un tiers de lieue par chaque

heure pendant un intervalle de temps de 6 h, on demande quel eſt le chemin qu'il a pu faire pendant ces ſix heures.

Les chemins partiels faits par ce vaiſſeau pendant chaque heure, peuvent être régardés comme autant de termes d'une progreſſion arithmétique dont le premier terme eſt 2, la raiſon $\frac{1}{3}$, & le nombre des termes 6. La ſomme de ces chemins, ou le chemin total du vaiſſeau, eſt donc celle des termes de la progreſſion indiquée; c'eſt-à-dire qu'elle eſt égale à celle des chemins qui ont été faits pendant la premiere & la derniere heure, multipliée par la moitié du nombre des termes de cette progreſſion. Le dernier terme n'eſt pas donné, mais il eſt facile à calculer, & il eſt égal au premier 2 augmenté de la raiſon $\frac{1}{3}$, répété cinq fois, on a 3 $\frac{2}{3}$ lieues. Ce terme ajouté au premier 2 donne une ſomme 5 $\frac{2}{3}$; & cette ſomme multipliée par 3 (la moitié du nombre des termes) devient un produit 17 qui annonce que pendant les ſix heures ſuppoſées, le vaiſſeau a dû faire 17 lieues.

2.° Un debiteur s'eſt engagé à acquitter 10000 liv. par des payemens égaux & annuels, de 200 liv; mais il ſe propoſe enſuite de payer, à l'époque de la premiere année, 30 l de plus que la ſomme promiſe; à l'époque de la troiſieme année, 30 liv. de plus que le ſecond payement; & d'augmenter ainſi ſucceſſivement chaque payement annuel. Il demande quelle ſera la ſomme totale qu'il aura payée après un intervalle de 20 ans.

Les payemens annuels que le débiteur ſe propoſe de faire, ſont autant de termes d'une progreſſion arithmétique, dont le premier eſt 200, la raiſon 30, & le nombre des termes 20. Comme on demande quelle doit être la ſomme acquittée après 20 payemens, il faut chercher le montant du vingtieme payement qui eſt de 770 liv., (parcequ'il eſt la ſomme de 200 & de 30 répété dix-neuf fois). Enſuite on doit l'ajouter avec le premier terme & la ſomme 970 l; étant multipliée, par 10 qui eſt la moitié du nombre des termes, le produit 9700 eſt la ſomme cherchée.

Sans doute il ſeroit important de connoître un moyen de déterminer à quelle époque la dette totale ſeroit

amortie par de tels payemens en progression; mais la simple arithmétique ne peut pas présenter des formules simples pour la solution d'une telle question, & l'algebre au contraire fournit des secours satisfaisans Soit s la somme des payemens ou des termes d'une progression arithmétique; soit p le premier de ces termes; r la raison; & n le nombre des termes. Dans la question que nous venons de supposer, la somme à payer est 10000 liv, & elle est égale à s. La différence des payemens annuels, ou la raison, est 30 l. & c'est la valeur de r. Enfin le premier payement est de 200 l., & c'est le premier terme p. Il ne s'agit que de trouver le nombre n des années après lesquelles la somme due sera entierement payée.

Le dernier payement est $=p+r(n-1)$, on doit l'ajouter au premier p, & on a l'équation $s=(2p+rn-r)\frac{n}{2}$. Si on exécute la multiplication & qu'on fasse disparoître le dénominateur 2, on a $2s=rn^2+n(2p-r)$ Supposons que $2p-r=2br$, & $2s=qr$, (q & b étant des indéterminées) l'équation se change en celle-ci $q=n^2+2bn$. Cette équation est nommée du second degré parceque l'inconnue n, y est élévée à la deuxieme puissance. Considérons actuellement (73) le deuxieme membre de cette équation. Il deviendra un quarré parfait en lui ajoutant le quarré de la quantité b. Mais comme l'égalité des deux membres de l'équation doit être conservée, cette raison exige que le quarré de b soit aussi ajouté au premier membre. Par conséquent on peut dire que $(q+b^2)=n^2+2bn+b^2$. Les racines quarrées des deux membres doivent être égales, et celle du 2.e membre est évidemment $(n+b)$; on a donc $n+b=(q+b^2)^{\frac{1}{2}}$; (parceque, pour extraire la racine de $(q+b^2)$ considérée comme une somme mise entre deux parentheses, il faut diviser son exposant 1, par 2 qui est celui de la racine.) Donc $n=(q+b^2)^{\frac{1}{2}}-b$. Si maintenant on substitue à la place de b & de q, leurs valeurs, & qu'on exécute toutes les opérations indiquées, le résultat sera que $n=20,39$; c'est-à-dire qu'après 20 ans 4 mois & 20 jours, la

dette entiere devroit être acquittée ; ce qui s'accorde avec ce qui a été trouvé précédemment, puiſqu'à la vingtieme année, la ſomme payée devoit être de 9700 livres, ſomme très-approchée de 10000 liv.

86. Dans une progreſſion géométrique croiſſante, chaque terme eſt égal à celui qui le précéde, multiplié par la raiſon de la progreſſion (84); & il en réſulte que chaque terme eſt auſſi égal au 1.^{r} multiplié, par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui le précédent. En effet, ſi on entre dans les détails, on voit que le troiſieme terme eſt égal au deuxieme multiplié par la raiſon; mais celui-ci eſt égal au 1.^{r} multiplié par la raiſon; le troiſieme eſt donc égal au 1.^{r}, multiplié deux fois de ſuite par la raiſon, ou multiplié par la deuxieme puiſſance de la raiſon. Le produit de ce troiſieme terme par la raiſon, eſt égal au quatrieme terme; donc ce dernier vaut le 1.^{r} multiplié par la troiſieme puiſſance de la raiſon, ou par la raiſon élevée à une puiſſance marquée par le nombre des termes qui le précédent. Ce même raiſonnement étant appliqué ſucceſſivement à chaque terme d'une progreſſion géométrique, conduit à la regle générale déjà énoncée; ſavoir que chaque terme eſt égal au 1.^{r} multiplié par la raiſon élevée à une puiſſance indiquée par le nombre des termes qui le précédent. Cette propriété fournit un moyen facile de trouver la valeur d'un terme qui tient un rang connu dans une progreſſion géométrique, dont le 1.^{r} terme & la raiſon ſont donnés. Si dans la progreſſion 1:2:4:8:16:32:64 &c, on cherche le 8.e terme; on doit le trouver en multipliant le 1.^{r} terme 1, par la ſeptieme puiſſance, de la raiſon qui eſt 2. Ce produit eſt 128 ; & il eſt le huitieme terme demandé. On eut d'ailleurs trouvé le même reſultat en multipliant le ſeptieme terme 64, par la raiſon 2.

C'eſt auſſi de cette même propriété qu'on conclut une regle générale, à l'aide de laquelle, on peut inſérer pluſieurs moyens géométriques entre deux nombres donnés. En effet, la queſtion de déterminer ces moyens, eſt celle de faire une progreſſion

géométrique, dont les deux nombres donnés ſoient les deux termes extremes, & dont les moyens demandés, ſoient les termes intermédiares. La recherche de ces moyens dépend donc de celle de la raiſon qui doit regner, dans cette progreſſion, ou dans la ſuite de ces moyens. Car cette raiſon étant déterminée, on obtient le premier moyen cherché en multipliant le plus petit des deux nombres donnés, par cette raiſon. Le produit de ce premier moyen multiplié par la raiſon devient le deuxieme moyen; & ainſi de ſuite. La regle générale par laquelle on doit calculer la raiſon cherchée d'une telle progreſſion, eſt de diviſer le plus grand des deux nombres donnés, par le plus petit; & d'extraire du quotient une racine marquée par le nombre des moyens demandés, augmenté d'une unité. Voici la demonſtration de cette regle. Le plus grand des nombres donnés, qui doit être le dernier terme de la progreſſion qu'on veut faire, peut être regardé comme le produit de deux facteurs dont l'un eſt le premier terme ou le plus petit nombre donné, & l'autre la raiſon élevée à une puiſſance marquée, par le nombre des termes qui précedent ce dernier, ou par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité. C'eſt pourquoi, en diviſant le plus grand des nombres donnés par le plus petit, qui eſt un de ses facteurs, le quotient doit être égal à l'autre facteur; & par conſéquent ſi de ce quotient on extrait une racine marquée par le nombre des moyens demandés, augmenté de l'unité; cette racine doit être la raiſon cherchée. Enſuite avec cette raiſon, on forme la progreſſion, & on trouve, comme on l'a dit plus haut, tous les moyens demandés. Si entre 2 & 16, par exemple, on ſe propoſe d'inſerer deux moyens géométriques: il faut diviſer 16 par 2, & enſuite extraire du quotient 8, la racine troiſieme qui eſt 2. La raiſon qui doit regner dans la progreſſion eſt donc 2. On multiplie cette raiſon par le premier terme donné 2, & le produit 4 eſt le premier moyen. On multiplie ce moyen par 2, & le produit 8 eſt le deuxieme moyen. Enfin la progreſſion

eſt 2:4:8:16 & les deux termes intermédiaires 4 & 8 ſont les moyens cherchés.

Il eſt ſouvent néceſſaire de connoître la ſomme des termes d'une progreſſion géométrique; ainſi il eſt à propos d'en préſenter la formule Soit une progreſſion dont la ſomme des termes eſt demandée, & imaginons une ſeconde progreſſion, qui ne ſoit que la propoſée, diminuée de ſon premier terme, & augmentée d'un terme de plus; ou qui ſoit la propoſée dont tous les termes ſoient multipliés par ſa raiſon. Il réſulte de cette ſuppoſition, que ſi on prend la différence des ſommes particulieres des termes de chacune de ces deux progreſſions, elle doit être celle du premier terme de la propoſée au dernier terme de la ſeconde progreſſion; c'eſt-à-dire, au dernier terme de la premiere, multipliée par la raiſon : mais la différence des ſommes des termes de chacune des progreſſions, n'eſt autre choſe que la ſomme des termes de la propoſée multipliée, par la raiſon diminuée d'une unité ; par conſéquent cette ſomme eſt égale au quotient qui réſulte de la différence, du premier terme de la propoſée à ſon dernier terme multiplié par la raiſon, diviſée par la raiſon diminuée d'une unité. On peut donc établir pour regle générale, que ſi on ſe propoſe de déterminer la ſomme des termes d'une progreſſion géométrique limitée, il faut retrancher ſon premier terme, du dernier multiplié par la raiſon, & diviſer leur différence par la raiſon diminuée d'une unité. Par exemple, ſoit la progreſſion 2:4:8:16:32:64 ; & ſoit demandée la ſomme de ces ſix termes qui la compoſent. Il faut multiplier 64 par la raiſon 2 : & retrancher du produit 128 le premier terme 2 ; enſuite on diviſe le reſte 126, par 1 qui eſt la raiſon 2 diminuée d'une unité; & le réſultat 126, eſt la ſomme de tous les termes donnés, comme on peut le vérifier par une addition directe & effective.

Comme les applications des propriétés des progreſſions géométriques ſont très-laborieuſes, lorſqu'elles ſont faites ſans le ſecours des logarithmes, nous nous réſervons d'en donner des exemples, après avoir traité de la nature, & de l'utilité de ces nombres artificiels.

87. *Logarithmes des nombres.* Les quatre principales regles d'arithmétique, que nous avons présenté précédemment, n'ont pas toutes le même dégré de simplicité, & de facilité dans l'exécution ; c'est pourquoi l'addition & la soustraction étant moins compliquées, que la multiplication & la division, on a cherché à reduire ces deux dernieres opérations aux deux premieres, c'est-à-dire, à déterminer les produits ou les quotiens de deux nombres, par la voie de l'addition & de la soustraction. Les logarithmes que nous allons faire connoître, servent parfaitement à remplir ces vues de commodité & d'utilité.

Imaginons, pour donner une idée générale des logarithmes, que deux progressions, l'une arithmétique, & l'autre géométrique, soient placées l'une au-dessous de l'autre, de maniere que chaque terme de l'une, corresponde au terme qui tient le même rang dans l'autre progression ; alors un terme quelconque de la progression arithmétique, est nommé le logarithme du terme correspondant de la progression géométrique. Mais il est un choix à faire entre toutes les progressions possibles, afin de n'employer que celles qui offrent la plus grande facilité, soit pour le calcul des logarithmes de tous les nombres, soit pour les diverses opérations qu'on peut faire par le moyen des logarithmes. On a donc adopté la progression géométrique qui commence par 1, dont la raison est 10, & qui, composée des termes suivans, est étendue indéfiniment 1:10:100:1000:10000: &c. chacun de ces termes est simplement égal à la raison élevée à une puissance marquée par le nombre des termes qui le précédent ; & ce nombre exprime par conséquent, combien de fois la raison 10 est facteur dans chacun de ces termes. Si maintenant on se conforme à une convention générale déjà faite pour l'algebre (58), savoir : que lorsqu'un nombre tel que 1000, est un produit dans lequel 10 est 3 fois facteur, on peut représenter cette puissance par 10^3, c'est-à-dire, en plaçant à la droite, & un peu au-dessus du facteur 10, le nombre qui, sous le nom d'exposant, exprime combien de fois 10 est facteur. Les termes

de cette progressi n où 10 est facteur, ou cinq fois, ou 6, ou 7 fois peuvent être représentés sous la forme 10^5, 10^6, 10^7: par conséquent la progression précédente peut être transformée en celle-ci $10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7$, &c.

Le choix de cette progression géométrique, considérée dans ce nouvel état, a conduit à celui de la progression arithmétique, dont les termes doivent être employés comme les logarithmes des termes correspondans de la premiere; car on doit remarquer que les exposans des termes de celle-ci, sont en progression arithmétique, & composent même la progression la plus simple de cette espece, comme commançant par zero, & ayant l'unité pour raison. Établissons les deux progressions indiquées l'une au-dessous de l'autre comme elles sont ici $\begin{cases} 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 : 10^7 \text{ \&c.} \\ 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7 \text{ \&c.} \end{cases}$
Si on doit voir dans les termes de la progression arithmétique, les logarithmes des termes correspondans de la progression géométrique; on peut aussi ne considérer que la progression géométrique seule, car l'exposant de chacun de ses termes, est le logarithme de de ce même terme Adoptons cette derniere maniere d'envisager les logarithmes pour exposer plus clairement leurs usages Si on examine attentivement les termes de la progression géométrique précédente, on doit en conclure, que chacun étant composé uniquement de la raison plusieurs fois facteur, le produit de deux de ces termes doit avoir la raison pour facteur, autant de fois qu'elle l'est dans l'un & l'autre terme multiplié. On sait d'ailleurs que les exposans indiquent combien de fois la raison est facteur dans un terme quelconque; parconséquent, la somme des exposans des termes multipliés, doit indiquer aussi combien de fois la raison est facteur dans leur produit De-là on doit conclure que pour reconnoître, dans la suite des termes de cette progression, celui qui est le produit, de deux autres termes multipliés l'un par l'autre, il suffit d'ajouter les exposans de ces deux facteurs, & de chercher le terme qui, dans cette progression, a pour exposant

la ſomme trouvée. Par exemple, veut-on ſavoir quel eſt le produit de 10 par 1000, ou de 10^1 par 10^4, il faut ajouter les expoſans 4 & 1, & chercher dans la ſuite des termes de la progreſſion, celui qui a pour expoſant 5, ou la ſomme de ceux des deux facteurs. Le terme 10^5 eſt donc le produit des deux nombres donnés. En effet, la raiſon eſt dans ce terme, cinq fois facteur : & en développant cette puiſſance de 10, on trouve qu'elle eſt egale à 100000 : ce qui eſt d'ailleurs, comme on le ſait, le produit de 10 par 10000.

Ces réflexions & cet exemple concourent ainſi à faire voir qu'on peut parvenir à connoître le produit de deux termes quelconques, d'une telle progreſſion géométrique, en faiſant une ſimple addition de deux nombres déterminés qu'on nomme leurs logarithmes. La diviſion eſt auſſi réduite, d'après les mêmes principes, à une ſimple ſouſtraction de logarithmes. En effet, ſuivant les regles de la multiplication par le moyen des logarithmes, la ſomme des logarithmes de deux termes de cette progreſſion, eſt le logarithme du produit de ces deux termes; c'eſt pourquoi, dans une diviſion, comme le produit du diviſeur multiplié par le quotient, eſt égal au dividende; la ſomme du log. du quotient & de celui du diviſeur, doit être le log. du dividende : par conſéquent, ſi de cette ſomme, ou ſi du log. du dividende, on retranche le log du diviſeur, le reſte doit ètre le log. du quotient. Si, par exemple, on doit diviſer 10^7 par 10^3; il faut retrancher le log. de 10^3, de-celui de 10^7, ou ſouſtraire leurs expoſans; & leur différence étant 4, ce nombre qui eſt le logarithme du quotient, doit être l'expoſant du terme qui eſt réellement le quotient de 10^7 diviſé par 3. Ce quotient eſt donc 10^4 : & en effet, ſi après avoir développé les puiſſances 7ᵉ & 3.ᵉ de dix, on exécute la diviſion à l'ordinaire, on trouve pour quotient 10000, ou 10^4.

On peut encore réduire l'opération de la diviſion, ou la recherche du quotient à une ſimple addition de logarithmes, au lieu d'une ſouſtraction. Le procédé conſiſte, à retrancher d'abord de 10 unités, le logarithme du diviſeur; enſuite à ajouter ce reſte avec le logarithme du dividende; enfin à retrancher

de la derniere somme, les 10 unités employées dans l'opération; & le résultat est le logarithme du quotient cherché. En effet, cette différence entre 10 unités & le logarithme du diviseur (différence qu'on nomme complément arithmétique du logarithme du diviseur), étant ajoutée au logarithme du dividende; le résultat est le même, que si on eut ajouté 10 unités au logarithme du dividende; & qu'on en eut retranché le logarithme du diviseur; mais le logarithme du quotient est seulement égal à la différence, du logarithme du dividende à celui du diviseur; par conséquent la somme du logarithme du dividende, & du complément arithmétique du logarithme du diviseur, surpasse de 10 unités, le logarithme du quotient: & il faut en retrancher ces 10 unités, pour le rendre égal à ce denier logarithme. Par exemple, le terme 10^7, doit-il être divisé par 10^3; le complément arithmétique du logarithme 3 du diviseur est 7; ajouté au logarithme 7 du dividende, leur somme est 14; & ce logarithme diminué de 10 unités, est reduit à 4 qui est le logarithme du quotient: par conséquent le quotient est réellement 10^4, comme on l'a trouvé ci-dessus.

Doit-on élever un des termes de cette progression à une puissance quelconque, par le moyen des logarithmes; il faut multiplier le logarithme de ce terme par l'exposant de la puissance. Car dans cette puissance, ce terme est autant de fois facteur, qu'il y a d'unités dans l'exposant de la puissance: son logarithme doit donc être ajouté à lui-même, autant de fois que l'indique cet exposant, ou plutôt il doit être multiplié par cet exposant, pour devenir le logarithme de la puissance cherchée. Par conséquent, si on multiplie le logarithme d'un terme par l'exposant d'une puissance, le produit doit être le logarithme de cette puissance. Ainsi soit proposé d'élever le terme 10^2 à la 3e puissance; comme 2 est son logarithme; & 3, l'exposant de la puissance; le produit 6 est le logarithme de la puissance 3e de 10^2, & par conséquent le terme 10^6 est le cube de 10^2. On peut vérifier aisément ce résultat, en élevant 10^2 ou 100 au cube, & en développant le produit du nombre

10, multiplié cinq fois de suite par lui-même : l'un ou l'autre produit est 1000000.

Réciproquement, si on doit extraire une racine quelconque d'un des termes de cette progression, il faut diviser le logarithme de ce terme, par l'exposant de la racine demandée. Car le logarithme de cette racine, multiplié par son exposant, doit être égal au logarithme du terme proposé : par conséquent le logarithme de la racine de ce terme, est le quotient de la division du logarithme du terme donné par l'exposant de la racine cherchée. Si de 10^6, par exemple, on demande la racine 3e ; on divise le logarithme 6 de 10^6, par l'exposant 3 de la racine : & le quotient 2, est le logarithme de la racine 3e de 10^6. Cette racine elle-même est donc 10^2.

83 Après avoir ainsi développé toutes les conséquences dépendantes de la nature, & des propriétés de la progression particuliere qui vient d'être présentée ; il faut faire connoître comment on peut transporter tous les résultats avantageux & commodes, que nous venons de citer, au calcul des nombres quelconques. Nous remarquerons que les regles générales qui ont été conclues, (relativement aux opérations qu'on peut faire, & sur les termes de cette progression, & sur leur logarithmes), ne dépendent pas de la raison décuple de cette même progression : & les raisonnemens sur lesquels elles sont établies, peuvent être appliqués sans aucun changement à toute autre progression, dont le premier terme seroit 1 ou 10^0, & la raison, quelconque. C'est pourquoi l'application de leurs conséquences, pourra être faite complettement au calcul de tous les nombres entiers, si on peut trouver une progression qui, ayant l'unité pour premier terme, présenteroit tous les nombres entiers, parmi les termes dont elle seroit composée. Une telle progression est facile à assigner. En effet, considérons la progression décuple $10^0:10^1:10^2:10^3:10^4$, &c elle n'offre, de tous les nombres entiers dont on fait usage, que ceux-ci, 1, 10, 100, 1000, &c. mais imaginons qu'entre les deux premiers termes 1 & 10, on insere un million de moyens géométriques,

on doit trouver parmi ces termes moyens, les nombres intermédiaires, 2,3,4,5,6,7,8 & 9, ou des nombres qui en différent si peu, que sans erreur sensible, les différences peuvent être négligées.

Si on suppose aussi qu'entre 10 & 100, ainsi qu'entre 100 & 1000, & successivement, on ait inséré un million de moyens géométriques; on voit que de ces opérations, il doit résulter une progression, dont l'unité est le premier terme, & qui, parmi les termes nombreux, dont elle est composée, peut présenter tous les nombres entiers compris depuis un jusqu'à cent mille, & au-dessus, si elle est prolongée convenablement. La recherche de ce grand nombre de moyens géométriques, suppose celle de la raison qui doit regner dans cette progression, & pour en donner une idée, examinons seulement comment on opére pour insérer un million de moyens entre 1 & 10. Il faut, pour trouver la raison, extraire du nombre 10^1 une racine marquée, par l'exposant un million plus un. Il faut donc diviser l'exposant 1 de ce nombre, par 1000001 qui est l'exposant de la racine (73); & le quotient de cette division, exprimé en décimales, est 0,0000009; de sorte que la raison est $10^{0,000009}$, & les diverses puissances de cette raison sont les moyens cherchés. En développant ces calculs, on trouve, par exemple, que le nombre 2 est égal à-peu-près à $10^{0,301030}$, & par conséquent que 0,301030 est le logarithme de 2 : de même le nombre 3 est à-peu-près égal à $10^{0,477121}$, & son logarithme est par conséquent 0,477121, &c. Des calculateurs infatigables, & qui méritent sans doute la reconnoissance publique, ont bien voulu exécuter toutes les opérations annoncées, & publier des tables des logarithmes les nombres entiers. Ces tables présentent dans leur ensemble, & sur deux colonnes paralleles, des termes correspondans de deux immenses progressions arithmétiques & géométriques, dont l'une a zero, & l'autre l'unité, pour 1.er terme; & leur usage est fondé sur toutes les propositions qui ont servi à fonder le calcul

des termes de la progreſſion décuple : parce que, comme on l'a dit plus haut, elles ſont entierement applicables à ces progreſſions nouvelles, quoique infiniment plus nombreuſes. On peut donc dire de tous les nombres contenus dans ces tables, comme on l'a dit précedemment de tous les termes de la progreſſion décuple ; 1.° que ſi on ajoute les logarithmes de deux nombres, la ſomme eſt le logarithme du produit de ces mêmes nombres ; 2° que s'ils doivent être diviſés l'un par l'autre, la différence du logarithme du dividende à celui du diviſeur, eſt le logarithme du quotient ; 3.° que le logarithme de la puiſſance d'un nombre eſt égal au logarithme de ce nombre, multiplié par l'expoſant de la puiſſance ; 4.° enfin, que le logarithme de la racine d'un nombre, eſt le quotient de la diviſion du logarithme de ce nombre par l'expoſant de cette racine.

89. Les logarithmes dont on fait uſage dans l'application de ces regles, ainſi que les nombres entiers, qui coreſpondent à ces mêmes logarithmes, ſont faciles à trouver par le moyen de tables actuelles, parce qu'elles préſentent ſur deux colonnes, les logarithmes des nombres, vis-à-vis de ces mêmes nombres ; de ſorte qu'étant donné un nombre, ſon logarithme eſt le terme qui lui correſpond, dans la colonne adjacente des logarithmes ; de même étant donné un logarithme, le nombre auquel il appartient, eſt celui qui, dans la colonne des nombres correſpond à ce logarithme. Ces tables ne renferment cependant & explicitement, que les logarithmes de 100000 nombres entiers, & non ceux des nombres qui ſont ou plus grands, ou fractionnaires, ou joints à des fractions, & qui peuvent ſe préſenter dans les calculs ; c'eſt pourquoi, avant de donner des exemples des opérations qu'on fait par le ſecours des logarithmes, il eſt à propos de placer ici, des remarques particulieres & propres à écarter, dans tous les cas, les difficultés qui peuvent arrêter les calculateurs.

Soit une fraction $\frac{27}{59}$ dont on cherche le logarithme ; comme elle n'indique qu'une diviſion non exécutée, il faudroit, ſuivant un des procédés de la diviſion par

logarithmes, retrancher le logarithme de 59 de celui de 27 : mais celui-ci étant plus petit, le reſte ſeroit négatif. C'eſt pourquoi afin d'éviter ces logarithmes négatifs, nous croyons convenable de n'employer que le procédé des complémens arithmétiques des logarithmes, pour parvenir à trouver le logarithme d'une fraction quelconque. Dans l'exemple propoſé, on doit donc prendre le complément arithmétique du logarithme de 59, qui eſt 8,229148, & l'ajouter au logarithme de 27, qui eſt 1,431364. Leur ſomme eſt 9,660512, & diminuée de 10 unités, elle ſeroit le logarithme de la fraction. Mais au lieu d'exécuter cette ſouſtraction, je propoſerois d'indiquer qu'elle eſt à faire, en plaçant un point au-deſſus de la caractériſtique 9 ; c'eſt-à-dire, d'écrire ce logarithme, ainſi que celui de toute autre fraction, ſous cette forme, $\dot{9},660512$. Ce point annonceroit qu'il reſte à retrancher 10 unités de ce logarithme ; & deux ou pluſieurs points placés ainſi au-deſſus d'une même caractériſtique, indiqueroient de même qu'il reſte à retrancher, des logarithmes où ils ſeroient placés, ou 10, ou 20, ou 30 unités. Cette indication ſuffiroit pour faciliter la recherche des réſultats des opérations où de tels logarithmes pourroient être employés. Car, ſoit propoſé de multiplier $\frac{27}{59}$ par 32, on ajouteroit le logarithme de 32, avec celui de la fraction, c'eſt-à-dire avec $\dot{9},660512$, & de la ſomme $\dot{1}1,165662$, on retrancheroit 10 unités, comme il eſt indiqué par le point unique qui couronne le caractériſtique 9 du logarithme de la fraction : alors, le reſte 1,165662 deviendroit le logarithme du produit des deux facteurs donnés.

Ce qui vient d'être dit ſur les fractions en général, s'applique parfaitement & complétement aux décimales. En effet, quoique celles-ci ſoient préſentées ſous la forme de quantités, telles que 0, 25 & 0, 034 ; elles reſſemblent, dans le fond, aux fractions ordinaires, & on doit les regarder comme devant être écrites de cette maniere ; $\frac{25}{100}$, $\frac{34}{1000}$, &c. Le logarithme

pointé d'une fraction est, comme on l'a dit, égal à la somme du logarithme du numérateur & du complément arithmétique du logarithme du dénominateur. Ce dernier, lorsque les fractions sont décimales, est la différence de dix unités, à 1, 2, 3, ou 4 unités, selon que les décimales sont des dixiemes, des centiemes, des milliemes, ou des dix milliemes : par conséquent on détermine le logarithme pointé, d'une fraction décimale ; en ajoutant, au logarithme du nombre des parties décimales, le logarithme 10 diminué d'autant d'unités qu'il y a de chiffres décimaux. Au reste, ces logarithmes sont dits pointés, parcequ'ils doivent être diminués de 10, comme on l'a dit de ceux des fractions ordinaires.

Si un nombre proposé, étoit composé d'un nombre d'unités & d'un nombre de décimales, tel, par exemple, que 25,32. Ce nombre, ni son logarithme ne se trouvent explicitement dans les tables ordinaires. Ce logarithme peut être cependant déterminé à l'aide des mêmes tables, en considérant, sans virgule, le nombre proposé, ou comme étant cent fois plus grand. En effet, nous avons vu dans la progression géométrique qui sert de base aux logarithmes, que 1 est le logarithme de 10, que 2 est celui de 100, que 3 est celui de 1000, &c. ; c'est-à-dire qu'un nombre étant dix fois, ou cent fois plus grand qu'un autre nombre ; le logarithme du 1^r^ surpasse de 1 ou 2 unités, le logarithme du 2e nombre. Par conséquent, le logarithme de 2532, (qui est un nombre cent fois plus grand que 25,32) doit être de 2 unités plus grand que celui de 25,32 ; & comme le premier, donné par les tables, est 3,403464, celui de 25,32 doit être 1,403464. C'est par un procédé semblable qu'on détermine le logarithme, d'un nombre quelconque accompagné de décimales.

Supposons que ce dernier logarithme 1,403464, soit le résultat d'une opération quelconque, & qu'on demande quel est le nombre qui lui correspond. On chercheroit inutilement un tel logarithme parmi ceux qui, dans les tables, n'ont qu'une unité à leur carac-

teriſtique ; on n'y reconnoîtroit aucun logarithme compoſé entièrement des mêmes chiffres : mais en augmentant ce logarithme de deux unités, on le trouve placé exactement parmi ceux qui ont trois unités à leur caractériſtique. Le nombre qui lui correſpond eſt 2532 ; & ce nombre, dont le logarithme eſt plus grand de 2 unités que le logarithme donné, eſt donc cent fois plus grand que le nombre qui correſpond à ce dernier logarithme. Le nombre cherché doit donc être 25,32 ; c'eſt-à-dire, qu'il faut ſéparer par une virgule, ſur la droite du nombre trouvé dans les tables, autant de chiffres qu'on ajoute d'unités au logarithme donné. C'eſt par de tels moyens qu'on peut trouver par les tables ; ſoit les nombres joints à des décimales, qui correſpondent à des logarithmes donnés ; ſoit les logarithmes des nombres qui ſont acompagnés de décimales.

Nous venons de faire voir qu'il faut augmenter un nombre, tel que 25,32, pour en trouver le logarithme par les tables ; mais c'eſt le contraire lorſqu'on propoſe de déterminer le logarithme d'un nombre qui depaſſe les limites des mêmes tables. Soit, par exemple, le nombre 125344, dont le logarithme eſt demandé : comme les tables ne s'étendent pas au-delà de 100000, il faut rendre ce nombre aſſez petit pour qu'il ſoit compris dans les limites des tables ; ce qui ſe fait en ſéparant ſur ſa droite, ou un, ou deux, ou trois chiffres, ſelon qu'il devient néceſſaire de le rendre ou 10 ou 100 ou 1000 fois plus petit. Le nombre propoſé n'a beſoin que d'être reduit à 12534, 4 ; & le logarithme de ce dernier nombre étant trouvé, il deviendra celui du premier, en l'augmentant d'autant d'unités qu'il y a de chiffres ſéparés ſur ſa droite. La queſtion ſe reduit donc à déterminer le logarithme de 12534, 4. Les tables préſentent ceux de 12534 & de 12535, ainſi celui qui eſt cherché, eſt placé entre ces derniers ; & il ſeroit connu ſi on ſavoit ſa différence au logarithme de 12534. Voici donc le calcul de cette différence. On prend, celle des deux nombres entiers, qui eſt 1, celle de leur logarithmes qui eſt 34, & celle de 12534, 4 à 12534 qui eſt 0,4 : enſuite on fait la proportion ſuivante : la différence

différence des deux nombres entiers, eſt à celle du plus petit de ces nombres au nombre propoſé, comme la différence des logarithmes des nombres entiers, eſt à celle du logarithme du plus petit de ces nombres au log. du nombre propoſé; ou 1 : 0,4 :: 34 : x. Le quatrieme terme qui eſt 14 eſt donc la différence cherchée. On l'ajoute au logarithme de 12534, qui eſt 4,098090, & la ſomme 4,098104 eſt celui de 12534,4. Enfin le logarithme du nombre propoſé, qui eſt 125344 ou dix fois plus grand que 12534,4 ; doit donc être 5,098104. Tel eſt le procédé qu'il faut ſuivre pour calculer les logarithmes des nombres qui, par leur grandeur, ſont hors des limites des tables.

Eſt-il queſtion de déterminer réciproquement, le nombre correſpondant à un logarithme qui n'eſt pas dans les tables? Il y a deux cas: ou ſa caractériſtique le place dans l'étendue des tables, ou elle indique qu'il dépaſſe leurs limites. Dans ce dernier cas, il faut diminuer ſa caractériſtique d'un nombre d'unités, aſſez grand pour que ce logarithme puiſſe être compris dans les bornes des tables, & qu'on puiſſe y trouver le nombre qui lui correſpond. Ce nombre doit être alors, ou dix, ou cent, ou mille fois plus petit, que celui qui eſt cherché: ainſi on doit déterminer ce dernier, en rendant le nombre trouvé par les tables, ou dix, ou cent, ou mille fois plus grand. Par exemple, le logarithme 6,000000 n'eſt pas dans les tables ordinaires, mais en le diminuant de 2 unités, on trouve dans ces mêmes tables que 4,000000 correſpond au nombre 10000: & comme ce dernier, par le changement opéré ſur le logarithme donné, doit être cent fois plus petit que le nombre cherché, celui-ci doit être 1000000. Dans l'autre cas, un logarithme qui, par ſa caractériſtique, n'excède pas les limites des tables, peut ne pas s'y trouver entièrement, c'eſt-à-dire, avec tous les chiffres décimaux qui le compoſent; alors le nombre qui lui correſpond ne peut jamais être entier, mais un nombre compoſé d'unités & de décimales. Il eſt donc placé néceſſairement entre deux nombres entiers renfermés dans les tables. Soit, par exemple, propoſé le loga-

rithme 3,265436, & ſoit demandé le nombre qui lui correſpond. En le comparant à ceux dont il approche davantage, on reconnoît qu'il eſt plus petit que le logarithme de 1843, & plus grand que celui de 1842: il doit donc correſpondre au nombre 1842 augmenté de quelques décimales. Ses décimales doivent être déterminées, en faiſant la proportion indiquée précédemment. On doit dire, 235 (différence des logarithmes de 1842 & de 1843), ſont à 146 (différence du logarithme de 1842 au logarithme propoſé), comme 1 (différence des nombres 1842 & 1843), eſt à la différence de 1842 au nombre qui correſpond au logarithme propoſé. Cette différence cherchée eſt 0,621; par conſéquent le nombre 1842,621 eſt le nombre réel qui correſpond au logarithme propoſé.

Telles ſont toutes les remarques qui peuvent être néceſſaires & utiles pour le facile uſage des tables des logarithmes. Actuellement nous allons préſenter quelques applications des regles précédentes, à la ſolution de certaines queſtions; afin de donner une idée des avantages attachés à l'emploi des logarithmes dans les calculs. Les logarithmes ſervent à exécuter la regle de trois (83) dans toutes les occaſions où elle eſt employée; & pour en donner un exemple, cherchons le quatrieme terme de la proportion qui ſert à reſoudre la ſeconde queſtion propoſée précédemment; $7:270::1561:x$. Il faut ajouter le logarithme de 270 qui eſt 2,431364, & avec le logarith. de 1561 qui eſt 3,193403, & avec le complément arithmétique du logarithme de 7 qui eſt 9,154902. Leur ſomme diminuée de dix unités eſt 4,779669, & ce logarithme correſpond à 60210 qui eſt la valeur cherchée de x. S'il étoit propoſé de déterminer un moyen proportionnel géométrique entre deux nombres, les logarithmes offrent beaucoup de facilité pour y parvenir promptement. Le logarithme de ce moyen eſt égal à la moitié de la ſomme des logarithmes des deux nombres donnés. Si, par exemple, ces nombres ſont 3 & 12, dont les logarithmes ajoutés forment la ſomme 1,556302; la moitié de cette ſomme qui eſt 0,778151, eſt le logarithme du moyen cherché,

& comme le nombre qui lui correſpond eſt 6, on peut dire, 3:6::6:12; c'eſt-à-dire que 6 eſt le moyen demandé. S'il falloit déterminer pluſieurs moyens géométriques entre deux nombres donnés, l'opération devient très-commode & très-courte par le ſecours des logarithmes. En effet, ſuivant les principes expoſés précédemment, il faut déterminer la raiſon de la progreſſion géométrique qu'on veut former, avant de calculer les moyens demandés. Il faut, pour trouver le logarithme de cette raiſon, retrancher le logarithme du plus petit des nombres donnés du logarithme du plus grand, & diviſer le reſte par le nombre des moyens demandés, augmenté d'une unité. C'eſt ainſi que voulant inſérer entre 4 & 64 trois moyens géométriques, on fait une ſomme du logarithme de 64 & du complément arithmétique du logarithme de 4. Enſuite le quotient de cette ſomme diminué de dix unités & diviſé par 4, ou le logarithme 0,301030, indique que la raiſon doit être 2. Remarquons qu'en faiſant uſage des règles ordinaires de l'arithmétique, il eût fallu exécuter une diviſion & faire l'extraction de la racine quatrième du quotient, extraction toujours pénible, quand les nombres propoſés ſont conſidérables : d'ailleurs, plus le nombre des moyens augmente, plus les opérations ſont laborieuſes. Le logarithme de la raiſon étant ainſi déterminé, on l'ajoute au logarithme du petit nombre donné, & la ſomme eſt le logarithme du premier moyen. Ce dernier logarithme ajouté à celui de la raiſon fait connoître le logarithme du ſecond moyen; & ainſi ſucceſſivement. Enfin cherchant les nombres qui correſpondent aux derniers logarith. on trouve les moyens cherchés, & on fait la progreſſion demandée, 4:8:16:32:64.

L'invention des logarithmes a non-ſeulement facilité la ſolution des queſtions que peut réſoudre l'arithmétique ordinaire, mais auſſi celle de queſtions plus compliquées qui exigent l'application des regles de l'algebre. En voici deux exemples.

1.° Un vaiſſeau a été vendu 50000[l] payables à la volonté de l'acheteur, mais à condition que la ſomme

qui ne feroit pas payée porteroit intérêt à raifon de 5 pour 100 par an. On demande combien il faudroit d'années pour que le prix d'achat fût doublé, en fuppofant qu'aucune partie de cette fomme ne foit payée dans cet intervalle de tems.

La fomme de 50000^{l}, les intérêts de cette fomme, & l'intérêt des intérêts étant accumulés, doivent compofer enfemble, après un nombre n d'années, une fomme de 100000^{l}. à la fin de la premiere année, l'intérêt dû eft le vingtieme de 50000^{l}; & en nommant a cette fomme & b l'intérêt $\frac{1}{20}$, la dette à cette époque eft repréfentée par $a+ab$, ou par $a(b+1)$. A la fin de la feconde année, il eft dû $a(b+1)+ab(b+1)$, ou $a(b+1)^2$ c'eft-à-dire, ce qui étoit dû à la fin de l'année précédente & l'intérêt de cette dette. A la fin de la troifieme année, il eft dû $a(b+1)^2+ab(b+1)^2$, ou $a(b+1)^3$. Enfin à la fin de l'année n, la fomme due eft $a(b+1)^n$, & comme cette fomme doit être double de 50000 l ou de a, on doit former l'équation $2a = a(b+1)^n$ ou $2 = (b+1)^n$: il s'agit donc de trouver n qui indique combien d'années doivent s'écouler jufqu'au moment où la fomme s'élevera à 100000 l, & les logarithmes rendent cette recherche facile. Car prenant les logarithmes des deux membres de cette équation, on a $l.2 = nl.(b+1)$, & par conféquent $n = \frac{l.2}{l.(b+1)}$. Subftituant enfuite $\frac{1}{20}$ à la place de b, on a $n = \frac{l.2}{l.21 - l\,20}$. Il faut donc divifer 0,301030 qui eft le logarithme de 2 par 0,021189 qui eft la différence des logarithmes de 21 & de 20. Le quotient exprime qu'après 14 ans deux mois & douze jours, la fomme due, peut être doublée, comme on le demande.

2.° Si l'acheteur & le vendeur font entr'eux la condition que la fomme de 50000 l foit payée en dix ans, par des paiemens égaux, & en tenant compte non-feulement des intérêts des fommes non payées, mais auffi des intérêts d'intérèts, on demande quelle doit être la fomme à payer à la fin de chaque année.

Conservons les dénominations précédentes & nommons x la somme payée annuellement. A la fin de la premiere année il est dû $a+ab$ ou $a(b+1)$. & comme la somme x est payée à cette époque, la somme due au commencement de la 2.e année, est $a(b+1)-x$. A la fin de la 2.e année, & après le paiement de x, il est dû $a(b+1)-x+ab(b+1)-bx-x$ ou $a(b+1)^2-x(b+1)-x$. A la fin de la troisieme année & après le paiement de x, il est dû $a(b+1)^2-x(b+1)-x+ab(b+1)^2-xb(b+1)-bx-x$ ou $a(b+1)^3-x(b+1)^2-x(b+1)-x$, & ainsi de suite; de sorte qu'à la fin de la dixieme année & après le paiement de l'annuité, époque à laquelle il ne doit être rien dû, la quantité qui représente cette dette, & qui est $a(b+1)^{10}-x(b+1)^9-x(b+1)^8-x(b+1)^7-x$, doit être égale à z ro. On a donc l'équation $a(b+1)^{10}=x[1+(b+1)+(b+1)^2+(b+1)^3+(b+1)^4 \ldots\ldots +(b+1)^9)$ On doit remarquer que cette suite de termes qui multiplie x & qui est entre deux parentheses, est une progression géométrique dont, le premier terme est 1, le dernier $(b+1)^9$, & la raison $(b+1)$. la somme de tous ces termes, est égale, comme on l'a vu (86), au quotient de la différence, du premier terme au dernier multiplié par la raison, divisée par la raison diminuée d'une unité; c'est-à-dire à la quantité $\frac{(b+1)^{10}-1}{b}$. Par conséquent l'équation précédente se change en celle-ci $ab(b+1)^{10}=x(b+1)^{10}-x$; & $x=\frac{ab(b+1)^{10}}{(b+1)^{10}-1}$. Telle est la valeur de l'annuité représentée par x, & dont les logarithmes facilitent le calcul. Car en substituant à la place de b & de a, leurs valeurs: en prenant ensuite les logarithmes des quantités a, b & $(b+1)^{10}$, & en les combinant suivant qu'il est indiqué par l'équation $l.x=\log. a+\log. b+10 \log. (b+1]-\log.[(b+1)^{10}-1]$ on trouve que $x=8151^l\ 14^s$ Le procédé qui a été détaillé & suivi pour parvenir à la solution des deux questions précédentes, peut servir de modèle pour resoudre plusieurs autres questions du même genre: & nous nous bornons à ces exemples, parce que dans la navigation, il se présentera des occasions nombreuses de faire des applications aussi variées que nécessaires de la théorie des logarithmes.

LA SCIENCE DE L'HOMME DE MER.

SECTION DEUXIEME.

GÉOMÉTRIE.

90. LA nature n'offre à nos yeux, dans le ciel, sur la terre & sur les mers, que des corps matériels qui présentent, un volume plus ou moins considérable, sous des faces variées, dans leur forme, leur nombre & leur grandeur; des angles diversement ouverts; & enfin des lignes qui, par leur longueur & leurs directions différentes, forment ces angles, ou terminent ces corps ainsi que leurs faces diverses. La mesure des corps, de leurs faces, des angles & des lignes; la comparaison de leur grandeur, & la détermination de leurs rapports; sont les objets de la science qui est nommée géométrie. Les propriétés sensibles de ces corps, telles que leur couleur, leur température, leur dureté, leur mollesse, leur élasticité, leur impénétrabilité, & enfin leur organisation, ne sont pas considérées dans la géométrie, qui est bornée à n'envisager que leur forme & l'étendue qu'ils occupent dans l'espace. Sous un tel point de vue, tous les corps naturels qui sont susceptibles de l'application des mesures annoncées, sembleroient devoir être embrassés explicitement par cette science; cependant quelque variété qu'on remarque dans leur figure & dans

leur volume, comme ils peuvent tous être décomposés ou divisés en parties moins dissemblables & plus ou moins nombreuses, la mesure de tous les corps en général est reduite, à celle de corps simples, à ceux qui ont des figures planes ou circulaires; & la géométrie en ne s'occupant que de celle de de ces derniers, indique d'ailleurs comment les principes & les regles de ces mesures doivent s'étendre à tous les corps existans. Ces corps particuliers sont des pyramides, des cones, des prismes, des cylindres & des spheres. Leur forme est généralement connue; & leurs faces, qui, ainsi que dans tout autre corps connu, limitent la grandeur de leur volume ou leur solidité, sont elles-mêmes bornées par des lignes droites dans l'etendue qu'elles embrassent; c'est-à-dire dans leur surface. Sans doute la nature n'offre à nos yeux aucune ligne ni aucune surface qui n'appartienne à quelque corps solide; cependant l'esprit peut les isoler par le secours de la réflexion; il peut les imaginer séparées des corps qui frappent nos sens; il peut mesurer ces faces sans considérer la solidité des corps; & des lignes tracées sur ces faces peuvent être mesurées, comparées & variées dans leurs positions respectives, sans que dans toutes ces opérations, il devienne nécessaire d'avoir égard à la grandeur des surfaces. Par conséquent la géométrie peut traiter séparément & des lignes, & des surfaces, & des solides. Par de telles abstractions, ou par la division de tous ces objets, cette science devient plus facile à étudier; l'enchaînement de ses principes peut être mieux senti, & leurs conséquences dans les applications les plus éloignées, se présentent avec autant de netteté que de justesse. C'est par toutes ces raisons que la géométrie est partagée en trois branches bien distinctes. La premiere embrasse les lignes. Elles y sont considérées dans leur longueur, ainsi que dans leur direction; & elles sont comparées dans les positions respectives qu'elles peuvent recevoir. La seconde traite, des surfaces considérées isolement; de leurs dimensions nommées longueur & largeur; des lignes qui forment leurs limites; de l'espace qu'elles circonscrivent, des rapports de leurs

côtés, de leurs surfaces & des angles qu'elles peuvent faire entr'elles ou avec des lignes droites. Enfin la 3.e a pour objet la mesure du volume des corps & de leur contour. On y considere le nombre & la position de leurs faces, & on estime leur étendue; on y compare leurs solidités, leurs surfaces, ainsi que la grandeur des lignes qui les terminent. Chacune des parties de cette science présente des principes & des conséquences, qui, utiles à tous les arts, ont sur tout des rapports intimes & multipliés avec celui de la marine; & chacune de ses branches pourroit être infiniment étendue. Mais la géométrie de l'homme de mer est bornée par sa destination. Elle ne doit embrasser que les seules vérités qui sont applicables à la marine; c'est-à-dire celles qui sont nécessaires pour aider à concevoir ou à perfectionner & l'architecture navale, & la construction des vaisseaux, & leur armement, & l'art entier de la navigation. Le développement qu'on doit donner à ces trois branches de la géométrie doit donc être dirigé, & ses limites doivent être fixées, par l'étendue, comme par le nombre des applications qu'on peut en faire à la marine.

91. Avant de traiter ces divers objets, & afin de les présenter sans aucune interruption, ou sans aucune digression particuliere; il paroît à propos de faire la description des corps qui sont considérés dans la géométrie, & de donner une idée de leur solidité, de leur surface, de leur figure, de leurs faces & des lignes qui peuvent être tracées sur ces corps. Il est aussi très-nécessaire de définir quelques mots dont la signification mérite d'être fixée avec précision.

L'espace est, cette vaste étendue, ce vuide immense où sont placés tous les corps de la nature. Le point n'occupe dans l'espace qu'une place infiniment petite en tout sens. Une suite de ces points très pressés les uns contre les autres, est nommée une ligne droite, si elle est dirigée vers un seul point de l'espace. Mais elle est nommée une ligne courbe, si à chaque pas elle se dirige vers des points différemment placés; ou si chacun de ses points s'écarte infiniment peu de la direction des deux points qui le précedent immédiatement. La suite

ab (fig. 1.e) de plusieurs points qui tendent tous au point *e* est une ligne droite. Bien différente de celle-ci, la suite *cqd* de points, qui successivement se dirigent vers des points extérieurs, tels que *f*, *h*, & *g*, qui sont différemment placés, est une ligne courbe. Les lignes ont une longueur qui est plus ou moins considérable; mais ainsi que les points dont elles sont composées, elles ont une épaisseur & une largeur infiniment petites. L'intersection de deux lignes droites ne peut être qu'un point unique; parce qu'étant chacune une suite de points dirigés différemment, elles se confondroient nécessairement, si elles pouvoient être supposées avoir plus d'un point qui leur fût commun. Si, sans se traverser, elles se rencontrent dans l'espace & se touchent par une de leurs extrémités; l'ouverture qu'elles forment entr'elles est nommée angle rectiligne. C'est ainsi que [fig. 1] la ligne *ob* qui se joint en *b* à la ligne *ba*, fait avec celle-ci un angle *oba*, qui n'est autre chose que l'ouverture qu'elles concourent ensemble à former, ou l'inclinaison de l'une de ces lignes sur l'autre. Si on imagine qu'un très-grand nombre de lignes droites soient placées parallélement les unes aux autres & infiniment voisines, de maniere que chacune soit dirigée vers un des points d'une ligne droite *ef* (fig. 2), qu'on suppose tracée dans l'espace; cet assemblage, de lignes assez pressées pour ne laisser aucun vuide entr'elles, & dirigées ainsi, est nommé un plan. *abcd* est un plan, & on peut le supposer formé par des lignes qui sont dirigées vers plusieurs points de la ligne droite *ef*. Comme l'étendue de ces lignes composantes, & leur nombre, restent indéterminés, d'après la description qui vient d'en être faite; un plan, peut avoir une longueur *ab* & une largeur *ad* indéfinies, tandis que son épaisseur est infiniment petite comme celle de ses lignes élémentaires. Il est d'ailleurs tel, que toute ligne droite ayant deux points communs avec ce plan, s'y applique parfaitement. On voit par conséquent que si deux points, suffisent pour faire connoître la direction d'une ligne droite; il en faut nécessairement trois, pour indiquer la position d'un plan au milieu de l'espace. Un plan est-il terminé entièrement

par des lignes droites? Il eſt nommé une figure. Si ces lignes limitatrices ſont au nombre de trois, la figure eſt un triangle: & un plus grand nombre de lignes lui fait donner le nom de polygone. Parmi ces figures, celle qui eſt terminée par quatre lignes, c'eſt-à-dire, par quatre côtés, qui, comparés deux à deux, ſont paralleles; & qui eſt telle que *abcd*; eſt nommée un parallélogramme. Si les côtés ſont multipliés à l'infini; ſi chacun peut être conſidéré comme un point; & ſi tous ſont diſpoſés de maniere, que chacun ſoit également éloigné d'un point placé dans le même plan; la figure porte alors le nom de cercle. Les portions de l'eſpace qui ſont alors circonſcrites par de tels côtés, ou par ces points, ſont nommées les ſurfaces de ces figures: & la ſomme des mêmes lignes, dans un de ces polygones, reçoit le nom de ſon contour. Dans un cercle *cdz* (fig. 1), la ſuite des côtés infiniment petits, ou des points qui limitent ſon étendue, eſt nommée ſa circonférence: & on diſtingue ſous le nom de centre, le point tel que *o*, qui eſt également éloigné de chaque point de la circonférence *cdz*. Si on imagine qu'on ſuperpoſe les uns au-deſſus des autres, & dans des ſituations paralleles, un très-grand nombre de triangles ou de polygones égaux; il réſulte de cet aſſemblage un corps nommé priſme, & qui a la forme *abcd* (fig. 3). Les faces latérales d'un tel corps ſont autant de parallélogrammes, & ſes deux baſes oppoſées *afe* & *bcd* ſont paralleles & égales chacunes au polygone générateur. Enfin la portion de l'eſpace qui eſt terminée par ces mêmes faces, eſt nommée la ſolidité de ce corps, ou ſon volume. Lorſque la baſe ou le polygone générateur eſt un cercle; le ſolide engendré eſt nommé cylindre. Tel eſt le ſolide *onqpm* (fig. 4). Si on ſuperpoſe les uns au-deſſus des autres des triangles ou des polygones qui diminuent graduellement en étendue, ſuivant leur diſtance à une premiere figure qui ſert de baſe; & de maniere que la derniere de ces figures ſuperpoſées ne ſoit qu'un point: ou ſi d'un point de l'eſpace on mene des lignes aux extrémités des côtés d'un polygone pris pour baſe; le ſolide qui eſt terminé par ces lignes & cette baſe, ou qui eſt

formé par des polygones accumulés & décroissans, est nommé pyramide. Le corps représenté (fig. 5) est tel que nous venons de le décrire. Ses faces sont des triangles dont un angle a pour sommet celui *a* de la pyramide; & sa base peut être un polygone quelconque, comme elle est ici un triangle. D'ailleurs les triangles *dbc*, *omn*, & *riq* peuvent être considérés comme faisant partie de ceux qui concourent à engendrer un solide de cette forme. Ils décroissent depuis la base *dbc*: & le dernier de ces triangles n'a plus que des côtés insensibles qui se confondent en un seul point *a*. Si la base d'un tel solide est un cercle *cdb* (fig. 6), les figures élémentaires doivent être aussi des cercles: & ce solide, qui est terminé par un seul point *a* comme la pyramide, est nommé cône. Enfin si on imagine qu'une portion de l'espace; étendue en tout sens, soit tellement conformée que tous les points extérieurs de son contour soient également éloignés d'un point placé dans le milieu de cet espace; ce solide reçoit le nom de sphere. On voit sa forme *abcde* (fig. 7). Si on suppose un plan coupant qui traverse ce solide par son centre; il y forme une section *bneu*, qui nécessairement est un cercle; parce que tous les points du contour de cette section appartenans à la sphere, sont également éloignés du point *o* qui est dans le plan *bneu*. Une telle section, qui partage d'ailleurs la sphere en deux parties égales, est distinguée sous le nom de grand cercle de la sphere, & on peut en imaginer une infinité, dont les plans ont des directions différentes. Telles sont les formes des corps, des surfaces, & des lignes, qui sont considérées dans la géométrie. Leurs rapports avec les objets de l'art de la marine peuvent être déjà sentis; mais ils ne seront développés que dans les diverses applications, qui doivent suivre l'exposé de chaque principe, ou de chaque proposition de cette science; c'est-à-dire, dans les diverses conséquences qui résultent des propriétés de ces trois sortes d'étendue.

ARTICLE PREMIER.

Des Lignes.

92. Soient marqués deux points sur un plan, ou dans l'espace; la ligne la plus courte que l'on puisse mener de l'un à l'autre est nécessairement une ligne droite; parceque la suite des points qui la composent & qui a son origine à un des points donnés, est dirigée vers un seul & même point. On trace une telle ligne, avec le secours, ou d'une régle, ou d'un cordeau, ou de piquets nommés jalons. une régle est-elle employée à cette opération, le côté parfaitement droit, qu'elle présente, est appliqué sur les points donnés; & le long de ce côté, on fait glisser une plume ou un crayon, qui marque une suite de points placés sur une même direction. Lorsqu'on se sert d'un cordeau (& c'est dans le travail des pieces de bois, qu'il est souvent mis en usage par les charpentiers): on le blanchit avec de la craie; on le roidit; on l'assujettit à passer par deux points donnés; on l'éleve ensuite au-dessus de ce plan, en le pinçant par son milieu; & sa tension qui le ramene vers le plan, lorsqu'il est abandonné à lui-même, lui fait imprimer sur ce même plan, la trace d'une ligne droite qui passe par les deux points proposés. C'est ainsi un cordeau bien tendu, qui, passant par les deux points *b* & *m*, où doivent être placées les extrémités de la quille *bm* d'un vaisseau qu'on se propose de construire (fig. 37), indique la suite directe des sommets de tous les tins destinés à supporter cette quille en divers points de sa longueur. Un cordeau est aussi employé pour indiquer la direction de la route d'un vaisseau qui s'avance dans l'espace; & voici comment on en fait usage. Une extrémité de ce cordeau, nommée ligne de lok, est attachée à une planchette, qui a la forme *abc* (fig. 101. G), & qui est nommée lok. Ce petit corps, chargé par sa base *bc* d'une certaine quantité de plomb, & jetté à la mer, peut flotter librement, s'enfonce assez profondement dans l'eau, pour résister aux legers efforts

qui tendroient horisontalement à le faire changer de place. La marche d'un vaisseau est-elle uniforme, on jette le lok *abc* sur le point de la mer que le vaisseau vient d'abandonner; & le cordeau, ou la ligne de lok, qu'on laisse alors s'étendre sur la surface de l'eau, à mesure que le vaisseau s'éloigne du lok, devient la ligne de direction de la marche de ce bâtiment, pendant la durée de l'observation qui est d'une demi-minute de tems. Si enfin il est question de tracer sur le terrein une ligne droite, dont les extrémités sont connues & peuvent être vues l'une de l'autre; on plante verticalement un piquet, ou un jalon sur chacune de ces extrémités; & ensuite on en plante d'autres intermédiaires; de maniere que ceux-ci soient placés exactement sur l'alignement des jalons extrêmes. Les sommets, de ces jalons multipliés à volonté, & bien alignés sur les deux points donnés, marquent ainsi sur le terrein, tous les points qui appartiennent à une même ligne droite; & on peut marquer la trace continue de cette ligne, à l'aide d'un cordeau qu'on étend sur la tête de tous les jalons.

93. Mesurer une ligne droite, c'est chercher combien de fois sa longueur contient celle d'une autre ligne connue, & qu'on est convenu de prendre pour unité (3). Les mesures de longueur qui sont le plus en usage dans la société, sont la toise, le pied, le pouce & la ligne. Dans la marine, on y ajoute la brasse, la palme, le nœud, & une longueur de cable (nommée encablure). On estime en pieds, & en parties de pied, la longueur d'un vaisseau, ses largeurs, son creux, la longueur de sa quille, celle des différentes pieces de la coque d'un bâtiment, son tirant d'eau, l'élancement de son étrave, l'acculement de ses varangues, l'abaissement & l'élévation des marées, la hauteur de la mâture, la longueur des vergues, les dimensions des ancres, &c. Comme nous l'avons déjà dit; la brasse, qui est une longueur de 5 pieds, est employée pour mesurer, les profondeurs de la mer, la longueur des cordages tels que, les cables, les étais, les haubans, les galhaubans, &c. La palme, dont la longueur est de 13 lignes, sert à mesurer les diametres des mâts &

des vergues ; & c'est en encablures, ou en longueurs de 120 brasses, qu'on estime certaines distances peu considérables. Cette derniere unité sert aussi à mesurer la distance des vaisseaux qui naviguent de compagnie, celle des colonnes d'un armée navale en ordre de marche, ainsi que la longueur totale, ou de ces colonnes, ou d'une ligne de bataille. Enfin le nœud, dont la longueur est de 47 $\frac{1}{2}$ pieds, & qui est une des parties égales, dont une ligne de lok est composée, sert à mesurer, & la vitesse d'un courant des eaux de la mer, & la longueur de chaque partie élémentaire de la route d'un vaisseau ; c'est-à-dire l'espace, considéré comme rectiligne, que ce vaisseau parcourt pendant la durée d'un demi-minute de tems. Ainsi cette ligne de lok, qui est employée, comme on l'a déjà dit, à faire connoître la direction de la route d'un vaisseau, sert aussi à mesurer sa longueur, par le moyen de ses divisions, ou de ses nœuds. Nous dirons bientôt sur quelle base est fondé le choix de 47 $\frac{1}{2}$ pieds, pour la longueur de chaque nœud. Cette mesure, & toutes les autres (dont nous venons de faire l'énumération, comme étant adoptées dans la marine), sont celles qui portées convenablement sur la longueur de tous les objets qui ont été cités précédemment, servent, par leur nombre, à évaluer l'étendue en ligne droite, soit de ces mêmes objets, soit d'une infinité d'autres qui sont susceptibles d'être mesurés de la même maniere.

94. La définition déjà donnée des lignes courbes, annonce combien elles peuvent être variées & dans la grandeur de leur contour, & dans la position des points dont elles sont composées. Mais entre les courbes infiniment nombreuses qu'on peut imaginer, la géométrie de l'homme de mer ne considere que, les cercles, leur circonférence, & toutes leurs propriétés. Si elle traite de quelques autres courbes assez arbitraires, dont il est question dans l'art de la marine, telles que celles, des lisses, des lignes d'eau, des couples, des barres, des estains, & des sections qu'on peut faire, dans les baux, les mâts, les vergues, la carene, &c. ; c'est uniquement pour présenter les moyens de les décrire & de mesurer leur longueur, sans égard à leurs propriétés.

Déjà nous avons donné une idée d'un cercle quelconque & de sa circonférence ; & il seroit presque superflu d'indiquer comment on le décrit. Cependant, pour ne rien laisser à desirer, nous allons en présenter les moyens. Si on se sert d'un compas, son ouverture mesurée entre ses deux pointes, doit être égale au rayon; c'est-à-dire, à la distance qui doit régner entre le centre & les divers points de la circonférence. Alors on appuye une de ses branches, par la pointe, sur le centre qui est donné dans un plan ; on fait tourner la seconde branche autour de la premiere, comme autour d'un axe fixe ; & cette derniere, trace, par sa pointe, sur ce même plan, une courbe uniforme nommée circonférence de cercle. On employe aussi un cordeau dans le même dessein. On le fait d'une longueur égale à celle du rayon donné. On fixe une de ses extrémités sur le point qui, dans un plan, doit être le centre du cercle à décrire, & en faisant tourner ce cordeau tendu, dans le plan où le centre est placé, & autour de ce centre, la seconde de ses extrémités indique à chaque pas, le lieu des divers points de la circonférence demandée.

Si, sur un plan, plusieurs points sont désignés comme devant faire partie du contour d'une de ces courbes qui sont considérées dans l'architecture navale; & qu'il faille tracer le cours continu d'une telle courbe, ou faire passer une ligne, par tous les points donnés : voici le moyen employé dans la marine. On se sert d'une latte pliante, en bois de sapin, dont l'épaisseur diminue, d'une de ses extrémités à l'autre. On la force, en la courbant, de passer par tous les points supposés ; & à l'aide d'un crayon ou d'une pointe, qu'on fait glisser le long de cette latte, on trace sur le plan, la courbe demandée. Il est aisé de voir que la longueur de telles courbes, peut être mesurée en pieds & parties de pieds, [si elle est utile à connoître] par le moyen d'un fil dont on enveloppe la face extérieure de la latte pliante employée à ce tracé.

La longueur de la circonférence d'un cercle peut être déterminée par le même procédé. Elle peut être estimée aussi en pieds & parties de pied ; & on a reconnu que

le double du rayon d'un cercle, ou ſon diametre *zoq* (fig. 1), étant de 7 pieds, la longueur de ſa circonférence *czdq* eſt à-peu-près de 22 pieds. Ce rapport de 22 à 7, qui eſt celui de cette circonférence particuliere à ſon diametre, ſuffit, comme on le verra plus loin, pour trouver, ou la longueur de toute autre circonférence, étant donné ſon diametre; ou la grandeur du diametre d'une circonférence dont la longueur eſt connue. Ainſi il ſera prouvé, que la meſure de toute circonférence eſt reduite à celle d'une ſeule circonférence & de ſon diametre. Sans doute on conçoit, que plus le rayon d'un cercle eſt grand, plus auſſi la longueur de ſon contour eſt conſidérable: mais ſi cette diverſité d'étendue différencie les circonférences, certaine raiſon d'analogie tend auſſi à les rapprocher. Car il y a une égale régularité dans leur courbure; & une reſſemblance parfaite regne entre leurs formes. Ces rapports de ſimilitude, ainſi que d'autres raiſons de convenance & d'utilité, ontdonc fait adopter la convention de regarder toutes les circonférences de cercle, comme étant compoſées chacune de 360 parties égales nommées dégrés. Ainſi les plus grandes, comme les plus petites, ſont également partagées en 360 dégrés. On eſt convenu auſſi de conſidérer, chacun de ces dégrés comme compoſé de 60 parties égales nommées minutes; & chaque minute de 60 ſecondes. C'eſt en faiſant uſage de cette diviſion conventionnelle, qu'on déſigne la grandeur, d'un arc, c'eſt-à-dire, de telle portion d'une circonférence quelconque; par le nombre de dégrés dont cet arc eſt compoſé: & c'eſt en indiquant le rayon de cet arc, ou de la circonférence dont il fait partie, qu'on donne une idée de la grandeur de chaque dégré.

Les hommes de mer ont adopté la diviſion de d'une circonférence en 360 dégrés; mais ils en ont imaginé une autre qui leur eſt particuliere. ils partagent la circonférence de la roſe des bouſſoles, en 32 parties égales, dont chacune eſt par conſéquent de 11 dégrés 15 minutes; afin que chaque rayon mené du centre aux extrémités de ces arcs, puiſſe déſigner, ſous le nom d'air de vent, la direction, ou du vent

regnant,

régnant, ou de la route d'un vaisseau. La circonférence *zdqc* (fig. 1) présente ces dernieres divisions. Les rayons, tels que *od*, *oq*, *oz*, &c. qui sont tracés sur son plan, sont ceux qui portent le nom commun d'airs de vent, & qui d'ailleurs reçoivent encor un titre distinctif pour annoncer leur position à l'égard des 4 points principaux de l'horison.

Entre toutes les courbes possibles, autres que celles, ou des couples (fig. 27 & 47 G), ou d'une ligne d'eau (fig. 24), ou d'une lisse (fig. 48 & 69), ou d'un estain (fig 61, 66 & 67), ou des barres d'arcasse (fig. 59), dont les contours sont tracés & mesurés, comme on l'a dit précédemment; il en est dont il importe particulièrement aux hommes de mer de connoître exactement la longueur, pour exécuter avec sûreté diverses opérations de la navigation. Ces courbes sont, 1.° celle qu'un vaisseau trace dans sa route sur la surface du globe, ou telle que *mi* (fig. 7), qui est réprésentée sur le contour de la sphere *abcde*; & 2.° celle de la circonférence d'un grand cercle, de la terre dont on suppose la figure parfaitement sphérique, quoiqu'elle s'écarte un peu de cette forme réguliere. Soit *aec* (fig. 102 G) la route d'un vaisseau sur une portion *bqd* de la surface de la mer. Elle est courbe, puisqu'elle est tracée sur une surface courbe; & cette courbure est d'autant plus sensible, que l'espace parcouru par un vaisseau est plus considérable. On a vu comment on détermine la direction de chacune des parties élémentaires de cette route: & on trouve leur longueur, en la mesurant à l'aide de la ligne de lok, lorsqu'elle est divisée en nœuds, comme on l'a dit précédemment. Cette longueur est indiquée par le nombre des nœuds qu'on laisse librement s'étendre sur la surface de la mer, ou sur la trace de la marche du bâtiment, pendant la durée de l'expérience, qui est toujours d'une demi-minute. Ainsi, en supposant qu'on mesure toutes ces routes partielles, & qu'on les réunisse ensuite en une seule & même somme, on peut parvenir à connoître la longueur totale de la route *ac* d'un bâtiment. Mais alors cette longueur ne seroit évaluée qu'en nœuds; & comme il est impor-

tant aux navigateurs que, dans ses positions toujours changeantes, un vaisseau puisse sans cesse être comparé à divers points de la surface du globe, il est devenu nécessaire de chercher le rapport de la grandeur de chaque nœud, à celle de la circonférence d'un grand cercle du globe. Celle-ci a été détérminée en mesurant immédiatement en toises, plusieurs de ses dégrés; & on a trouvé, en supposant la terre parfaitement sphérique, comme en prenant un milieu entre les dégrés mesurés, que chaque dégré de la circonférence d'un grand cercle de la terre, a une longueur de 57030 toises. On est convenu ensuite de donner le nom de lieue marine au 20 e de l'étendue de chacun de ces dégrés, c'est-à-dire de faire cette lieue de $2851\frac{1}{2}$ toises, ou de 17109 pieds. Enfin chaque nœud de la ligne de lok a été fait égal à la 120.e partie d'un tiers de lieue. La grandeur de la lieue, & celle du nœud, ont ainsi un rapport déterminé avec la grandeur des dégrés du globe; & sous ce point de vue, elles peuvent servir de mesures convenables; savoir, la lieue pour exprimer les plus grandes distances & les plus longues routes des vaisseaux; & le nœud pour apprécier les plus petits changemens de position d'un vaisseau en mouvement sur la surface de la mer. Cette derniere mesure n'a pas été seulement imaginée pour aider à connoître le chemin fait par un bâtiment pendant une demi-minute de tems; mais aussi pour que d'un tel chemin bien mesuré, on put conclure facilement l'espace que le même vaisseau parcourt dans une heure, en supposant sa marche uniforme. C'est ainsi que s'il franchit un espace égal à 4 nœuds, pendant la durée d'une demi-minute, ou pendant la 120es partie d'une heure; il doit, lorsque sa vitesse reste constante, faire, pendant une heure entiere, 120 fois plus de chemin que pendant le tems de l'expérience. Il doit donc faire 120 fois les $\frac{4}{120}$es d'un tiers de lieue, ou $\frac{4}{3}$ de lieue. En général, un bâtiment qui file un certain nombre de nœuds, doit être supposé faire par heure autant de tiers de lieue; & c'est en calculant, de la même maniere, le chemin parcouru pendant chaque heure du

jour, qu'on conclut par une ſimple addition, la route qu'il fait en 24 heures.

95. *Des angles rectilignes.* Deux lignes tracées ſur un même plan, peuvent être ſituées l'une à l'égard de l'autre, ou parallélement ou obliquement, ou perpendiculairement: & ſi, en ſe rencontrant, elles ſe touchent ou ſe traverſent, en un point qui alors leur devient commun, elles font entr'elles, comme on l'a déjà dit (91), des angles plus ou moins ouverts; ou elles ont entr'elles une inclinaiſon, qui eſt auſſi variable qu'il y a de poſitions relatives à leur donner.

Deux lignes ſont paralleles, lorſque tracées ſur un même plan, & telles que *ab* & *co* (fig. 8), tous leurs points correſpondans ſont à égale diſtance l'un de l'autre: c'eſt-à-dire, lorſque leur intervalle, meſuré au point *a*, & enſuite au point *o*, ou à une diſtance plus ou moins grande du point *a*, eſt conſtamment le même; de ſorte que ces lignes, quoique prolongées auſſi loin qu'on peut le ſuppoſer, ne doivent jamais ſe rencontrer.

Des lignes ſont obliques, lorſqu'inclinées les unes aux autres, & partant de divers points du plan ou elles ſont ſituées, elles ſe rencontrent ou peuvent ſe rencontrer dans leur prolongement. Telles ſont les lignes *ab* & *ed*. Remarquons, 1.° que le point de rencontre, ou d'interſection de deux lignes, telles que *ob* & *ab* (fig. 1), reçoit le nom de ſommet, de l'angle que ces lignes forment entr'elles; 2.° que celles-ci ſont nommées les côtés de l'angle; & 3.° que généralement on déſigne un angle, tel que *oba*, par trois lettres, dont l'une *b*, qui eſt au ſommet, eſt toujours nommée au milieu des deux autres *a* & *o*, placées ſur un des points de chaque côté de l'angle. Cependant on déſigne ſouvent un angle par la ſeule lettre de ſon ſommet, lorſque ce même ſommet n'eſt pas commun à pluſieurs angles.

On dit d'une ligne telle que *ca* (fig. 9) qu'elle eſt perpendiculaire à la ligne *ed*, lorſqu'elle ne penche pas plus vers le côté *ce*, que vers ſon prolongement *cd*. De-là on peut conclure que ſi le point *c* eſt également éloigné de *e* & de *d*, tout autre point de la ligne *ac*

eſt auſſi également éloigné des mêmes points *e* & *d*. En effet, ſoit un autre point *a* qui appartient à la perpendiculaire *ac*, ſes diſtances aux points *e* & *d* ſont les lignes *ae* & *ad*, & elles ſont parfaitement égales. Car ſuppoſons l'angle *acd* replié ſur l'angle *ace*, de maniere que *ac* ſoit dans le pli: puiſque la ligne *ac* eſt inclinée ſur *cd*, comme elle l'eſt ſur *ce*, l'ouverture des deux angles *ace* & *acd* doit être la même; ainſi le côté *cd*, dans cette ſuperpoſition, doit s'étendre ou s'appliquer ſur le côté *ec*: & comme *ec* eſt égal à *cd*, le point extrême *d* doit s'appliquer ſur le point *e*; c'eſt-à-dire, que les extrémités de la ligne *ad*, (puiſque *a* reſte fixe) tombent ſur celles de la ligne *ae*. il y a donc égalité parfaite entre les diſtances *ae* & *ad*. Comme on peut étendre le même raiſonnement à la poſition de tout autre point de *ac*, comparé ou aux extrémités de *ed*, ou à des points de cette ligne également diſtans de *c*; on peut dire généralement que ſi une ligne eſt perpendiculaire ſur le milieu d'une ſeconde ligne, tous les points de la premiere ſont également éloignés des extrémités de la ſeconde. Si la ligne *ac* eſt prolongée juſqu'en *i*, & ſi on mene les deux lignes *ei* & *id*, la ligne *ai* eſt viſiblement plus courte, que la ſomme des deux lignes *ei* & *ea*, ou que celle de *id* & *da*. C'eſt pourquoi, ces lignes étant conſidérées dans un cercle dont *ac* & *ci* ſont deux rayons, la ligne *ac*, ou la perpendiculaire abaiſſée du point *a* ſur *cd*, doit être plus courte que toute autre ligne qu'on peut ſuppoſer menée du même point *a*, à un point quelconque de la ligne *ed*. L'angle *acd*, formé par les deux lignes *ac* & *cd* qui ſont perpendiculaires l'une à l'autre, eſt nommé angle droit.

Si une ligne telle que *cb*, eſt plus penchée vers le deuxieme côté *cd*, que vers ſon prolongement *ce*, cet angle *bcd* eſt nommé aigu; mais il eſt dit obtus, lorſque *uc* eſt moins penchée ſur le ſecond côté *cd*, que ſur *ce*, prolongement de *cd*. On voit ainſi que l'ouverture d'un angle, ou l'inclinaiſon de deux lignes, peut être grandement diverſifiée. Il eſt extrémement utile aux hommes de mer, de ſavoir meſurer des angles donnés, comme de ſavoir former des angles d'une

grandeur déterminée ; & on est convaincu de cette nécessité, lorsqu'on parcourt, même rapidement, les différentes branches de l'art de la marine.

Dans les vaisseaux, les mâts sont, ou perpendiculaires, ou inclinés à la quille ; les manœuvres dormantes & courantes font divers angles avec les objets auxquels elles sont attachées ; l'effet du gouvernail dépend de l'angle d'incidence sous lequel l'eau environnante vient le frapper. Il en est de même de la résistance de l'eau ; de l'action, des courans, des lames, & de l'effort des vents sur les voiles. Le navigateur, en mer, observe l'angle que fait la route d'un vaisseau, soit avec sa quille, soit avec d'autres lignes déterminées, les inclinaisons latérales des bâtimens, les angles sous lesquels il apperçoit des objets éloignés, soit dans le ciel, soit autour de lui. C'est aussi par des angles qu'il juge de sa position relativement à tous les points auxquels il se compare ; c'est-à-dire, qu'il juge ainsi s'il est au vent, ou sous le vent ou par le travers de ces mêmes points. Les ancres sont conformées de maniere qu'elles présentent leurs pattes au sol qu'elles doivent pénétrer, sous l'angle le plus favorable à l'amarrage des bâtimens. Dans les ports, les charpentiers, pour travailler les pieces composantes d'un vaisseau, ont recours à des équerrages, à des perpendiculaires, à des obliques ; ils en font usage pour disposer convenablement ces pieces, en élevant ces grands édifices, & ils donnent aux cales de construction une pente assortie à la grandeur des bâtimens. Dans l'architecture navale, toutes les lignes projettées sur des plans, font aussi entr'elles des angles dont la grandeur est fixée d'après certains rapports. Ainsi aucune des parties de l'art de la marine, ne peut être exercée avec succès, sans qu'on connoisse comment on mesure des angles quelconques, comment on leur donne une grandeur convenue, comment on les compare, comment on fixe leurs rapports, & enfin comment on applique cette théorie aux besoins de cet art.

On a satisfait à ces vues particulieres, en ayant égard à des considérations plus générales ; & on a établi une mesure commune qui sert à estimer exactement l'incli-

naiſon d'une ligne à une ligne. La circonference d'un cercle quelconque, dont le centre eſt au ſommet d'un angle, a paru préſenter une meſure convenable; & la régularité de ſon contour, ainſi que ſes diviſions en dégrès, minutes & ſecondes, l'ont fait reconnoître pour une échelle uniforme, autant qu'étendue & préciſe. On eſt donc convenu d'adopter cette baſe, & voici comment on a raiſonné pour exprimer, à l'aide des diviſions d'une circonférence de cercle, la valeur d'un angle quelconque.

96. Soit l'angle *bcd* (fig. 9), qui eſt formé par l'inclinaiſon de la ligne *bc* ſur la ligne *cd*. On peut ſuppoſer que cette inclinaiſon, d'abord nulle, a augmenté graduellement; ou autrement, on peut ſuppoſer que la ligne *bc*; avant d'être arrivée dans la poſition qui lui eſt donnée dans cette figure, étoit d'abord couchée ſur la ligne *cd*, & qu'enſuite en tournant ſur ſon extrémité *c*, elle eſt parvenue à faire avec elle un angle tel que *bcd*. En donnant cette origine naturelle à l'angle *bcd*, on voit que ſi chaque point de *bc*, dans la rotation ſuppoſée, laiſſe après lui une trace de ſa marche, cette trace devient un arc de cercle décrit du point *c* comme centre; parceque chaque point, dans ce mouvement, reſte ſans ceſſe à une même diſtance de ce centre. On voit auſſi que la grandeur de ces arcs augmente & diminue, ſelon que l'inclinaiſon de *bc* ſur *cd* devient ou plus grande ou plus petite; & que tous ces arcs, tels que *bd* & *zs*, ſont compoſés d'un même nombre de dégrès, quoique leur longueur ſoit différente. Car les points *b* & *z*, qui par un mouvement uniforme, commenceroient & finiroient en même tems de tracer chacun une circonférence entiere, ou 360 dégrès, décrivent néceſſairement, dans un même tems, des arcs d'un même nombre de dégrès, & tels que *sz* & *db*. Ainſi, puiſqu'il eſt évident que plus l'ouverture d'un angle eſt conſidérable, plus auſſi ſont nombreux les dégrès d'un quelconque de ces arcs compris entre ſes côtés, & décrits de ſon ſommet comme centre; puiſque le nombre de ces degrés change avec cette ouverture, & dans le même rapport; ou, puiſqu'en ſuppoſant que l'angle

bcd eſt la moitié de *acd*, l'arc *ad* eſtimé en dégrès eſt double de *bd*; on doit conclure que la meſure d'un angle quelconque eſt le nombre de dégrès, & de parties de dégrès de l'arc compris entre ſes côtés, & décrit de ſon ſommet comme centre.

La meſure de l'angle *bcd* eſt donc l'arc *bd*; celle de *acd* eſt *ad*, & celle de *ucd* eſt *uad*. Tous ces angles, & tous ceux qu'on peut concevoir dans l'ouverture de l'angle *ucd*, peuvent être ſuppoſés formés ſucceſſivement par la rotation de la ligne *dc* autour du point *c*, à commencer du point *d*. On peut imaginer auſſi que la rotation continuée de *dc* autour de *c*, ait amené cette ligne dans la poſition *ce*, ou dans le prolongement de la direction primitive de *cd*. Alors l'extrémité *d* ſe trouveroit avoir décrit la moitié de la circonférence entiere. Car ſi on concevoit que cette extrémité *d*, au-lieu de tracer l'arc *dbae*, eût tourné dans le ſens oppoſé, & eût parcouru l'arc *dite*; la ligne *cd* ſeroit auſſi parvenue dans la poſition *ec*, après avoir formé, dans ce mouvement, des angles de même grandeur & en même nombre, que lorſque *d* décrivoit *dbae*: par conſéquent la partie *dite* de la circonférence tracée, doit être égale à *dbae*. La ligne *ed*, qui ſépare ces deux arcs, eſt nommée diametre. Ainſi toute ligne qui menée dans un cercle, paſſe par le centre *c* & aboutit à deux points oppoſés *e* & *d* de la circonférence, partage celle-ci en deux parties égales.

97. Un angle tel que *acd* eſt-il droit, ou la ligne *ac* eſt-elle perpendiculaire à *cd*? ſa meſure, qui eſt l'arc *ad*, eſt de 90 dégrès. Car comparons l'angle *acd* avec l'angle *ace*, qui eſt formé par *ac* & par le prolongement de *cd*; ils doivent être égaux, puiſque *ac* penche également vers *cd* & vers *ce*. Leurs meſures ſont donc égales; mais la ſomme de ces meſures, qui ſont *ea* & *da*, vaut 180 dégrès, parceque *ecd* eſt un diametre; par conſéquent, la meſure de l'angle *acd*, ou celle d'un angle droit, eſt de 90 dégrès. De-là il réſulte que la meſure d'un angle aigu, tel que *bcd*, eſt toujous plus petite que 90 dégrès; & que celle d'un angle obtus, tel que *ucd*, ſurpaſſe toujours celle de l'angle droit. La

différence des valeurs d'un angle aigu, ou d'un angle obtus, à celle d'un angle droit, ou à 90 dégrès, est nommée le complément de ces premiers angles; tandis que la différence de la valeur de ces mêmes angles à la grandeur de la demi-circonférence, ou à 180 dégrès, reçoit le nom de supplément de ces angles. C'est ainsi que le complément de *bcd*, est l'angle *bca* ou l'arc *ba*; celui de *ucd* est *uca* ou *ua*. Le supplément de *ucd* est *ue*, & celui de *bcd* est *bae*. De-là on doit conclure que si deux angles différent également, ou de 90 dégrès, ou de 180 dégrès; c'est-à-dire, s'ils ont des compléments égaux ou un même supplément, ils sont nécessairement de même grandeur.

L'inspection de la figure démontre aussi que si une ligne telle que *bc*, rencontre une autre ligne, telle que *ecd* & sans la traverser, en un point *c*; elle fait avec celle-ci deux angles *bcd* & *bce*, qui valent ensemble 180° ou qui sont supplémens l'un de l'autre). Car en traçant de leur sommet commun *c*, comme centre, les arcs qui sont leur mesures, la somme *dbae* de ces arcs vaut 180 dégrès; puisque la ligne *ecd* est un diametre. Si la ligne *bc* est supposée prolongée au-delà de *c*; ou si deux lignes, telles que *bt* & *ed*, se croisent en un point *c*, il y a égalité entre l'angle *bcd* & l'angle *ect*, (qui ayant un même point pour sommet, & leurs ouvertures opposées, sont nommés angles opposés au sommet). Car décrivons du sommet commun, comme centre, les mesures de ces angles, & même la circonférence entiere, les lignes *ed* & *bt* sont deux diametres; les angles *bcd* & *ect*, ont donc chacun pour supplément le même angle *bce*; & par conséquent les angles *bcd* & *ect*, opposés au sommet, sont égaux. On doit prononcer, par la même raison, l'égalité des angles *tcd* & *bce*, qui sont aussi opposés au sommet.

Si deux lignes paralleles *ab* & *co*, tracés sur un même plan, sont traversées par une troisieme ligne *def*, nommée sécante; cette derniere doit être également inclinée sur les deux paralleles. Ainsi il y a égalité, entre les angles *deb* & *cio*, entre *dea* & *dic*, entre *feb* & *fio*, & entre *aei* & *cif*. On peut dire aussi qu'il y a égalité

entre les angles *deb* & *cif*, (qui ſont nommés alternes-externes, parceque tous deux ſont placés hors de l'eſpace *aboc* qu'embraſſent les paralleles, & parce que l'un eſt à droite, tandis que l'autre eſt à gauche de la ſécante). Car la ſécante étant également inclinée ſur les paralleles, & l'angle *cio* étant oppoſé au ſommet, à l'égard de l'angle *cif*, les deux angles comparés ſont l'un & l'autre égaux au même angle *cio*; & par conſéquent, ils ſont égaux entr'eux. De même les angles alternes-internes, tels que *aei* & *eio*, ſont de même valeur comme étant égaux chacun à un 3.e angle *deb*. Car celui-ci & l'angle *aei* ſont oppoſés au ſommet; & *eio* eſt égal à *deb*, à cauſe de l'égale inclinaiſon de la ſécante ſur les paralleles; par conſéquent, les angles alternes-internes ſont égaux. Si on compare deux angles externes, & placés du même côté de la ſécante, tels que *deb* & *oif*, on trouve qu'ils ſont ſupplémens l'un de l'autre. Car *deb* eſt égal, à *cio* qui a *fio* pour ſupplément. Enfin les angles internes, ſitués du même côté de la ſécante, & tels que *bei* & *eio* ſont auſſi ſupplémens l'un de l'autre; puiſque *bei* eſt égal, à *fio* qui a pour ſupplément *eio*.

De toutes ces propriétés, il réſulte qu'il y a égalité entre des angles tels que *mse* & *eio*, qui ont leurs côtés paralleles, & qui préſentent leur ouverture dans le même ſens. En effet, les côtés *se* & *ic* étant prolongés, ſe coupent en un point *e*; & alors l'angle *deb*, que les prolongemens forment enſemble, eſt égal à chacun des deux angles donnés. Il l'eſt à *mse*, parceque la ſécante *se* eſt également inclinée ſur les paralleles *sm* & *de*, & il l'eſt à *eio*, parceque la ſécante *di* eſt auſſi également inclinée ſur les paralleles *sb* & *fo*: donc les angles annoncés ſont égaux.

99. Après avoir poſé les baſes de la meſure & du rapport des angles, il faut, afin de favoriſer les opérations des hommes de mer, indiquer les moyens, ou les inſtrumens convenables, ſoit pour meſurer tous les angles qui peuvent entrer dans les calculs des marins, ſoit pour tracer ſur le papier, ou ſur des plans quelconques, ceux dont la grandeur eſt déter-

minée. Les charpentiers de vaisseaux employent pour mesurer un angle quelconque, une fausse équerre (fig. 13), dont les deux branches AB & BD, réunies par une charniere en B, peuvent, en s'ouvrant, ou en se resserrant, former des angles de toute grandeur. C'est avec cette équerre qu'ils mesurent, sur le plan d'un vaisseau à construire, l'angle que doit former, par exemple, le gabariage *nm* d'un couple (figure 69. G) avec l'élément *nr* du contour d'une lisse *afno*. Une des branches est placée sur *nr*, le sommet B au point *n*, & la seconde branche sur *nm*. Si cet angle, ainsi mesuré, est aigu, comme *mnr*, ils le nomment un équerrage en maigre; & s'il est obtus, comme *fek*, l'équerrage est en gras. C'est avec de pareils équerrages, mesurés sur les plans des lisses, & portés aux divers points de l'arrête *oen* d'une piece de bois, (fig. 62. G) qu'ils dirigent la conformation de cette piece. Si l'équerrage de cette piece en *e* est donné; ils la taillent de maniere, que, sur chaque face *ionm* & *lonp*, des lignes *re* & *eu*, tracées avec des directions déterminées, forment entr'elles un angle égal à l'équerrage mesuré.

D'autres instrumens servent à mesurer la grandeur des angles, par la valeur des arcs de cercle qu'ils embrassent entre leurs côtés, & qui sont décrits de leur sommet comme centre. Ces instrumens sont connus sous les noms de sextant, d'octant, de cercle, de graphometre, de boussole, & de rapporteur. Les trois premiers sont sur-tout relatifs aux observations astronomiques, & c'est en traitant de celles-ci que nous en présenterons la description. Au reste, dans leur construction, ils n'offrent que la forme, ou d'un cercle, ou d'une portion de cercle, dont la circonférence est divisée en dégrès & parties de dégrè, ainsi que tous les moyens nécessaires pour rendre leur usage aussi sûr que commode. Le graphometre est un instrument en cuivre, qui est composé d'un demi-cercle *debc* (fig. 10), dont la circonférence est divisée en dégrès & parties de dégrè. Un de ses diametres *ab* est nommé alidade, parceque mobile, il porte sur ses extrémités une pinnule, & parcequ'il peut tourner librement autour du centre *u*,

dont il ne peut s'écarter. Dans cet état, s'agit-il de mesurer un angle *oui*, sous lequel l'œil d'un observateur en *u*, doit voir les objets *i* & *o*; l'instrument est placé dans le plan de ces objets, & de maniere que le point *i* soit vu de l'observateur sur la direction d'un autre diametre fixe *duc*, qui porte aussi à cet effet une pinnule sur chacune de ses extrémités. Ensuite on fait tourner l'alidade mobile *ab*, jusqu'à ce qu'à travers les pinnules *a* & *b*, l'observateur apperçoive l'objet *o*; & l'arc compris entre les côtés de l'angle *buc*, ou de *oui*, est la mesure de l'angle cherché, exprimé en dégrès & parties de dégrè.

La boussole est souvent employée par les hommes de mer, pour mesurer des angles. Cet instrument est formé d'une boîte, au milieu de laquelle est suspendue horisontalement, sur un pivot vertical, une aiguille aimantée, qu'on fait avoir la propriété de rester dans une même position, & d'y revenir lorsqu'elle en est écartée. Cette aiguille, qui tourne librement sur un pivot, & qui peut ainsi, dans tous les tems, prendre sa situation naturelle, porte un carton circulaire, tel que NOSE (fig. 12), qui est nommé rose de compas, dont le centre est le sommet du pivot, dont la circonférence est divisée en 360 dégrés, & sur lequel 32 rayons, menés aux extrémités de 32 arcs de 11 dégrès 15 minutes, indiquent autant d'airs de vent. Soient deux objets *b* & *u*, & soit demandé l'angle que forment entr'eux les rayons visuels menés de ces deux points à l'œil d'un observateur, placé au point *c*. Comme il y a deux pinnules sur les côtés opposés de la boîte, en *a* & en *d*, & sur la direction d'un des diametres de la rose, on observe d'abord l'arc N*d*, qui est la mesure de l'angle *bc*N, formé entre la direction N*s* de l'aiguille, & le rayon visuel *acdb* mené à l'objet *b*. Ensuite présentant les pinnules vis-à-vis l'objet *u*, on observe l'arc N*i*, qui est la mesure de l'angle de l'aiguille avec le rayon visuel *uic*; & la différence des deux arcs mesurés est, dans le cas supposé, la mesure de *dei*, ou de l'angle sous lequel les objets *b* & *u* sont vus du point *c*.

Afin de faire connoître d'autres usages de la boussole,

nous devons présenter quelques idées particulieres & éloignées du sujet. La définition de la sphere qu'on a déjà donné ailleurs (91), est celle de la forme de notre globe, & sa sphéricité est demontrée; non seulement par la figure circulaire de son ombre dans les éclipses de lune, mais aussi par les observations des voyageurs qui ont fait le tour du monde, & auxquels les astres ont toujours paru changer de position relative, suivant la direction & la longueur de la route des vaisseaux. Le globe étant donc considéré comme une sphere, on peut imaginer des circonférences de grand cercle tracées sur sa surface (91); & comme le mouvement diurne de tous les points du ciel, démontre que le globe tourne sur lui-même en 24 heures, on peut supposer que plusieurs de ces circonférences passent par les deux points, autour desquels le globe semble faire sa revolution journaliere. De tels cercles ainsi placés, & tels que *azp* & *aup* (fig. 7), reçoivent le nom de méridiens; & le cercle *buen*, qui est situé à égale distance des poles de la terre, est nommé l'équateur du globe. Après cette explication, on voit que, pour chaque point *t* d'une route *md* que fait un vaisseau, on peut imaginer un méridien *atup*, qui traverse cette route; & le point d'intersection est le sommet de l'angle que fait en ce point *t*, la route du vaisseau, avec la direction du méridien du lieu. C'est un tel angle que les navigateurs en mer s'appliquent à mesurer, à tout instant, & à l'aide de la boussole. Ils cherchent, par des observations astronomiques dont nous parlerons ailleurs, l'angle que la direction *ub* de l'aiguille aimantée (fig. 96. G), fait avec celle *is* du méridien du lieu; & ensuite par l'angle que cette même aiguille leur paroît faire avec la direction de la route, ils déterminent l'angle véritable *ati* (fig. 7) qui est formé entre la route & le méridien du lieu. Cet angle est nommé le rhumb de vent de la route d'un bâtiment.

C'est ainsi qu'on estime, en mer, les véritables directions des vents, des courans, & de la quille d'un vaisseau, en mesurant les angles qu'elles font avec celles de l'aiguille aimantée. C'est encore à l'aide de cet instru-

ment, qu'une armée navale combine ses dispositions, ses mouvemens; qu'on dirige, la nuit comme le jour, à travers les plus vastes mers, un vaisseau destiné pour un point déterminé de la surface du globe; & que les navigateurs jugent de leur position respective, soit entr'eux, soit à l'égard de tout objet extérieur.

L'emploi étendu, varié & fréquent qu'on fait ainsi de la boussole, a fait imaginer de donner des noms particuliers à chacun des 32 airs de vent, qui sont tracés sur la rose & la seule inspection des noms que reçoivent les airs de vent menés dans le 1.^r quart de cette rose, (& dont nous allons faire l'énumération), suffira sans doute pour donner une idée des dénominations distinctives des autres airs de vent, tracés dans les autres quarts de la rose.

Deux diametres perpendiculaires l'un à l'autre, NS & OE (fig. 12), représentent, l'un la direction de l'aiguille placée sous le carton NOSE; & l'autre la ligne menée de l'orient à l'occident magnetiques sur l'horison du lieu. La ligne NS, est aussi nommée méridien magnétique: Les extrémités de ces lignes indiquent par conséquent à-peu-près les quatre points principaux de l'horison, lorsque l'aiguille aimantée ne s'éloigne, de la direction réelle du méridien, que d'une quantité à-peu-près connue. Les rayons, ou les airs de vent, CN & CO, sont nommés le nord & l'ouest; c'est-à-dire, qu'un vaisseau qui court de C vers N, ou vers O, est dit courir au nord ou à l'ouest Un air de vent mené entre le N & l'O, & qui partage également le quart de la circonférence NO, est nommé le nord-ouest, ou NO, du nom des airs de vent N & O, entre lesquels il est placé. Deux autres rayons menés au milieu de l'intervalle qui sépare le NO, du N & de l'O, sont des airs de vent, qui reçoivent aussi un nom composé de ceux des airs de vents entre lesquels ils se trouvent; de sorte que l'air de vent dirigé de *c* en *g*, est écrit NNO, ou nommé nord-nord-ouest; & celui qui est mené au point *h*, est distingué sous le nom de ONO, ou ouest-nord-ouest. Enfin quatre rayons qui partagent également les intervalles des airs de vent déja désignés, ont aussi des

noms diſtinctifs. Celui qui eſt entre l'O & le ONO, eſt placé au quart de l'eſpace qui ſépare l'O & le NO; c'eſt pourquoi il eſt nommé O$\frac{1}{4}$NO, ou oueſt-quart-nord-oueſt. Cette dénomination indique qu'un tel air de vent eſt voiſin de l'oueſt, mais qu'il en eſt éloigné du côté du N, à une diſtance égale au quart de l'eſpace compris entre le NO & l'O. Les trois autres airs de vent, par des raiſons ſemblables, ſont nommées NO$\frac{1}{4}$O, NO$\frac{1}{4}$N, & N$\frac{1}{4}$NO. On voit aiſément par ces détails, quels ſont, dans les trois autres quarts de la roſe, les noms analogues qui diſtinguent les airs de vent qui y ſont tracés : ainſi il ſeroit ſuperflu de prolonger cette énumération.

100. Enfin, il eſt un autre inſtrument qui ſert à meſurer des angles tracés ſur le papier, & qui eſt nommé rapporteur (fig. 11). Il eſt en cuivre, ou en corne, & compoſé d'une demi-circonférence *irom*, qui eſt diviſée en dégrès. S'agit-il de l'employer à meſurer un angle donné? on place le demi-cercle *irm* de maniere que l'angle donné *pun* ait ſon ſommet au centre *u*, & qu'un de ſes côtés *un* ſoit dirigé ſuivant *um*; alors l'autre côté *up* de l'angle donné, indique, par ſa direction qui croiſe en *o* la demi-circonférence *irm*, l'arc *om* qui eſt la meſure de cet angle donné.

C'eſt avec un tel inſtrument qu'on peut mener par un point donné, tel que *e* (fig. 8), une ligne parallele à *co*. Car en traçant une ſécante quelconque *df*, qui paſſe par le point donné *e*, tout ſe réduit à mener par le même point *e*, une ligne qui faſſe avec *def* un angle égal à *dio* (98). C'eſt pourquoi on meſure ce dernier angle avec cet inſtrument, nommé rapporteur : on place enſuite ſon centre en *e*, en dirigeant ſon diametre ſur *ed*; & enfin, par l'extrémité de l'arc meſuré, ainſi que par le point *e*, on mene une ligne *eb*, qui eſt néceſſairement parallele à la ligne donnée *co*, puiſque la ſécante *df*, eſt alors également inclinée ſur les deux lignes *co* & *eb*.

101. Nous venons de voir ſur quels principes repoſe l'art de meſurer les angles; nous avons fait connoître des inſtrumens imaginés pour prendre ou marquer ces

mesures: nous avons fait voir comment on doit procéder pour faire former à deux lignes droites un angle qui est déterminé, parcequ'il est égal à un angle connu ainsi il nous reste à dire comment on doit tracer sur le papier un angle qui ait une valeur de N dégrès. On tire la ligne *cy* (fig. 9), & du point *c*, comme centre, on décrit, avec un rayon quelconque *dc*, ou *sc*, ou *cy*, un arc qui soit du nombre N de dégrès; alors, par l'extrémité de cet arc, & par le centre *c*, on mene une ligne indéfinie *cb*, & cette ligne forme avec *cy* l'angle demandé. Le rapporteur rend cette opération facile (fig. 11): on mene une ligne *un*, & on la destine à devenir un des côtés de l'angle cherché; on place le centre du rapporteur sur un point *u*, de cette ligne, qui d'ailleurs est dirigée suivant le diametre *im* de l'instrument; on tire une ligne *up*, par le centre *u*, & par l'extrémité *o* de l'arc *om*, qui a pour grandeur le nombre des degrés indiqués. L'angle *pum* devient alors celui qu'on s'étoit proposé de former.

C'est par un procédé à-peu-près semblable, qu'on pourroit mener une ligne dirigée perpendiculairement à une autre ligne donnée, ou qui feroit avec elle un angle droit; mais il est des moyens raisonnés pour y parvenir, sans avoir recours au rapporteur, & nous allons les exposer.

On sait qu'une ligne qui est perpendiculaire sur le milieu d'une autre ligne, a tous ses points également distans des extrémités de cette derniere; & on sait aussi que la direction d'une ligne quelconque est suffisamment indiquée par la position connue de deux de ses points. Ainsi, soit proposé d'élever une perpendiculaire sur le milieu de *ed* (fig. 9), tous les points de la ligne à tracer doivent être à égale distance de *e* & de *d*; par conséquent, pour la tracer, il suffit de trouver deux points qui soient placés à égale distance des deux extrémités *e* & *d*.

Du point *d* comme centre, & avec un compas dont l'ouverture soit plus grande que *cd*, soit décrit, au-dessus de *ed*, un petit arc, qui ait pour rayon *ad*: & si en-

ſuite du point *e* comme centre, avec la même ouverture de compas, on trace un autre petit arc, qui coupe le premier en *a*, ce point d'interſection eſt également éloigné de *e* & de *d*. En faiſant une ſemblable opération, avec la même, ou avec une autre ouverture de compas, ſoit au-deſſous, ſoit au-deſſus de *ed*; & en prenant pour centre les mêmes points *e* & *d*; on trouve un autre point d'interſection *n*, qui eſt auſſi également éloigné de *e* & de *d*. Alors ſi on mene de *a* en *n*, une ligne qui réuniſſe les deux points trouvés, cette ligne eſt la perpendiculaire cherchée; & elle paſſe par le milieu de *ed*, puiſque le point *c*, qu'elle a de commun avec elle, eſt, comme les points *a* & *n*, également éloigné des deux extrémités *e* & *d*.

Si la perpendiculaire demandée ne doit pas paſſer par le milieu de la ligne *ab*, (fig. 14), mais par un point donné *c*; alors on marque ſur cette ligne, & de part & d'autre de *c*, deux points *b* & *d*, également éloignés de *c*. enſuite on trace, de ces points *b* & *d* pris pour centre, & avec un rayon convenable, deux petits arcs qui ſe coupent en un point *e* placé au-deſſus de *ab*; & les points *c* & *e* étant deux points également éloignés de *b* & de *d*, la ligne *ec*, qui les réunit, doit être la perpendiculaire cherchée.

Si cette derniere ligne devoit être menée par l'extrémité *c* d'une ligne *ac*, alors ſi cette ligne peut être prolongée au-delà de *c*, on fait *cb* égal à *cd*; on cherche comme précédemment, un point *e* également diſtant de *d* & de *b*, & on mene la ligne *ec*, qui eſt perpendiculaire à l'extrémité *c* de la ligne *ac*. Nous verrons bientôt comment on doit s'y prendre, pour mener une telle perpendiculaire, dans le cas où la ligne donnée ne pourroit être prolongée.

Enfin ſi d'un point *e*, placé au-deſſus d'une ligne *ab*, on ſe propoſe d'abaiſſer ſur celle-ci une perpendiculaire, alors il faut trouver un autre point de cette perpendiculaire C'eſt pourquoi, on décrit un arc, du point *e* comme centre, & avec un rayon plus grand que la diſtance de *e* à la ligne *ab*, afin que cet arc coupe cette ligne en deux points *b* & *d*. Ces points d'interſection doivent

doivent être également éloignés de *e*; ainsi de ces points comme centre, & d'un même rayon quelconque, si on décrit deux petits arcs qui se coupent; leur intersection *z*, est aussi un point également éloigné, comme le point *e*, des deux points *d* & *b*: par conséquent, la ligne dirigée de *e* en *z*, tombe perpendiculairement, du point *e*, sur la ligne donnée *ab*; & satisfait à la question proposée.

L'art de mener des perpendiculaires, a de fréquentes applications dans la marine. Les plans des vaisseaux présentent plusieurs lignes perpendiculaires entr'elles; telles que celles qui représentent, des positions de couples, & des longueurs de lignes d'eau; ou celles qui sont des ordonnées de certaines sections; ou celles qui servent dans ces plans, de termes extrêmes de comparaison, comme les perpendiculaires de l'étrave & de l'étambot. Les charpentiers en font aussi un grand usage pour préparer, tailler & établir les pieces qui composent le corps d'un bâtiment. Ce sont des perpendiculaires, telles que *go* & *dr* (fig. 75.G) qui, abaissées de chaque extrémité de la quille, sur la flottaison d'un vaisseau, ou sur la ligne qui représente le niveau de la mer, & divisées en pieds & en demi-pieds, servent à faire de l'étrave *fg*, comme de l'étambot *de*, des échelles propres à indiquer, dans tous les tems, les tirans d'eau de l'arriere & de l'avant d'un vaisseau ainsi que leur différence. En mer, on juge qu'un objet se présente par le travers d'un vaisseau, lorsqu'il est placé sur une perpendiculaire élevée sur le milieu de la longueur de ce bâtiment; & reciproquement, un vaisseau est par le travers d'une baye ou d'un port, lorsqu'il se trouve sur une ligne qui est pendiculaire à l'ouverture de cette baye, ou de ce port. Lorsqu'en mer, on veut décider si des objets sont au vent ou sous le vent d'un vaisseau; on imagine une perperpendiculaire menée du point où est ce vaisseau, sur la direction du vent régnant; alors, tous ceux qui paroissent sur cette ligne, sont sur la perpendiculaire du vent; ceux qui sont au-dessus de cette ligne, du côté de l'origine du vent, sont jugés au vent de ce vaisseau; & ceux qui sont au-dessous de cette ligne, sont dits être

ſous le vent à lui. Les diſpoſitions relatives des armées navales, dependent de leur ſituation particuliere à l'égard du vent ; les combinaiſons des vaiſſeaux d'une même armée, & les changemens d'ordre, ſont dirigés auſſi ſur la poſition de la perpendiculaire du vent ; & enfin, dans les vaiſſeaux chaſſeurs ou chaſſés, les hommes de mer ſont ſans ceſſe occupés de leur ſituation à l'égard de cette même perpendiculaire, pour juger de leurs avantages, ou de leurs déſavantages, & ſouvent pour prévoir d'avance le ſort qui les attend.

102. Après avoir indiqué des cas nombreux, où dans la pratique de l'art de la marine, il eſt néceſſaire d'appliquer la théorie des perpendiculaires ; parcourons quelques autres conſéquences utiles, qui réſultent des mêmes principes.

Si dans un cercle *iabh* (fig. 15) on éleve une perpendiculaire *id* ſur le milieu d'une ligne *ab*, (qui joint les deux extrémités de l'arc *ab*, & qui, par cette raiſon, eſt nommée la corde de cet arc) ; une telle perpendiculaire paſſe par le milieu de l'arc *ab*, & par le centre du cercle. En effet, le point *d*, ainſi que tout autre point de *id*, eſt également éloigné des extrémités *a* & *b* ; les cordes menées de *d* en *a*, & en *b*, ſont donc égales. Mais dans un même cercle, des cordes égales, ne peuvent ſouſtendre que des arcs égaux ; puiſqu'en repliant la corde *db* ſur la corde *da*, de maniere que leurs extrémités ſoient placées exactement l'une ſur l'autre, les points de l'arc *db* doivent auſſi ſe confondre avec ceux de *da*, parcequ'autrement l'arc *db* n'auroit pas tous ſes points également diſtans du centre *o* : donc les arcs *db* & *da* ſont néceſſairement égaux : donc auſſi toute perpendiculaire abaiſſée ſur le milieu de la corde d'un arc dans un cercle, paſſe par le milieu de cet arc. Elle paſſe auſſi par le centre du cercle : car on ſait que ſi cette perpendiculaire n'étoit pas menée, & qu'il fallût trouver, hors de la ligne *ab*, un point de cette perpendiculaire ; on y parviendroit en décrivant deux petits arcs, des points *a* & *b* comme centres, avec un rayon égal à celui du cercle. Alors le point d'interſection de ces deux arcs ſeroit un des points de la perpen-

diculaire; & comme le même point est aussi le centre du cercle, il s'ensuit que toute perpendiculaire sur le milieu d'une corde, passe par le centre du cercle auquel cette corde appartient.

Si deux cordes *ab* & *fh*, menées dans un même cercle, sont paralleles, les arcs *fa* & *bh*, qu'elles interceptent, sont égaux. Car imaginons un diametre *id* perpendiculaire sur ces cordes, alors l'arc *ih*=*if* & l'arc *ad*=*db*: par conséquent, si des deux demi-circonférences *ifad* & *ihbd*, on retranche les arcs égaux *if* & *ih*, ainsi que *ad* & *db*, les arcs restans *af* & *bh* doivent être égaux: donc des arcs d'un même cercle, interceptés par deux cordes paralleles, sont toujours égaux.

Si on se propose de faire passer une circonférence de cercle par trois points donnés, tels que *a*, *d*, & *b* (fig. 15): on imagine cette circonférence comme étant tracée, & on considere, comme ses cordes, des lignes qu'on mene du point *d* aux points *a* & *b*: alors on éleve sur le milieu de ces cordes, des perpendiculaires. Celles-ci doivent toutes deux passer par le centre de la circonférence cherchée; ainsi leur point d'intersection indique le centre de la circonférence, qui doit embrasser les trois points donnés, étant décrite avec un rayon égal à la distance du point trouvé à l'un de trois points proposés *a*, *b*, ou *d*.

Réciproquement, s'il faut déterminer le centre d'un cercle *fadbh*, ou d'un arc *fab*, on doit mener deux cordes, comme par exemple, de *f* en *a* & en *b*; & sur le milieu de ces cordes, élever des perpendiculaires, qui, par leur point d'intersection, annoncent le centre *o* demandé. Ainsi, se propose-t-on de donner au contour de l'étrave d'un vaisseau, une forme circulaire, telle que *gf* ou *bc* (fig. 75 & 56. G); étant connu d'ailleurs le rayon de cette étrave; & les points *b* & *c* ayant une position, déjà déterminée soit par l'élancement de l'étrave, soit par la hauteur qu'elle doit avoir; il faut chercher le lieu du point qui doit servir de centre, pour décrire cet arc. Alors on imagine une corde de cet arc, qui est une ligne menée de *b* en *c*; ensuite,

de ces deux derniers points, comme centre, on décrit deux petits arcs, avec le rayon donné : leur point d'intersection est le centre demandé; & c'est de ce point qu'on trace le contour d'un arc, qui, passant par les points *b* & *c*, est par conséquent celui de l'étrave.

S'agit-il de diviser un angle donné, tel que *acd* (fig. 9), en deux parties égales; tout consiste à chercher le milieu de l'arc *ad*, qui est sa mesure; & par conséquent, à élever une perpendiculaire sur le milieu de la corde *ad* de ce même arc. Le sommet *e* de cet angle donné, est déjà un point de cette perpendiculaire, puisqu'elle doit passer par le centre de l'arc. Ainsi, des extrémités *d* & *a*, comme centres, & avec un même rayon, si on décrit deux petits arcs qui se croisent, on trouve, dans leur point d'intersection, un second point de cette perpendiculaire; par conséquent, la ligne menée, de ce point trouvé, au sommet de l'angle donné divise nécessairement celui-ci en deux parties parfaitement égales.

103. Nous avons vu comment, d'un point placé hors d'une ligne, on doit abaisser une perpendiculaire sur cette ligne; & nous avons démontré (95) qu'une telle perpendiculaire est la plus courte de toutes les lignes qu'on peut mener, du point donné, à la ligne, proposée. Soit donc *od*, (fig. 15) une perpendiculaire, abaissée de *o* sur *ze*, & soit décrit, du point *o*, comme centre, avec un rayon *od*, une circonférence *dafihb*; toute ligne menée du centre *o*, à un point de *ze* différent de *d*, est nécessairement plus longue que *od*; par conséquent, tous les points de la ligne *ze*, excepté *d*, sont placés hors de la circonférence décrite. Celle-ci n'a donc qu'un seul point qui lui soit commun avec *ze*; & *ze*, qui ne fait que toucher cette circonférence au seul point *d*, est, sous ce rapport, nommée sa tangente en *d*. Une tangente à un cercle est donc perpendiculaire, à l'extrémité du rayon mené au point de contact; comme le rayon mené au point d'attouchement d'une tangente, est perpendiculaire sur cette tangente.

De-là il suit que si on propose de tracer une ligne,

qui ſoit tangente à un cercle, en un point donné, tel que *d* (fig. 15), ſur ſa circonférence; il faut tirer un rayon au point de contact *d*, & enſuite élever ſur l'extrémité de celui-ci, une perpendiculaire *ze*, qui eſt la tangente demandée.

De-là on peut conclure auſſi que, ſi pluſieurs circonférences ſont tracées ſur un même plan, de maniere que leurs centres ſoient tous placés ſur une même ligne droite, & que cette ligne, ainſi que ces circonférences, paſſent toutes par un même point *d*, celles-ci ne font que ſe toucher en ce point *d*. Car elles doivent toutes avoir pour tangente la même ligne *ze*; puiſque, pour chacune, la tangente au point *d*, eſt une perpendiculaire élevée ſur l'extrémité de la ligne des centres; par conſéquent ces circonférences n'ont entr'elles, comme avec la tangente *ze*, qu'un ſeul point commun: ainſi elles ſe touchent toutes en ce point.

Il ſuit de-là que s'il faut tracer un arc, tel que *qdr*, qui ne faſſe que toucher l'arc *adb* au point *d*; on doit choiſir pour centre de ce nouvel arc, un point du rayon *do* de l'arc donné, ou du prolongement de ce rayon; & on doit décrire cet arc avec un rayon égal à la diſtance du nouveau centre au point *d*. Cet arc ne fait alors que toucher *adb* en *d*, puiſqu'en ce dernier point il ne peut avoir avec lui qu'une tangente commune.

S'il s'agit de tracer un arc qui ne faſſe que toucher la ligne *ez*, au point *d*, & qui paſſe d'ailleurs par le point *a*; on y parvient aiſement, en remarquant, que cette ligne *ez* doit être tangente à cet arc, au point *d*; & qu'une ligne menée de *a* en *d*, doit être une corde de l'arc à décrire. D'après ces conſidérations, le centre de l'arc cherché, doit être ſur une ligne *id*, perpendiculaire en *d* ſur la ligne *ez*; & il doit ſe trouver auſſi ſur une ligne qui ſeroit menée perpendiculairement ſur le milieu de la corde ſuppoſée; par conſéquent, le point d'interſection de ces deux perpendiculaires, eſt le centre de l'arc cherché: & ſon rayon, eſt la diſtance de ce même centre à l'un des points donnés *a* & *d*.

S'il s'agit auſſi de mener par les deux points *b* & *c*

(fig 17), un arc qui ne fasse que toucher à son extrémité $\bar{b}$, un autre arc donné $a\bar{b}$; on voit qu'il faut satisfaire à deux conditions; & voici le procédé. Le centre du nouvel arc doit être pris sur la direction du rayon $q\bar{b}$ du premier arc donné; parceque toute circonférence décrite d'un point ainsi choisi, & assujettie à passer par $\bar{b}$, doit toucher seulement l'arc $a\bar{b}$, au point $\bar{b}$, comme ayant son centre sur la même ligne où se trouve celui de $a\bar{b}$: mais l'arc cherché doit aussi passer par le point c: par conséquent, une ligne perpendiculaire sur le milieu de celle qui joint les points $\bar{b}$ & c, & qui est une corde, doit aussi passer par le centre demandé. Le point d'intersection du rayon prolongé $q\bar{b}i$ de l'arc donné & de cette perpendiculaire, doit donc être ce centre. Ainsi, en décrivant, de ce point central i, avec un rayon égal à ib ou, à ic, un arc ab, on satisfait complettement à la question.

C'est par un pareil procédé que, dans l'architecture navale, on raccorde un arc, tel que uc (fig 52. G), avec un arc cg, pour achever le demi-contour ucg de la varangue d'un vaisseau. Il sert aussi pour tracer (fig. 60 & 45 G) le contour d'une maîtresse varangue, ainsi que pour rendre bien continue la courbure des éstains, des barres d'arcasse, & d'autres sections d'un vaisseau (fig. 59, 61, 65, 66, 67 G).

104. Nous avons vu qu'un angle ayant son sommet au centre d'un cercle, a pour mesure le nombre des dégrés de l'arc compris entre ses côtés: mais il peut arriver que cet angle, quoique placé, dans le plan d'un cercle, n'ait pas son sommet au centre, & que ses côtés embrassent quelque partie de la circonférence: dans cet état, on demande quelle mesure peut être attribuée à cet angle, sans recourir à un arc, décrit de son sommet comme centre, & compris entre ses côtés.

Si un angle, tel que kie (fig. 16), a son sommet dans le plan d'un cercle $oicu$, & placé entre le centre & la circonférence; sa mesure est égale à celle d'un angle, qui auroit son sommet au centre, & dont l'ouverture seroit parfaitement la même. Cet angle de comparaison agf est aisement formé, en menant deux

diametres *mf* & *za* paralleles aux deux côtés *ie* & *ib* de l'angle donné; & l'égalité des angles *bie* & *age*, est fondée sur ce qu'ils ont leurs côtés paralleles, & leur ouverture tournée du même côté: ainsi l'arc *af*, qui est la mesure de *agf*, est aussi celle de *bie*. Remarquons actuellement que les arcs *af* & *mz*, sont égaux, comme étant les mesures des deux angles *agf* & *mgz*, qui sont opposés au sommet; ainsi, la mesure de *bie*, vaut la moitié de la somme des arcs *af* & *mz*, c'est-à-dire, la moitié, de celle des arcs *af*, *mo*, *ou*, & *uz*, ou de celle des arcs *af*, *fe*, *ba* & *ou*; parce que les arcs *mo* & *uz*, sont respectivement égaux aux arcs *ba* & *fe*, comme compris entre des cordes paralleles. Ainsi la mesure de *bie*, vaut la moitié de la somme des arcs *be* & *ou*; c'est-à-dire, des arcs compris, soit entre les côtés de cet angle, soit entre les prolongemens de ces mêmes côtés. Par conséquent, tout angle qui a son sommet dans un cercle, entre le centre & la circonférence, a pour mesure, la moitié de l'arc compris entre ses côtés, plus la moitié de celui qui est compris entre ses deux côtés prolongés.

On doit voir qu'à mesure que le sommet de l'angle *bie* est plus près de la circonférence, l'arc *ou* diminue de grandeur, & qu'il devient nul, lorsque le sommet *i* de l'angle *bie* est placé sur la circonférence; par conséquent, la démonstration précédente étant indépendante, & de la grandeur de l'angle *bie*, & du lieu de son sommet en dedans du cercle, la mesure d'un angle formé par 2 cordes, & qui a pour sommet un point de la circonférence, doit être seulement la moitié de l'arc compris entre ses côtés. C'est ainsi que la mesure de l'angle *toe*, est la moitié de *te*; celle de *dub* est la moitié de *db*, & celle de *ubc*, est la moitié de *uec*.

Si, tel que *bur*, un angle a pour sommet un point *u* de la circonférence, & pour côtés, une corde *ub*, & une tangente *ur*; sa mesure est encore la moitié de l'arc *ueb* compris entre ses côtés. Car si par l'extrémité *b* de la corde *ub*, on mene une ligne *bc* parallele à la tangente *ur*; l'angle donné *rub* est le supplément de *ubc*, parce qu'ils sont des angles internes placés du

même côté de la ligne *ub*, sécante des deux paralleles. La mesure de *ubc* est la moitié de l'arc *uec*, ainsi celle de *rub*, doit être la moitié du reste de la circonférence, c'est-à-dire, la moitié des arcs *uob* & *bc*, ou des arcs *uec* & *bc*; parce que les arcs *uec* & *uob* sont égaux, comme compris entre des paralleles; par conséquent, tout angle qui a son centre dans la circonférence d'un cercle, & qui est formé par une corde & une tangente, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés.

Si un angle, tel que *pud*, a son sommet à la circonférence; & si ses côtés sont, une corde *ud*, & le prolongement *up* d'une corde *ub*, ou la partie extérieure d'une sécante *pb*; sa mesure est la moitié des arcs soustendus, soit par la corde, soit par la partie intérieure *ub* de la sécante. En effet, l'angle *pud* est le supplément de l'angle *dub*; celui-ci a pour mesure la moitié de l'arc *bd* embrassé par ses côtés; & par conséquent, l'angle *pud* a pour mesure la moitié, des arcs restans de la circonférence, qui sont, l'arc *ued* soustendu par la corde *ud*, & l'arc *utb*, soustendu par la partie intérieure *ub* de la sécante.

Enfin, si l'angle à mesurer est tel que *tnd*, ayant son sommet hors de la circonférence, & pour côtés, deux sécantes du cercle; sa valeur est égale à la demi-différence des deux arcs *td* & *ou*, compris entre ses côtés. Car, soit menée une ligne *ub*, qui soit parallele à l'un des côtés de l'angle, & qui passe par le point d'intersection, de l'autre côté & de la circonférence du cercle; alors, à cause des paralleles l'angle à mesurer *tnd* est égal à *bud*. Mais celui-ci a pour mesure la moitié de *bd*, ou la demi-différence des arcs *td* & *tb*, ou enfin celle des arcs *td* & *ou*, (parce que les arcs *tb* & *ou* sont égaux, comme interceptés par des paralleles); par conséquent, l'angle *tnd*, ou tout angle, qui, formé par deux secantes, a son sommet hors d'un cercle, a pour mesure la demi-différence des arcs compris entre ses côtés. Le résultat de cette démonstration doit toujours être le même, quelque soient, la longueur des sécantes & la grandeur de l'angle; c'est pourquoi, si

l'une de celle-ci, ou si toutes deux devenoient tangentes à la circonférence, la mesure de l'angle formé par ces lignes, dans la position supposée, seroit encore la demi-différence des angles compris entre ses côtés.

105. Les propositions précédentes peuvent être utilement appliquées; elles fournissent un moyen convenable pour élever une perpendiculaire sur l'extrémité d'une ligne qui ne peut être prolongée. En effet, nous venons de voir que si un angle, tel que *qad* (fig. 9), a son sommet dans la circonférence d'un cercle, & des côtés qui soient des cordes de ce même cercle; sa mesure est la moitié de l'arc compris entre ses côtés. Ainsi ses côtés étant supposés passer par les extrémités d'un diametre *ed*, sa mesure doit être de 90 dégrés, & ses côtés *qa* & *da* sont alors perpendiculaires l'un à l'autre. C'est pourquoi, s'il est proposé d'élever, sur l'extrémité *a* d'une ligne *qa*, une perpendiculaire; l'opération consiste à tracer une circonférence, de maniere qu'elle passe par le point *a*, & que la ligne *qa*, ou une partie de cette ligne, devienne une corde de cette circonférence. On doit donc prendre, pour centre de celle-ci, un point, tel que *c*, placé hors de cette ligne donnee; & la décrire avec un rayon égal à la distance de ce centre au point *a*: on doit ensuite mener un diametre *ed*, par le point d'intersection *e* de la ligne *qa*, & de la demi-circonférence tracée: enfin on doit tirer une ligne *ad*, qui joigne le point *a* avec l'autre extrémité *d* du diametre. Cette derniere ligne *ad* est alors perpendiculaire sur l'extrémité *a* de la ligne donnée *qa*; puisqu'elle fait avec elle, un angle *daq* qui a son sommet à la circonférence d'un cercle, & des côtés appuyés sur les extrémités d'un des diametres de ce cercle.

Nous avons vu précédemment comment on peut mener une ligne, qui soit tangente à une circonférence, en un point désigné sur cette même circonférence; mais nous n'avons pas dit le procédé à suivre, pour diriger d'un point (fig. 18) placé hors d'un cercle, une ligne droite qui soit tangente à sa circonférence. Ce procédé est une conséquence des propositions démontrées. Soit proposé de mener, du point *i*, une tangente à l'arc

dac, dont le centre est *b* : Tout consiste à déterminer le point de contact *a*. Si ce point étoit trouvé, la ligne *ai*, qui le réuniroit au point *i*, seroit (comme tangente) perpendiculaire à l'extrémité du rayon mené, du centre donné *b*, à ce même point *a* : ainsi le lieu du point *a* doit être le sommet d'un angle droit, formé par un rayon de l'arc donné, & par une ligne, menés au point *i*. On parvient à construire un tel angle de 90 dégrés, en traçant une demi-circonférence, qui ait pour diametre la distance *bi*, du centre de l'arc donné, au point *i* qui est assigné extérieurement au cercle. Car le point d'intersection des deux arcs *dac* & *bai* est alors tellement placé, que les lignes menées de ce point aux deux points donnés *b* & *i*, forment entr'elles un angle qui est de 90 dégrés, comme ayant son sommet à la circonférence *bai*, & des côtés *ab* & *ai*, qui passent par les extrémités d'un de ses diametres *bi* : par conséquent *ba* étant un rayon de l'arc donné, la ligne menée du point *i*, au point d'intersection *a*, est perpendiculaire à l'extrémité de ce rayon ; c'est-à-dire, qu'elle est tangente au point *a* de l'arc donné *dac*. Cette ligne satisfait ainsi à la question proposée.

106. *Des Figures planes ou des Polygones.* Si une portion de l'espace est renfermée ou terminée, par des lignes droites tracées dans un seul & même plan ; on lui donne le nom de figure plane & de polygone. Tels sont (fig. 19) les espaces *abcde*, *fghil*. Dans le contour de ces polygones, on distingue des angles & des côtés, qui sont, les uns & les autres, en même nombre. Lorsqu'il y a égalité entre tous les côtés d'un polygone, ainsi qu'entre tous ses angles ; on donne à un tel polygone le nom de régulier : & au contraire, il est nommé irrégulier, s'il y a inégalité, soit entre ses angles, soit entre ses côtés.

Une propriété qui est particuliere aux polygones reguliers, est que toujours chacun peut être inscrit à un cercle ; c'est-à-dire, qu'étant donné un polygone *abcdef* (fig. 20), dont les angles, ainsi que les côtés, soient égaux entr'eux séparément ; si on fait passer une circonférence par les sommets *a*, *b*, & *c* de trois de ses

angles consécutifs (comme la possibilité en a été démontrée [102]), cette même circonférence doit aussi passer par les sommets de tous les autres angles. Imaginons en effet cette circonférence tracée par les points *a*, *b* & *c* du polygone; & examinons si elle doit passer par le point *f*, qui est le sommet de l'angle suivant *afe*. Puisque les angles *cba* & *baf* sont égaux, leurs mesures sont aussi égales; c'est-à-dire, que dans la circonférence décrite *abcdef*, il y a égalité entre les arcs *afedc* & *fedcb*, dont les moitiés sont les mesures des angles comparés. Mais si de chacun de ces arcs on retranche la partie commune *fedc*, les arcs restans *bc* & *af* doivent être égaux; donc aussi les cordes *bc* & *af*, qui soustendent ces derniers arcs, sont égales; c'est-à-dire que le point, ou la circonférence qui passe par *c*, *b* & *a*, vient rencontrer le côté suivant *af*, est autant éloigné de *a*, qu'il y a de distance du point *b* au point *c*; & par conséquent, ce point de rencontre est l'extrémité du côté *af* du polygone; parce que les côtés de cette figure sont tous égaux. Il est donc démontré que la circonférence supposée doit passer par le sommet de l'angle *f*. On démontreroit, de la même maniere & successivement, qu'elle doit passer par le sommet de tout autre angle de ce poligone: donc on peut toujours imaginer qu'un polygone régulier est inscrit à un cercle.

Les côtés d'un polygone peuvent être en nombre plus ou moins grand; & si on les imagine multipliés à l'infini, autour d'un espace constant & borné, alors ils doivent être reduits à devenir des lignes droites infiniment petites, ou si petites qu'on peut les considérer comme des points. C'est pourquoi, si on suppose une infinité de côtés, à un polygone régulier qui est inscrit à un cercle; son contour doit se confondre sensiblement avec la circonférence du cercle circonscrit; & par conséquent, on doit s'éloigner peu de la vérité, en considérant, au besoin, un cercle quelconque, comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.

Si le nombre des côtés d'un polygone n'a, dans un sens pour limites que l'infini; ce nombre, dans le sens

opposé, ne peut être plus petit que trois; parce que c'est le moindre nombre de lignes droites qu'on puisse employer pour renfermer un espace; & une figure de trois côtés, porte le nom de triangle (fig. 21 & 22).

Remarquons, que tout polygone (fig. 19) peut être partagé en triangles, par des lignes nommées diagonales, & menées d'un de ses angles aux autres angles; que ces triangles peuvent être considérés comme des parties intégrantes de ce polygone; & qu'en déterminant les angles & les côtés de ces triangles, on peut en conclure ceux du polygone qui les renferme; puisque les côtés de ce polygone sont au nombre de ceux des triangles, & que ses angles se trouvent par parties ou en entier parmi ceux des mêmes triangles. Il est donc à-propos & dans l'ordre des choses, de traiter des triangles, & de considérer les propositions qui leur sont relatives, pour faire ensuite, des résultats, les applications qui peuvent convenir aux polygones. c'est Par ce moyen, qu'on procède du plus simple au plus composé: puisque, comme on l'a dit, de toutes les figures planes, il n'en est aucune plus simple que le triangle.

107. Dans un polygone quelconque, on distingue des angles, des côtés, & une surface circonscrite. Nous considérerons ailleurs comment on en mesure la surface; ici, il ne doit être question que des côtés & des angles des polygones; c'est-à-dire, de leur grandeur particuliere & de leurs rapports; & c'est sous ce point de vue que les triangles vont devenir l'objet des propositions suivantes.

Veut-on savoir combien vaut la somme des trois angles d'un triangle? il faut concevoir que ce triangle tel que *abc* (fig. 23), est inscrit à un cercle. Alors on reconnoît, que chacun de ses angles, ayant son sommet à la circonférence, a pour mesure la moitié de l'arc compris entre ses côtés; & que la valeur de ses trois angles réunis, est égale à la moitié de la circonférence entiere; & il en résulte que la somme des trois angles d'un triangle rectiligne vaut toujours 180 dégrés. Cette somme est celle des angles intérieurs *bac*, *acb*, *cba*,

& il reste à apprécier ceux qu'on nomme angles extérieurs, tel que *nac*, *ocb*, *mba*, ou ceux qui sont formés chacun, par un côté du triangle, & par le prolongement du côté adjacent. Chacun de ces angles, tel que *bco*, est le supplément de l'angle intérieur adjacent *acb*; c'est-à-dire que la somme, de chaque angle intérieur & de son extérieur, vaut 180 degrés. Ainsi, tous les angles intérieurs, réunis à tous les extérieurs, forment une somme qui vaut 3 fois 180 dégrés; & comme les seuls angles intérieurs valent 180 dégrés, les extérieurs réunis doivent valoir deux fois 180 dégrés. On peut remarquer que l'angle extérieur d'un triangle est égal à la somme des deux angles intérieurs qui lui sont opposés; c'est-à-dire, que *bco*, par exemple, est égal à la somme des angles *bac* & *abc*; puisque cette somme & l'angle *bco*, ont l'un & l'autre, pour supplément commun, l'angle *acb*.

Ajoutons encore, qu'un triangle est nommé rectangle, lorsqu'un de ses angles est droit, ou de 90 dégr. & que, dans tout autre cas, il porte le nom d'obliquangle. 2.° Les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémens l'un de l'autre; puisqu'ensemble ils doivent valoir 90 dégrés. 3.° Un angle d'un triangle quelconque, est toujours le supplément de la somme des autres; & par conséquent, il suffit de connoître la valeur de deux angles d'un triangle, pour juger de celle du troisieme.

108. Si on applique convenablement ces idées générales aux polygones quelconques, en les supposant d'avance partagés en triangles, par des diagonales menées d'un des angles aux autres angles, on en conclut que la somme de tous les angles intérieurs d'un polygone vaut autant de fois 180 dégrés, qu'il y a de côtés, moins deux. En effet, si on examine avec soin un polygone, tel que *abcde* (fig. 19); on reconnoît que les triangles qui le composent, n'ont d'autres angles que, ceux mêmes du polygone, ou des parties de ces angles, & que la somme des angles qui appartiennent au polygone, doit être évidemment la même que celle des angles de tous les triangles ainsi formés.

Il faut donc chercher la grandeur de celle-ci, pour en conclure celle qui eſt demandée. Le nombre de ces triangles doit être toujours de deux unités plus petit que celui des côtés du polygone, parce qu'il y a deux points, tels que *a* & *c*, auxquels, du point *b*, on ne peut mener une diagonale; & comme la ſomme de tous les angles de chaque triangle eſt de 180 dégrés, celle des angles de tous les triangles, ou celle de tous les angles du polygone, vaut autant de fois 180 dég. qu'il y a de côtés, moins deux.

La valeur particuliere de chaque angle d'un polygone reſte ainſi indéterminée, comme dans un triangle quelconque, & la ſomme de tous eſt ſeule indiquée. Cependant, ſi le polygone eſt regulier, ou ſi ſes angles ſont égaux, on trouve la valeur de chacun de ſes angles, ou en diviſant par le nombre des côtés, le produit de 180 dégrés multipliés par le nombre de ces mêmes côtés, diminué de deux unités; ou en retranchant de 180 dégrés, le quotient, de 360 dégrés diviſés par le nombre des côtés du polygone régulier. C'eſt pourquoi, dans un triangle régulier, chaque angle eſt de 60 dég. car alors il faut retrancher de 180 dégrés, le tiers de 360 dégrés, ou 120 dégrés; & la différence eſt 60 dégrés. Si un polygone régulier a ſix côtés, chacun de ſes angles intérieurs eſt, par le même calcul, de 120 dégrés.

Des mêmes principes, on peut conclure que la ſomme des angles extérieurs d'un polygone, vaut toujours deux fois 180 dégrés. Car la ſomme, de ſes angles intérieurs ajoutés à ſes extérieurs, vaut autant de fois 180 dégrés, qu'il y a de côtés; par conſéquent; celle des extérieurs étant ſeule égale, à 180 dégrés répétés autant de fois qu'il y a de côtés, moins deux; la ſomme des angles extérieurs d'un polygone quelconque doit toujours valoir 360 dégrés.

Ajoutons ici quelques propriétés qui ſont particulieres aux triangles. Si dans un triangle, tel que *abc* (fig. 23) qu'on ſuppoſe inſcrit à un cercle, il y a égalité entre les deux côtés *ac* & *ab*, les angles *acb* & *abc*, qui ſont oppoſés à ces côtes, ſont auſſi égaux

l'un à l'autre : car ces deux côtés, considérés comme étant deux cordes d'un même cercle, doivent soustendre des arcs égaux *adb* & *afc*; & comme les moitiés de ces arcs sont les mesures des angles *acb* & *abc*, ces mêmes angles doivent être égaux, comme le sont leurs mesures; par conséquent, dans tout triangle, les angles opposés à des côtés égaux sont égaux. La proposition inverse seroit démontrée de la même maniere; savoir, que les côtés, qui, dans un triangle, sont opposes à des angles égaux, sont aussi égaux entr'eux.

Ces principes conduisent aussi à conclure, que le plus grand angle d'un triangle est opposé au plus grand des ses côtés, & réciproquement. Car soit l'angle *bac* plus grand que *acb*, dans le même triangle *abc*, qui est inscrit à un cercle : l'arc *bec*, dont la moitié est la mesure de *bac*, doit être plus grand que l'arc *adb*, qui est double de la mesure de *acb*. La corde *bc*, qui soustend le plus grand arc, est donc plus longue que la corde *ab*; c'est-à-dire, que le côté opposé au plus grand angle de ce triangle, est aussi le plus grand de ses côtés. L'inverse seroit aisée à démontrer par la même méthode.

Une des conséquences des propositions précédentes, est que le côté de l'exagone ou d'un polygone régulier de six côtés, est égal au rayon du cercle qui lui est circonscrit. Soit *ab* (fig. 20) le côté d'un exagone *abcdef*, & soient menés deux rayons *ob* & *oa*, aux deux extrémités de ce côté *ab*. L'angle *boa* a pour mesure l'arc *ab*, ou la sixieme partie de la circonférence entiere. Il est donc de 60 dégrés, & les deux autres angles *oab* & *oba* doivent valoir ensemble 120 dégrés; mais ces derniers sont égaux entr'eux, puisque dans un même triangle *abo*, ils sont opposés à des côtés égaux, qui sont des rayons d'un même cercle. Chacun est donc de 60 dégrés. Les trois angles de ce triangle sont donc de même grandeur. Ainsi, il y a égalité, entre leur côtés, & le côté *ab* de l'exagone doit être égal au rayon du cercle circonscrit. Le rayon d'un cercle étant donc porté comme corde sur sa circonference, doit soustendre un arc de 60 dégrés. Cette derniere conséquence

conduit à un moyen de divifer la circonférence en dégrés, & par conféquent, à la préparer pour fervir de mefure à des angles quelconques. En effet, foient menés deux rayons, *uo* & *oc* perpendiculaires l'un à l'autre, dans le cercle *abcdef*. L'arc *uc* eft de 90 dégrés; & fi on porte fur cet arc, le rayon comme corde, de *c* en *b*, l'arc *cb* doit être de 60 dégrés: par conféquent, *bu* eft de 30 dégrés. Si ce dernier arc eft divifé en deux parties égales, par le moyen d'une perpendiculaire élevée fur le milieu de fa corde; fi fucceffivement on détermine le quart, le 8.e, le 16.e, &c. de ce même arc, on doit obtenir particulierement la grandeur d'un arc de 56 minutes 15 fecondes & celle d'un autre arc de 3 minutes 31 fecondes (à un 16.e près). La fomme de ces deux derniers arcs eft de 59 minutes 46 fecondes. Ainfi, par ces fubdivifions faciles, on peut parvenir à découvrir un arc dont la grandeur ne differe de celle d'un dégré, que de 14 fecondes. Aucun moyen géométrique ne peut conduire à trouver directement la grandeur exacte d'un arc d'un dégré; mais on eftime à-peu-près fa valeur, par celle de l'arc de 59 minutes 46 fecondes, & on peut procéder enfuite à la divifion de la circonférence en 360 parties égales.

109. Il faut actuellement comparer entr'eux les polygones, qui peuvent être, ou égaux, ou femblables, ou totalement différens; & la recherche des caracteres auxquels on les diftingue, devient très-fimple, en commençant par la confidération des triangles.

Deux triangles font égaux, lorfque toutes leur parties font égales, c'eft-à-dire, lorfqu'il y a égalité entre les côtés de l'un & les côtés de l'autre, ainfi qu'entre les angles correfpondans. Lorfqu'on fe propofe d'établir l'égalité de deux triangles; il n'eft pas toujours néceffaire de démontrer féparément que chacune des fix parties du premier eft égale à fa correfpondante, dans les fix parties du fecond. Car il eft des cas, ou trois de ces parties (au nombre defquelles un côté doit toujours fe trouver placé) étant refpectivement égales, l'égalité des trois autres en réfulte néceffairement. Deux triangles font égaux, non feulement lorfqu'ils ont un

angle

angle égal compris entre deux côtés égaux chacun à chacun; mais auſſi lorſqu'ils ont un côté égal adjacent à deux angles égaux chacun à chacun; & lorſque les trois côtés de l'un, ſont reſpectivement égaux aux trois côtés de l'autre.

1.° Si on ſuppoſe, dans les triangles comparés *abc* & *edf* (fig. 21), que les angles *a* & *e* ſont égaux & que les côtés *ab* & *ac* le ſont ſéparément aux côtés *de* & *ef*; les autres parties correſpondantes de ces triangles ſont néceſſairement égales. En effet, imaginons que le triangle *edf* ſoit tranſporté ſur le triangle *abc*, le point *e* ſur le point *a*, & le côté *ed* ſur *ab*: alors en achevant d'appliquer le premier trangle ſur le ſecond; comme *ed*=*ab*, le point *d* doit tomber ſur *b*. Comme les angles *bac*, & *def* ont une égale ouverture, la ligne *ef* doit tomber ſur *ac*; & l'égalité des côtés *ef* & *ac*, fait que le point *f* doit s'appliquer ſur le point *c*. Ainſi les trois ſommets *d*, *e*, *f*, dans cette ſuperpoſition, tombent exactement ſur les trois points *b*, *a* & *c*; par conſequent, ces triangles, ſe confondant parfaitement dans leurs angles & leurs côtés, ſont égaux dans toutes leurs parties.

2.° Ils ſont égaux, ſi l'angle *a* égale l'angle *e*, ſi l'angle *b*=*d*, & ſi le côté *ab*, compris entre les angles *a* & *b*, eſt égal au côté correſpondant *de*. Suppoſons ces triangles tranſportés l'un ſur l'autre comme ci-deſſus; le point *d* ſur *a*, *de* ſur *ab*; & examinons s'ils doivent s'appliquer parfaitement l'un ſur l'autre. Le point *d* tombe néceſſairement ſur *b*, puiſque *ab*=*de*: on doit conclure auſſi, de l'égalité des angles *a* & *e*, que le côté *ef* doit tomber ſur *ac*; & de celle des deux autres angles *b* & *d*, que *df* doit ſuivre la direction de *bc*: par conſéquent, les côtés *ef* & *df* doivent comme ceux-ci, néceſſairement ſe rencontrer, au point *c*. Les trois ſommets des angles du triangle *def*, ainſi que ſes trois côtés, s'appliquent donc exactement ſur les parties correſpondantes du triangle *abc*. Ainſi deux triangles ſont égaux, lorſqu'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

3.° Enfin, ſi le côté *aq*=*de*, ſi *ac*=*ef*, & ſi *bc* eſt égal à *df*, les triangles *abc* & *edf* ſont néceſſaire-

ment égaux. Transportons encore le triangle *def* sur *abc*, le point *e* sur le point *a*, & *ed* sur *ab*. Le point *d* doit tomber sur *b*, à cause de l'égalité supposée des côtés *ed* & *ab*; & il reste seulement à savoir si *f* doit s'appliquer sur le point *e*, dans cette superposition. Supposons que, du point *b* comme centre, on décrive un arc, avec un rayon égal au côté *df*; le point *f* doit se trouver sur cet arc, qui d'ailleurs passe par *c*, puisque *df*=*bc*. De même, si du point *a* comme centre, & avec un rayon égal à *ef*, on trace un arc, qui, à cause de l'égalité des côtés *ef* & *ac*, doit passer aussi par *c*; le point *f* doit faire partie de ce second arc. Ce point *f* est donc celui d'intersection des deux arcs tracés; & d'ailleurs le point *c* est commun à ces mêmes arcs; par conséquent, le point *f* & le point *c* doivent se confondre l'un avec l'autre. Les deux triangles *abc* & *def*, étant donc supposés avoir les trois côtés égaux chacun à chacun; ont aussi leurs angles égaux, & sont complettement égaux entr'eux.

Les conséquences de ces propositions sont nombreuses, importantes; & nous allons les parcourir.

Deux polygones doivent être égaux, si divisés par des diagonales menées de deux angles homologues, aux autres angles, les triangles qui les composent sont égaux chacun à chacun. Il faut prouver, dans cette supposition, que leurs angles & leurs côtés respectifs sont égaux. Soient ces polygones (fig. 19); les angles *b c d* & *g h i*, qui leur appartiennent, sont égaux, comme étant ceux de deux triangles égaux *bcd* & *ghi*. L'angle suivant *cde* est aussi égal à *hil*; parce que les parties *bdc* & *bde* du premier sont séparément égales aux parties correspondantes *gih* & *gil* du second, conséquemment à l'égalité supposée des triangles comparés. En étendant cette démonstration aux autres angles homologues des polygones supposés, on en concluroit aisément leur égalité. Enfin, celle des côtés de ces polygones n'est pas douteuse, puisque ces côtés sont en même tems ceux de triangles ègaux. Par conséquent, deux polygones sont égaux; lorsque partagés par des diagonales, ils sont composés de triangles égaux.

La propoſition inverſe eſt vraie & facile à démontrer par la même méthode.

D'après ces mêmes principes, on peut conſtruire un triangle, tel, qu'il ſoit égal à celui dont on connoît deux côtés & l'angle compris. On mene (fig. 22) une ligne *on* qui ſoit égale à l'un des côtés donnés; enſuite avec un rayon égal à l'autre côté connu, & du point *o* comme centre, on décrit un arc, du nombre de dégrés qui repréſente la valeur de l'angle donné, & dont une extrémité ſoit placée ſur la ligne *on*. Alors ſi par l'autre extrémité de cet arc, & par le point *o*, on mene une ligne *om*, égale au deuxieme côté donné; & ſi on joint les points *n* & *m*, par une troiſieme ligne *mn*; on forme un triangle *onm*, égal à celui qui a été propoſé, puiſqu'ils ont un angle égal compris entre deux côtés égaux.

Si on ne connoiſſoit d'un triangle qu'un ſeul côté, & la valeur de chacun des angles adjacens à ce côté; on pourroit faire un triangle qui lui ſeroit égal dans toutes ſes parties. Il faut, mener une ligne *on* égale au côté connu; décrire ſucceſſivement, des deux points *o* & *n* comme centres, deux arcs qui ſoient chacun du nombre de dégrés donné pour la valeur de chaque angle adjacent, & tirer des mêmes points par les extrémités de ces arcs, des lignes indéfinies. Ces lignes doivent ſe couper en un point *m* de l'eſpace, & achever avec *on* un triangle qui eſt égal à celui qu'on a ſuppoſé; parce qu'ils ont un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun.

Enfin, ſi les trois côtés d'un triangle ſont connus, & qu'il s'agiſſe d'en faire un autre qui ſoit parfaitement égal au propoſé. On mene une ligne *on* égale à l'un des côtés donnés; enſuite, des points *o* & *n* comme centres, on décrit deux arcs; l'un avec un rayon égal au deuxieme côté connu, & l'autre avec le troiſieme côté. Ces arcs doivent ſe couper dans l'eſpace, en un point, tel que *m*, & les lignes menées de ce point aux deux extrémités de *on*, forment avec cette derniere ligne un triangle qui eſt égal au propoſé. Car

par cette conſtruction, on voit que leurs côtés ſont égaux chacun à chacun.

Si deux lignes paralleles (fig. 24), ſont traverſées par deux autres lignes paralleles; les parties coupées intérieures & paralleles ſont égales: c'eſt-à-dire que *ab*=*cd*, &, *ad*=*bc*. Soit menée une ligne du point *a* au point *c*; on forme ainſi deux triangles *abc* & *adc* qui ſont égaux. Car ils ont un côté commun *ac*; les angles *cab* & *acd* ſont égaux comme alternes internes; & par la même raiſon, il y a égalité entre les angles *acb* & *dac*. Ces triangles ont donc un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun: donc les côtés *ab* & *dc* ſont égaux: donc auſſi *ad* égale *bc*; c'eſt-à-dire, que les parties de paralleles coupées par d'autres paralleles, ſont égales entr'elles.

Si dans un polygone régulier (fig. 20), qu'on ſuppoſe inſcrit à un cercle, on mene du centre des lignes qui ſoient perpendiculaires ſur chaque côté du polygone; ces lignes ſont toutes égales. Comparons deux de ces lignes *og* & *oh*, & ſoit mené le rayon *ob*. Les deux triangles *gob* & *boh* ſont égaux. Car *ob* eſt commun: l'angle *gbo* vaut la demi-différence de 180 degr. à l'arc *ab*; & la meſure de l'angle *obh* eſt auſſi la demi-différence de 180 degrés, à l'arc *bc*, ou a l'arc *ba* qui eſt égal à ce dernier; par conſéquent, les angles *gbo* & *obh* ſont égaux. D'ailleurs les angles *gob* & *boh* ont des meſures égales, qui ſont chacune la moitié des arcs ſouſtendus par les côtés égaux du polygone. Les deux triangles *gob* & *boh* ſont donc égaux, comme ayant un côté égal compris entre deux angles égaux chacun à chacun; & ainſi les perpendiculaires abaiſſées du centre d'un polygone régulier ſur ſes côtés, ſont toutes égales.

110 Imaginons que dans un triangle *amq* (fig. 25), on prenne ſur un de ſes côtés *am*, deux parties égales *ab*, *bd*; & que par les points de diviſion *b* & *d*, on mene deux lignes qui ſoient paralleles à *mq*; il doit alors y avoir égalité entre les parties *ac* & *ce*, qui ſont coupées, par les paralleles, ſur l'autre côté *aq* du même triangle. En effet, ſoit meneé par le point de diviſion *c*

de ce dernier côté, une ligne *co* parallele au côté *am*. Alors on a deux triangles *abc* & *coe* qui sont égaux l'un à l'autre. Car, à cause des paralleles, il y a égalité, soit entre les angles *bac* & *oce*, soit entre les lignes *co* & *bd*; & comme la partie *db* a été faite égale à *ba*, les côtés *co* & *ba* sont égaux. Ces triangles comparés étant égaux, la partie coupée *ac* doit être égale à *ce*. Ainsi supposons que le côté *am*, soit divisé entierement en parties égales, & en quelque nombre de parties que ce puisse être; les lignes menées par ses points de division parallélement au côté *mq*, doivent aussi couper le côté *aq*, en un même nombre de parties égales entr'elles. Les parties du côté *am*, ont donc aussi entr'elles le même rapport d'égalité qui regne entre les parties correspondantes de *aq*; (en supposant toujours que les unes & les autres soient comprises entre les mêmes lignes paralleles). C'est pourquoi on peut établir une suite de rapports égaux, & dire, *ab*:*bd*::*ac*:*ce*, ou *ab*:*ac*::*bd*:*ce*, & comme toute autre partie de *am*, est à sa correspondante sur le côté *aq*. Mais on sait d'ailleurs que d'une telle suite de rapports égaux, on peut conclure, que la somme des antécédens, est à celle des conséquens, comme un antécédent est à son conséquent; ou comme la somme d'un certain nombre d'antécédens est à celle de leurs conséquens. On peut donc dire, la somme des parties égales qui composent *am*, ou le côté entier *am*, est au côté *aq*, comme *ab*:*ac*, ou comme *ad*:*ae*.

Cette proposition sert à établir cette régle générale, que si dans un triangle, on mene une ligne qui soit parallele à un de ses côtés, cette ligne divise les deux autres côtés en parties, qui sont proportionnelles les unes aux autres: c'est-à-dire que si *de* est une ligne menée arbitrairement, mais parallélement à *mq*, on peut faire cette proportion, *am*:*aq*::*ad*:*ae*. Car on peut concevoir le côté *am* partagé en parties égales, dont le nombre soit tel, qu'un des points de division soit le point *d*. Alors, si par tous les points de division de *am*, on imagine des lignes paralleles à *mq*, la ligne *de* doit être au nombre de ces lignes; & le côté *aq* se

trouve ainsi divisé en parties qui sont égales entr'elles. Donc dans cet état ce triangle devient parfaitement semblable à celui qu'on a considéré précédemment: les conséquences doivent donc en être les mêmes; & ainsi on peut faire la proportion *am*:*aq*::*ad*:*ae*; c'est-à-dire, qu'une ligne menée dans un triangle parallélement à un de ses côtés, coupe les deux autres côtés en parties qui sont proportionnelles entr'elles.

La proposition inverse est également vraie; & on peut démontrer que, si dans un triangle *amq*, on peut faire la proportion *am*:*aq*::*ad*:*ae*, la ligne qui joint les points *d* & *e*, doit être parallele au côté *mq*. Car si on pouvoit supposer que cette ligne *de* ne fût pas parallele à *mq*, il seroit possible de mener par le point *d*, une telle parallele, qui viendroit rencontrer en *z* le côté *aq*: cette construction conduiroit alors à cette proportion, *am*:*aq*::*ad*:*az*, & elle ne peut avoir lieu en même tems que la proportion supposée (*am*:*aq*::*ad*:*ae*), sans qu'il y ait égalité entre les quatriemes termes *az* & *ae*. Le point *z* & le point *e*, doivent donc être les mêmes, & la ligne *dz* doit se confondre avec *de*. On ne peut donc supposer, en même tems, & que les deux côtés d'un triangle sont coupés proportionnellement, & que la ligne *de* qui les traverse n'est pas parallele au troisieme côté *mq*. Donc toute ligne qui coupe proportionnellement deux côtés d'un triangle, est nécessairement parallele au troisieme côté. De-là on peut conclure un moyen de diviser une ligne en parties qui soient proportionnelles aux parties d'une ligne donnée; ou de réduire des figures quelconques, telles que celles qui sont tracées sur des plans de vaisseaux, ou sur des cartes, à d'autres figures plus ou moins grandes, en changeant convenablement les échelles qui servent de base à leur construction. Si l'échelle d'un plan de vaisseau est divisée en parties égales, dont chacune est prise pour la longueur d'un pied; & qu'il soit proposé de réduire ce plan à un plus petit, de maniere que la longueur d'un pied dans le premier, soit représentée dans le nouveau, par une ligne six fois plus petite. Il faut alors, pour déterminer les parties de la nouvelle

échelle qu'on veut ſubſtituer à la premiere, diviſer en ſix parties égales une ſeule des parties de l'échelle donnée. Soit *ac* (fig. 26) la longueur d'une de ces parties, qui repréſente un pied, & dont le 6.ᵉ cherché doit, dans le nouveau plan, être pris pour un pied. On trouve directement ce 6.ᵉ par le procédé ſuivant. On mene une ligne indéfinie *ab*, par l'extrémité *a*, & ſous un angle quelconque; enſuite on porte ſur cette derniere ſix ouvertures égales de compas, à partir du point *a*; on réunit le dernier point *b* de ces diviſions, avec l'extrémité *c* de la ligne à diviſer; & enfin, on tire par le premier point *r* de diviſion, une ligne parallele à *cb*. par cette conſtruction, la partie *ao* eſt la ſixieme partie de la ligne *ac*. Car, à cauſe des paralleles, on a la proportion, *ab:ar::ac:ao*; ainſi *ar* étant le ſixieme de *ab*, il faut auſſi que *ao* ſoit le ſixieme de *ac*. C'eſt donc la ligne *ao*, qui doit, dans le nouveau plan, repréſenter la longueur d'un pied, & ſervir à le compoſer parfaitement ſemblable à celui auquel il eſt comparé. Si une ligne telle que *ac*, doit être partagée en trois parties qui fuſſent entr'elles comme les nombres 1, 2, & 3; le procédé eſt le même. On mene une ligne indéfinie par le point *a*, & on porte ſur ſa longueur ſix parties égales, afin qu'elle offre trois longueurs *ar*, *rn* & *nb*, qui ſoient entr'elles dans les rapports preſcrits. Enſuite on réunit, par une ligne *bc*, l'extrémité de la ligne à diviſer, avec le ſixieme point de diviſion de la ligne indéfinie, & on mene par le premier, ainſi que par le troiſieme point de diviſion, & parallélement à *bc*, deux lignes, qui prolongées coupent *ac*. Les trois parties *ao*, *od* & *dc* de cette derniere ligne ſont alors dans les rapports demandés. Car, à cauſe des paralleles, on peut faire cette ſuite de rapports égaux, *ar:ru:ub::ao:od:dc*; mais la conſtruction de la figure donne auſſi cette proportion, *ar:ru:ub*::1:2:3. Par conſéquent, en comparant ces deux proportions, qui ont des rapports communs, on peut conclure que *ao:od:du*::1:2:3. La ligne *ac* ſeroit donc

diviſée, par ce moyen, en parties proportionnelles aux nombres indiqués.

111. La chaîne des principes précédens conduit à cette propoſition importante; que ſi les angles de deux triangles ſont égaux chacun à chacun, leurs côtés homologues doivent être proportionnels; c'eſt-à-dire, que ces mêmes triangles ſont néceſſairement ſemblables. (un côté d'un triangle eſt homologue à celui d'un autre triangle, lorſque ces côtés ſont oppoſés à des angles qui ſont égaux). Soient (fig. 21 & 22) les triangles *abc* & *omn*, tels, que les trois angles du premier ſoient reſpectivement égaux aux trois angles du ſecond, chacun à chacun. On peut imaginer que le triangle *abc* ſoit tranſporté ſur le triangle *mon*, le point *a* ſur le point *m*, & le côté *ab* ſur *mo*. Le point *b* doit tomber en un point quelconque *r* du côté *mo*; & à cauſe de l'égalité des angles *bac* & *omn*, le côté *ac* doit s'appliquer ſur *mn*, de *m* en *i*. Il ſuit delà que le côté *bc* du triangle *abc* doit avoir, dans le triangle *omn*, la ſituation & la longueur de *ri*; & que le triangle *mri* eſt égal au triangle *abc*. Après cette ſuperpoſition, on doit reconnoître que la ligne *ri* eſt parallele à *on*, parce que l'angle *nom* a été ſuppoſé égal à *cba*, qui eſt le même angle que *irm*: ainſi la ſécante *mo* eſt également inclinée ſur les deux lignes *ir* & *on*; & ces lignes ſont par conſéquent, paralleles l'une à l'autre. C'eſt pourquoi elles coupent proportionnellement les lignes *mo* & *mn*, aux point *r* & *i*; ce qui donne la proportion *mo*:*mr*::*mn*:*mi*, ou *mo*:*ab*::*mn*:*ac*. Deux côtés du triangle *abc* ſont donc proportionnels à deux côtés homologues du triangle *omn*; & le rapport des troiſiemes côtés de ce triangle, eſt auſſi égal à celui des deux premiers côtés comparés. Car ſi par le point *i*, on mene une ligne *iz* qui ſoit parallele à *mo*, on peut dire *mn*:*mi*::*no*:*oz*, & comme *oz* & *ri* ſont deux lignes égales, puiſqu'elles ſont des paralleles compriſes entre des paralleles, on doit donc dire *mn*:*ac*::*no*:*bc*. Le rapport de *no* à *bc* eſt donc égal à celui de *mn* à *ac*, & par conſéquent, à celui de *mo* à *ab*. Les trois côtés homologues, de ces deux triangles *abc* & *omn*, qui ſont ſuppoſés avoir des angles égaux

chacun à chacun, ſont donc proportionnels, & on peut faire cette ſuite de rapports *ab*:*mo*::*ac*:*mn*::*bc*:*on*.

Cette proportion fait voir que la ſimilitude parfaite de deux triangles, dépend uniquement de l'égalité de leurs angles ; puiſque d'une telle égalité, il réſulte que leurs côtés homologues ſont proportionnels. On ne peut pas prononcer la ſimilitude de deux polygones de la même maniere ; car il faut alors démontrer, non-ſeulement que les lignes qui les terminent, forment dans l'un & l'autre des angles égaux, mais auſſi qu'elles ſont proportionnelles entr'elles.

Si c'eſt une propriété particuliere aux triangles d'être ſemblables lorſque leurs angles ſont égaux, réciproquement deux triangles ſont ſemblables, lorſque leurs côtés ſont proportionnels ; c'eſt-à-dire, que l'égalité des rapports de leurs côtés, entraîne l'égalité de leurs angles correſpondans. Soient *abc* & *mon* des triangles, dont les côtés ſont tels qu'on peut dire *mo*:*ab*::*mn*:*ac*::*no*:*cb*. Si on prend ſur *mo*, côté du triangle *mon*, une partie *mr*, qui ſoit égale à *ba*; & que par le point *r*, on mene une ligne *ri* parallele au côté *on* ; alors le triangle *mri* nouvellement conſtruit, doit être ſemblable à *mon* : & il reſte à le démontrer égal au triangle *abc*, pour en conclure l'égalité des angles des triangles *abc* & *mon*. Si on compare les cotés des triangles ſemblables *mri* & *mon*, on peut dire, *mo*:*mr* ou *ab*::*mn*:*mi*; & comme par ſuppoſition on a la proportion *mo*:*ab*::*mn*:*ac*, il s'enſuit que ces deux proportions doivent avoir un même quatrieme terme, puiſque leurs trois autres termes ſont égaux chacun à chacun. Le coté *ac* eſt donc égal à *mi*. On prouve de même que le coté *bc* eſt égal à *ri*. Car la conſtruction donne cette proportion, *mn*:*mi* ou *ac*::*no*:*ri*. La ſuppoſition fournit cette ſeconde, *mn*:*ac*::*no*:*cb*; & ces deux proportions comparées prouvent, comme précédemment, que le coté *bc* eſt égal à *ri*. Les deux triangles *abc* & *mri* ſont donc égaux, comme ayant leurs trois cotés égaux ; mais les angles du dernier ſont égaux à ceux de *mon* ; par conſéquent, les triangles *abc* & *mon*, qui ſont ſuppoſés avoir leurs 3 cotés proportionnels, ont néceſſaire-

ment leurs trois angles égaux, & sont par conséquent semblables.

D'après ces propositions, on peut assigner divers caracteres, auxquels on doit reconnoître la similitude de deux triangles.

1.° Il suffit que deux angles d'un triangle soient égaux séparément à deux angles d'un autre triangle, pour que ces deux triangles soient semblables; parce qu'alors le troisieme angle doit être de même grandeur dans l'un & l'autre triangle.

2.° Si deux triangles ont leurs côtés paralleles chacun à chacun, ils sont semblables; parce que, comparés deux à deux, leurs angles, dont les côtés sont supposés paralleles, sont nécessairement égaux.

3.° On doit prononcer aussi la similitude de deux triangles, qui sont supposés avoir des côtés perpendiculaires chacun à chacun. Car alors il suffit de faire voir qu'un angle quelconque, est toujours égal à celui qui est formé par deux lignes perpendiculaires à ses deux cotés. Soit l'angle *aof* (fig. 20). Si la ligne *oh* est supposée perpendiculaire à *oa*, & si la ligne *ou* fait un angle droit avec *of*, les angles *aof* & *uoh* sont égaux. Car ils ont l'un & l'autre pour complément, le même angle *aou*: donc des angles dont les cotés sont perpendiculaires chacun à chacun, sont égaux entr'eux. Deux triangles dont les cotés sont perpendiculaires, respectivement les uns sur les autres, ont donc nécessairement des angles égaux; & par conséquent ils sont semblables.

4.° Si deux triangles ont un angle égal compris entre deux cotés proportionnels, leurs autres angles correspondans sont égaux, & ils sont semblables. Car soient les triangles *abc* & *omn*, dont les angles *a* & *m* sont égaux, & dans lesquels on peut dire, *ab*:*mo*::*ac*:*mn*. Soit transporté, comme précédemment, le triangle *abc* sur *mon*, en plaçant le point *a* en *m*, & *ab* sur *mo*, de *m* en *r*. Comme l'ouverture de l'angle *a* est la même que celle de *m*, le coté *ac* doit s'étendre sur *mn*, de *m* en *i*. Alors le triangle *mri* est parfaitement égal à *bac*; & comme par la supposition, on peut dire, *mo*:

mr::*mn*:*mi*, les deux cotés *mo* & *mn* sont coupés proportionnellement par *ri* : par conséquent *ri* est une ligne parallele à *no*. D'où il suit que l'angle *mon*, est égal à *cba*, puisqu'il l'est à *mri*; & par la même raison, les angles *mno* & *acb* sont égaux. Deux triangles qui ont un angle égal compris entre deux cotés proportionnels, ont donc nécessairement tous leurs angles égaux, & sont par conséquent semblables.

5.° Enfin, deux triangles sont semblables, lorsque leurs trois cotés sont proportionnels chacun à chacun, comme on l'a déjà démontré.

112. Les applications de ces propositions fondamentales sont intéressantes & nombreuses. Nous en verrons fréquemment, dans le reste de la géométrie, dans l'astronomie, dans la mécanique; & nous allons en donner quelques exemples.

Nous avons déjà vu comment on peut diviser une ligne connue, en plusieurs parties qui soient, ou égales, ou dans des rapports déterminés; & les dernieres propositions fournissent, pour arriver au même but, un nouveau procédé. Soit une ligne *zc* (fig. 27), qu'il faut diviser en parties qui soient, & en même nombre, & dans le même rapport, que les parties d'une ligne *ab* qui est donnée. On décrit à cet effet, des extrémités *a* & *b* comme centres, & avec un même rayon égal à *ba*, deux petits arcs qui se coupent au point *q* : on mene de ce point *q*, des lignes droites *qb* & *qa*, aux extrémités *b* & *a*; & on forme ainsi un triangle *qab*, qui est équilatéral, ou dont les trois cotés sont égaux. Alors on prend sur *qa* & sur *qb*, une partie égale à *zc*, ou à la ligne à diviser. Ces parties sont *qu* & *qp*. On tire ensuite une ligne qui réunit les points *u* & *p*, & cette ligne *up* est, parallele à *ba*, & égale à *zc*. Car les triangles *qup* & *qab* ont un angle commun en *q*; les cotés *qu* & *qp* sont égaux entr'eux, comme le sont aussi les cotés *qa* & *qb* : ce qui permet de dire, *qa*:*qb*::*qu*:*qp* : donc les triangles comparés sont semblables, comme ayant un angle égal compris entre deux cotés proportionnels. La ligne *up* est donc parallele à *ba*, à cause de l'égalité des angles *qup* & *qab*, qui appartiennent

à deux triangles démontrés semblables. Cette même ligne est d'ailleurs égale à *zc*, parce que les trois cotés de *qup* étant égaux entr'eux, comme le sont ceux du triangle *qab*, la ligne *up* doit être, comme *qp* & *qu*, égale à *zc*. Après cette construction préalable, si on mene du point *q*, des lignes droites aux points de division de la ligne *ab*, ces lignes doivent couper la ligne *pu* qu'elles traversent, en parties qui sont en même nombre, & dans un rapport égal à celui des parties données de *ab*. Car comparons les triangles *qui* & *qat*; ils sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en *q*, & parce que les angles *qui* & *qat* sont égaux, comme formés par la ligne *qi* qui coupe les paralleles *ui* & *at*. On démontreroit de même, la similitude des deux triangles *qio* & *qts*; celle de *qor* & *qsm*; & enfin celle de *qrp* & *qmb*. Les côtés de ces triangles comparés deux à deux, sont donc proportionnels : & on peut faire ces suites de rapports égaux. 1.° *qu:qa::ui:at::qi:qt*; 2.° *qi:qt::io:ts::qo:qs*; 3.° *qo:qs::or:sm::qr:qm*; & 4.° enfin, *qr:qm::rp:mb::qp:qb*. La premiere de ces suites a un rapport commun avec la seconde; celle-ci en a un commun avec la troisieme, &c: donc tous les rapports qui composent ces quatre suites sont égaux. On peut donc dire particulièrement, *ui:at::io:ts::or:sm::rp:mb*; par conséquent, les parties de la ligne *pu*, ou de la ligne donnée *zc*, sont proportionnelles à celles de la ligne *ab*; & cette ligne *zc* est divisée, par ce moyen, en parties qui sont, ou égales, ou dans des rapports déterminés.

Les mêmes suites comparées ensemble, donnent encore cette suite particuliere de rapports égaux, *qu:qa::qi:qt::qo:qs::qr:qm::qp:qb*; c'est-à-dire, que si d'un point *b*, placé hors d'une ligne *ab*, on mene, & aux extrémités, & à plusieurs points de cette ligne, d'autres lignes droites, telles que *qa*, *qt*, *qs*, *qm* & *qb*, celles-ci sont toujours coupées en parties proportionnelles, lorsqu'elles sont traversées par une ligne *up*, qui est parallele à la ligne donnée *ab*.

S'il faut déterminer une ligne qui soit quatrieme proportionnelle à trois lignes données; & si ces trois lignes

ſont (fig. 25) *fg*, *hi* & *kl*; le problême eſt de trouver le quatrieme terme de cette proportion, *fg*:*hi*::*kl*:*x*. A cet effet, on mene deux lignes *am* & *aq* indéfinies, on fait *ad* égal à *fg*, & *am* égal à *ih*. Enſuite on prend ſur *aq* une partie *ae* égale à *kl*; on joint les points *d* & *e* par une droite; & enfin on mene, par le point *m*, une ligne parallele à *de*. La ligne *aq* eſt alors la ligne demandée. Car par la conſtruction de la figure, on doit dire, *ad*:*am*::*ae*:*aq*, ou, *fg*:*hi*::*kl*:*aq*; donc *aq* eſt une quatrieme proportionnelle aux 3 lignes données.

Le procédé ſeroit le même, s'il étoit queſtion de trouver une troiſieme proportionnelle à deux lignes données, telles que *fg* & *hi*; ou s'il falloit indiquer le quatrieme terme de cete proportion, *hi*:*fg*::*fg*:*x*. Alors les changemens que l'on feroit à la conſtruction précédente, ſeroient, de rendre *ae* égal à *fg*, au lieu de donner à cette partie de *aq*, comme auparavant, la longueur d'une autre ligne *kl*; enſuite de mener, par *m* & *e*, une droite *me*, & enfin, de faire paſſer par *d* une ligne qui, parallele à *me*, couperoit ſur *ae*, une partie égale à la ligne demandée: car on ſeroit alors fondé à faire cette proportion, *hi*:*fg*::*fg*: cette partie coupée.

Il eſt à propos, & c'eſt ici le lieu de faire connoître la baſe de certaines échelles ou qui accompagnent des plans de vaiſſeaux, ou qui ſont en uſage dans la ſociété. Si une ligne *cm* (fig. 28) eſt diviſée en parties égales, & s'il eſt néceſſaire de conſtruire une échelle, ſur laquelle on puiſſe meſurer exactement la moitié, par exemple, de chacune de ſes parties, ſans qu'aucune d'elles ſoit partagée immédiatement en deux portions égales; on y parvient de la maniere ſuivante. On tire, par les extrémités *c* & *m*, des lignes paralleles & égales *ca* & *mr* qui ſont indéfinies. On porte ſur celles-ci deux ouvertures égales de compas, à partir des deux extrémités de *cm*; enſuite, par les points de diviſion *b* & *p*, *a* & *r*, on mene des lignes *bp* & *ar*, paralleles & néceſſairement égales à *cm*. On partage auſſi *ar*, en parties qui ſoient égales à celles de *cm*; & enfin on dirige, de l'extrémité *c*, une ligne tranſverſale, au premier

point *i* de diviſion de la ligne *ar*. Une ſeconde tranſverſale eſt auſſi menée du premier point *n* de diviſion de *cm*, au ſecond point *s* de *ar*, & ainſi de ſuite. L'échelle eſt alors conſtruite : & la partie *bo*, qui eſt compriſe entre *ca* & la premiere tranſverſale *ci*, eſt égale à la moitié de *cn*. Car les triangles *cai* & *bco* ſont ſemblables, à cauſe des paralleles : donc on peut dire *ai*:*bo*::*ac*:*bc*; mais *ac* eſt double de *bc* : par conſéquent *bo* doit être la moitié de *ai*, ou de *cn*, qui a la grandeur de *ai*.

On peut voir par cette démonſtration, comment on devroit conſtruire une échelle qui préſenteroit ſéparément des longueurs, ou de 1 pouce, ou de 2, ou de 3, &c; en ſuppoſant que la partie *cn* repréſente celle d'un pied. Alors, ſur les lignes indéfinies *ca* & *mr*, on porteroit douze ouvertures égales de compas; des lignes paralleles, & égales à *cm*, ſeroient menées par tous les points de diviſion des lignes *ca* & *mr*; enfin des tranſverſales tirées comme précédemment, couperoient les lignes paralleles à *cm*, de maniere, que les parties qui ſeroient interceptées, par *ca* & la premiere tranſverſale, repréſenteroient les longueurs demandées. Par exemple, le ſegment de la premiere parallele, ou de celle qui ſeroit la plus voiſine de *cm*, étant compris entre *ca* & la premiere tranſverſale, ſeroit le 12.e de *cn*, ou elle repréſenteroit un pouce: & on le démontreroit comme précédemment, par la comparaiſon de deux triangles ſemblables. Le ſegment de la ſeconde parallele repréſenteroit la longueur de 2 pouces; & ſucceſſivement celles, de 3 pouces, ou de 4, ou de 5.... ou de 11 pouces, ſeroient indiquées par les ſegmens ſemblablement placés des autres paralleles.

On doit auſſi conclure du principe qui eſt commun à ces conſtructions, que lorſque les lignes *ca* & *mr*, aulieu d'être compoſées de 12 parties égales, le ſont ſeulement de 10; les ſegmens des paralleles ne peuvent repréſenter qu'un nombre plus ou moins grand de dixiemes de la ligne *cn*. Par conſéquent, ſi cette derniere étoit elle-même la dixieme partie d'une ligne donnée *cm*, ces ſegmens feroient connoître la lon-

gueur des centiemes de cette ligne *cm*. Telle est l'échelle qui est nommée l'échelle de dixmes.

113. Les triangles rectangles ont quelques propriétés particulieres, qui sont fondées sur les principes précédens, & qui sont importantes à connoître. Soit *abc* (fig. 21) un triangle qui est supposé rectangle en *a*, ou dont l'angle *a* est de 90 dégrés. Soit abaissée, du sommet *a*, une perpendiculaire sur le côté opposé *bc* (qui est nommé l'hypothénuse de ce triangle). Alors cette figure présente 3 triangles semblables, qui comparés deux à deux, conduisent à des résultats remarquables. Ces triangles sont semblables; car le triangle *abc* a un angle commun avec chacun des triangles *abo* & *aoc*; et comme eux il a un angle qui est droit. Il est donc semblable à chacun d'eux; & ces derniers sont par conséquent semblables l'un à l'autre. Si les deux petits triangles sont comparés, on peut faire la proportion $bo:oa::oa:oc$: donc une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit d'un triangle sur son hypothenuse, est toujours moyenne proportionnelle, entre les deux parties coupées, ou entre les deux segmens de cette même hypothénuse. Si on compare chaque petit triangle avec *abc*, on doit dire, $bo:ba::ba:bc$, & $oc:ac::ac:bc$; c'est-à-dire, que chaque côté l'angle droit d'un tel triangle est moyen proportionnel entre l'hypothénuse & le segment correspondant. D'ailleurs, en réunissant les résultats, des deux dernieres proportions qui donnent ces équations séparées, $ba^2 = bo.bc$, & $ac^2 = bc.oc$: on forme cette somme $ba^2+ac^2 = bo.bc+bc.oc$. on voit que dans ce second membre, la quantité *bc* multiplie en même tems, & la ligne *bo*, & la ligne *oc*: on peut donc dire qu'elle multiplie la somme de ces lignes, ou la ligne entiere *bc*. Donc $ba^2+ac^2 = bc^2$ (parce qu'alors la ligne *bc* est multipliée par elle-même). Par conséquent, le quarré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à la somme des quarrés séparés de chaque côté de l'angle droit. On peut conclure aussi des mêmes propositions que $ba^2:ac^2::bo.bc:oc.bc$, & par conséquent que $ba^2:ac^2::bo:oc$ (en divisant les deux termes du dernier rapport par la même quantité *bc*); c'est-à-dire,

que les quarrés des côtés de l'angle droit d'un triangle sont entr'eux comme les segmens de l'hypothénuse, qui sont formés par une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit sur ce coté. Enfin, de la derniere proposition, on peut encore tirer celle-ci, $(ba^2+ac^2):ba^2::(bo+oc):bo$, ou, $bc^2:ba^2::bc:bo$. On peut dire, aussi par la même raison, $bc^2:ac^2::bc:co$: par conséquent, $bc^2:ba^2:ac^2::bc:bo:oc$. Ce qui signifie qu'ayant abaissé du sommet de l'angle droit d'un triangle, une perpendiculaire sur son hypothenuse, les parties de celles-ci, & elle-même, sont entr'elles comme les quarrés, & des côtés de l'angle droit, & de l'hypothenuse.

Les propriétés des triangles rectangles fournissent un moyen de déterminer une ligne qui soit moyenne proportionnelle entre deux lignes données. Soient (fig. 29) les deux lignes *or* & *qz*, entre lesquelles on doit trouver une moyenne proportionnelle. Il faut, pour y parvenir, que ces deux lignes mises bout à bout, deviennent, dans un triangle rectangle, les deux segmens d'une hypothenuse coupée, par une ligne abaissée sur elle perpendiculairement, du sommet de l'angle droit. Cette derniere ligne est alors celle qui est demandée. Tout se reduit ainsi à construire un triangle rectangle sur une hypothenuse *ac*, qui soit la somme des lignes données *or* & *qz*; & la proprieté du cercle en presente un moyen facile. Car on sait que tout angle qui a son sommet à la circonference d'un cercle, & dont les côtés passent par les extremités d'un de ses diametres, est necessairement de 90 degrès. C'est pourquoi on doit decrire, sur *ac* comme diametre, une demi-circonference *adc*; & elever à cette ligne, par le point *b* de jonction des deux lignes données, une perpendiculaire *db*. Cette derniere ligne, qui est bornée par le diametre *ac*, & par la circonference, est alors la moyenne proportionnelle cherchée. Car en menant les deux cordes *ad* & *dc*, on forme un triangle *adc*, qui est rectangle en *d*, & dans lequel la ligne trouvee *db*, est une perpendiculaire abaissée du sommet de l'angle droit de ce triangle, sur son hypothenuse.

124. Remarquons que si, sur chaque point du diametre

metre *ac*, on éleve autant de perpendiculaires, telles que *bd*, chacune eſt également moyenne proportionnelle entre les deux ſegmens correſpondans du diametre *ac*; parce que, pour chacune, on peut conſtruire un triangle rectangle, tel que *adc*. Ainſi c'eſt une propriété qui eſt commune à tous les points de la circonférence d'un cercle, ſavoir que toute perpendiculaire, abaiſſée d'un point de cette circonférence ſur un de ſes diametres, eſt moyenne proportionnelle entre les deux parties coupées de ce même diametre. La propriété des triangles rectangles a conduit par conſéquent à la propriété la plus eſſentielle des cercles. Ceux-ci ont encore quelques autres propriétés diſtinctives ; & quoiqu'elles ſoient moins intéreſſantes, il eſt cependant à propos de les développer.

Si deux cordes d'un cercle ſe traverſent, leurs parties ſont entr'elles réciproquement proportionnelles. Soit un cercle *abc* (fig. 23) dans lequel deux cordes quelconques, telles que *ac* & *bp*, ſe coupent en *q*. Si on joint les points extrêmes *p* & *c*, par une ligne droite *pc*, ainſi que *a* & *b*, par une autre ligne *ab*; on forme deux triangles *pqc* & *aqb*, qui ſont ſemblables ; parce que, non ſeulement les angles *pqc* & *aqb* ſont égaux, comme oppoſés au ſommet; mais auſſi parcequ'il y a égalité entre les angles *qpc* & *baq*, comme ayant pour meſure la moitié du même arc *bec* : donc on peut dire, en comparant les côtés homologues, $qp:aq::qc:qb$; c'eſt-à-dire, que les parties de la premiere corde *ac*, ſont les moyens d'une proportion, dont les extrêmes ſont les parties de l'autre corde *pb*. Ces deux cordes ſe coupent donc en parties réciproquement proportionnelles. En étendant cette démonſtration à deux cordes qui ſeroient perpendiculaires entr'elles; il en réſulteroit auſſi, comme on l'a vu précédemment, la propriété diſtinctive du cercle.

Si on conſidere deux ſécantes *nb* & *nc*, menées d'un point tel que *n*, qui eſt placé hors d'un cercle *abc*; ces lignes ſont toujours coupées par la circonférence, aux points tels que *p* & *a*, de maniere que leurs parties extérieures *an* & *np*, ſont réciproquement proportion-

nelles aux ſécantes entieres. Car ſoient menées les cordes *ac* & *bp*, qui réuniſſent, l'extrémité d'une ſécante, & le point d'interſection de l'autre ſécante avec la circonférence. Alors il y a deux triangles *anc* & *nbp* qui ſont ſemblables, puiſqu'ils ont un angle commun en *n*, & que les angles *nca* & *qbn* ſont égaux, comme ayant chacun pour meſure la moitié du même arc *ap*. On peut donc faire cette proportion *np*:*na*::*nb*:*nc*; ce qu'il falloit démontrer.

Cette derniere vérité ne dépend, ni de la longueur des ſécantes, ni de la grandeur de l'angle qu'elles forment entr'elles. C'eſt pourquoi, ſi l'une d'elles eſt ſuppoſée s'éloigner de l'autre, juſqu'à devenir tangente au cercle, en un point *f*; la même proportion ne peut ceſſer d'avoir lieu. Ainſi, conſidérons toujours ces lignes comme deux ſécantes, ou particulièrement la ligne *nf*, comme une ſécante qui eſt devenue égale à ſa partie extérieure. On peut dire alors, dans cette nouvelle ſuppoſition, *nb*:*nf*::*nf*:*na*; c'eſt-à-dire, que d'un même point placé hors d'un cercle, ſi on mene une ſécante & une tangente à ſa circonférence; la ligne qui eſt tangente, eſt toujours moyenne proportionnelle entre la ſécante & ſa partie extérieure. Cette propoſition offre encore un nouveau moyen de trouver une ligne qui ſoit moyenne proportionnelle entre deux lignes données.

Enfin, pour terminer ce qui regarde les triangles ſemblables, nous diſons que leurs contours ſont entr'eux comme leurs côtés homologues: ou que la ſomme des côtés d'un triangle, eſt à celle des côtés d'un triangle qui eſt ſemblable au premier, comme un côté du premier, eſt au côté homologue du ſecond. Car ſoient ſuppoſés ſemblables les triangles *abc* & *mon* (fig. 21), leurs côtés homologues ſont tous proportionnels: on peut donc dire, *ab*:*mo*::*ac*:*mn*::*bc*:*on*; & de cette ſuite de rapports, on peut conclure la proportion ſuivante: *ab*+*ac*+*bc*:*mo*+*mn*+*on*::*ab*:*mo*; la propoſition annoncée ſe trouve ainſi démontrée.

115. Deux polygones ne peuvent être réputés ſemblables qu'autant que leurs angles ſont égaux & leurs

côtés homologues proportionnels : mais lorſque diviſés par des diagonales, qu'on ſuppoſe menées de deux angles homologues aux autres angles, ces polygones ſont partagés en triangles qui ſont ſemblables, ils ſont eux-mêmes ſemblables l'un à l'autre. Par exemple, ſoient (fig. 19) les polygones *abcde* & *fghil* partagés par des diagonales menées des angles homologues *b* & *g*, en triangles qui ſont ſemblables chacun à chacun. La ſimilitude de ces triangles conduit à conclure, & l'égalité des angles des deux polygones, & la proportionnalité de leurs côtés. En effet, *bcd* étant ſemblable à *ghi*, les angles *bcd* & *ghi* ſont égaux, & ces angles appartiennent aux polygones. Il y a auſſi égalité entre les angles *bdc* & *gih*, par la même raiſon, & entre les angles *bde* & *gil*, parce que les triangles *bde* & *gil* ſont ſemblables : par conſéquent, la ſomme des angles *bdc* & *bde* eſt égale à celle des angles *gih* & *gil*; c'eſt-à-dire, que l'angle total *cde* de l'un des polygones, eſt égal à l'angle *hil* de l'autre polygone. On démontreroit de même l'égalité des autres angles correſpondans *dea* & *ilf* : donc les polygones ſuppoſés ont leurs angles égaux chacun à chacun, lorſque les triangles qui les compoſent ſont ſemblables. Leurs côtés ſont auſſi proportionnels dans la même ſuppoſition. Les deux premiers triangles *bcd* & *ghi* étant ſemblables, donnent cette ſuite de rapports égaux, $bc:gh::cd:hi::bd:gi$. En comparant les deux triangles ſuivans *bed* & *gli*, qui ſont auſſi ſemblables, on peut dire $bd:gi::de:li::be:gl$; & enfin des deux triangles *abe* & *fgl*, on conclut que $be:gl::ae:fl::ab:fg$. La premiere ſuite a un rapport commun, avec la ſeconde qui elle-même a auſſi un rapport commun avec la troiſieme : donc tous les rapports qui les compoſent ſont égaux : & on peut dire $bc:gh::cd:hi::de:il::ae:fl::ab:fg$. En général, deux polygones ſont donc ſemblables, lorſqu'étant partagés en un même nombre de triangles par des diagonales menées de deux angles homologues aux autre angles, ces triangles ainſi formés ſont eux-mêmes ſemblables.

La propoſition inverſe eſt auſſi vraie; c'eſt-à-dire, ſi deux polygones ſont ſemblables; & s'ils ſont partagés

en triangles, comme on l'a indiqué précédemment; les triangles dont ils sont composés, sont aussi semblables chacun à chacun. Soient ces deux polygones représentés (fig. 19); le triangle particulier *bcd* est semblable à son correspondant *ghi*: car les angles *bcd* & *ghi* sont égaux, comme appartenant aux deux polygones semblables, qui d'ailleurs ayant leurs côtés homologues proportionnels, permettent de faire cette proportion, *bc*:*gh*::*dc*:*ih*. Par conséquent les triangles comparés ont un angle égal, compris entre deux côtés proportionnels: ils sont donc semblables. Il en résulte, 1.° qu'il y a égalité soit entre les angles *gih* & *bdc*, soit entre *dbc* & *igh*; & 2.° qu'on peut dire, *dc*:*ih*::*bd*:*gi*. Le triangle suivant *bde* est aussi semblable à son correspondant *gli*: car les angles *cde* & *hil* des polygones sont égaux. Ainsi, en retranchant de chacun l'angle *bdc*, ou son égal *gih*, les restes *edb* & *lig* sont égaux. Ces triangles ont donc un angle égal. D'ailleurs cet angle est compris entre deux côtés proportionnels. Car par la similitude des polygones, on doit dire, *dc*:*hi*::*de*:*il*; & en comparant cette proportion à la derniere, on doit en conclure, à cause du rapport commun de *dc*:*ih*, que *bd*:*gi*::*ed*:*li*; donc les deux seconds triangles de ces polygones sont semblables. C'est en suivant la même marche, qu'il est aisé de démontrer la similitude, des autres triangles, qui se correspondent dans ces deux polygones: donc il est vrai en général, que deux polygones, étant semblables, & divisés en un même nombre de triangles, les triangles qui les composent sont aussi semblables chacun à chacun.

Les contours de deux polygones semblables, sont, comme ceux des triangles semblables, dans le rapport de deux de leurs côtés homologues. Car tous leurs côtés sont proportionnels: on peut donc dire, *bc*:*gh*::*cd*:*ih*::*ed*:*li*::*ea*:*lf*::*ab*:*fg*; & dans cette suite de rapports égaux, si on compare la somme des antécédens à celle des conséquens; il en résulte, que le contour du premier polygone ou la somme de ses côtés, est au contour du second, comme *ab*:*fg*, ou, ::*bc*:*gh*, &c.

Ces propositions s'étendent à tous les polygones, quel

que puiſſe être le nombre de leurs côtés; ainſi elles s'appliquent aux polygones réguliers, & même à ceux dont les côtés ſeroient ſuppoſés infinis en nombre, comme en petiteſſe; c'eſt-à-dire, à tous les cercles. Néanmoins il n'en eſt pas également des cercles comme des polygones réguliers: car ceux-ci peuvent n'être pas ſemblables, & les cercles le ſont toujours. En effet ſoient inſcrits deux polygones réguliers *abcde* & *iktr* (fig. 20) à deux cercles concentriques, de maniere que leurs côtés correſpondans ſoient compris entre les les mêmes rayons menés du centre commun aux diviſions égales des circonférences: ou bien, ſoient tracés deux cercles concentriques, dont les circonférences ſoient diviſées chacune en un même nombre de parties égales entr'elles. Soient menés auſſi, des rayons à tous les points de diviſion, & des cordes à tous les arcs de ces circonférences. On forme de cette maniere deux polygones réguliers qui ſont inſcrits aux deux cercles, & de tels polygones ſont néceſſairement ſemblables. Car le triangle *iok*, par exemple, eſt ſemblable à ſon correſpondant *eod*; puiſqu'ils ont un angle commun en *o*, & parce qu'on peut faire cette proportion, $oi:ok::oe:od$, à cauſe de l'égalité des rayons d'un d'un même cercle. Ces deux triangles ont donc un angle égal compris entre deux côtés proportionnels; & par conſéquent ils ſont ſemblables. Tous les autres triangles, qui ſont partie des mêmes polygones, ſont ſemblables, par les mêmes raiſons: ainſi ces polygones ſont eux-mêmes ſemblables, comme compoſés d'un même nombre de triangles ſemblables.

Si maintenant on ſuppoſe à ces polygones, une infinité de côtés qui ſoient par conſéquent infiniment petits; ils doivent alors ſe confondre parfaitement avec les circonférences circonſcrites, en reſtant néanmoins ſemblables. Par conſéquent ces deux cercles, ainſi que tous les cercles poſſibles, ſont des figures ſemblables. Les contours ou les circonférences des cercles, ſont donc, comme ceux de tous les polygones ſemblables, dans le rapport de leurs côtés homologues; c'eſt-à-dire, dans l'exemple préſent, qu'on peut faire cette propor-

tion : la circonférence *abcdef*, eſt à la circonférence *thkir*::*ed*:*ik* ; mais *ed*:*ik*::*oe*:*oi*, à cauſe des triangles ſemblables *oed* & *oik* : donc les circonférences de deux cercles quelconques, ſont entr'elles comme leurs rayons ou leurs diametres.

Ce rapport eſt extrémement utile : car il ſert à déterminer, ou la longueur de la circonférence d'un cercle dont le diametre eſt donné, ou le diametre d'une circonférence connue. En effet, nous avons dit que par des meſures priſes ſur un cercle de 7 pieds de diametre (94), on a trouvé que ſa circonférence eſt de 22 pieds : c'eſt pourquoi un tel cercle peut être employé comme terme de comparaiſon, pour calculer le diametre ou la circonférence de tout cercle imaginable. Ainſi demande-t-on le diametre d'une circonférence qui a 35 pieds de longueur ; il faut faire cette proportion 22:7::35:x, & ce quatrieme terme, qui eſt le diametre cherché, eſt de 11 pieds $\frac{3}{22}$.

116. Si une circonférence peut être décrite, étant donné ſon diametre, on peut auſſi conſtruire un polygone qui ſoit ſemblable à un autre polygone connu, étant donné un ſeul côté du polygone cherché. Car ſoit *zs* (fig. 19) le côté donné, qui eſt ſuppoſé homologue à *ba* (côté du polygone connu). Si par *g*, on mene *gi* parallele à *ea* ; ſi par *i*, on mene une ligne *il* parallele à *ed* ; & par *l*, une parallele à *dc* ; on forme alors un polygone *bgilm* qui eſt parfaitement ſemblable au polygone *bcdea*. Car ainſi qu'on peut le conclure des lignes paralleles, ils ſont compoſés l'un & l'autre de triangle qui ſont ſemblables chacun à chacun.

Veut-on tracer, d'après ces notions, & ſur le papier, une figure ſemblable à celle d'une rade, ou d'une baie, ou d'une partie de côte. Comme ces objets ont peu d'étendue ſur la ſurface du globe, on peut conſidérer tous les points d'un eſpace auſſi borné, comme étant dans un même plan. Alors l'image qu'on veut en deſſiner ſur le papier, ne doit être qu'un polygone ſemblable au polygone naturel que préſente la ſurface du globe.

Soit, par exemple, un havre *dcbafghie* (fig. 30). Son contour a des points plus ou moins apparens &

saillans, qui le rendent plus prononcé, & par conséquent plus reconnoissable. Telles sont des pointes avancées, des îles, des sinuosités, &c. Ainsi, pour tracer la figure de ce havre, ou pour en faire une image ressemblante, il faut d'abord supposer ces points principaux, comme liés l'un à l'autre par des lignes; mesurer les longueurs de ces lignes, & les angles qu'elles font entr'elles; ou il faut connoître les triangles qu'on peut former par des diagonales menées d'un des points principaux à tous les autres qui font partie de l'ensemble de ce havre. La méthode de décomposer un tel polygone naturel en triangles formés par des diagonales, & de déterminer séparément les parties de tous ces triangles, est la plus commode & la plus usitée, pour servir de fondement au tracé d'un tel plan; c'est pourquoi elle va être exposée en détail.

On choisit, d'après la supposition faite, deux points *a* & *b* sur le terrein, & placés, de maniere qu'un observateur puisse voir, de chacun des points *a* & *b*, tous les objets principaux du havre, tels que les points *f*, *g*, *h*, *i*, *e*, *b*, *d*, *c*. On fait aussi ensorte que la distance particuliere des points *a* & *b*, soit environ la dixieme partie de celle des deux points les plus éloignés, qui doivent être marqués sur le plan. On mesure exactement la distance *ab*, ou la ligne qui joint les deux points *a* & *b*; & cette ligne reçoit le nom de base. On mesure aussi, du point *a*, les angles que forme la base avec tous les rayons visuels, dirigés, de cette extrémité *a* de la base, à chaque point principal de l'étendue du havre; & ces mesures sont faites avec les instrumens déjà décrits (99). Les valeurs des angles *cab*, *dab*, *eab*, &c. étant ainsi déterminées; l'observateur se transporte en *b*, & mesure également les angles que font avec la base *ba*, les rayons visuels dirigés, de cette extrémité *b*, aux mêmes points qui ont été observés du point *a*. Ces opérations faites sur le terrein, suffisent alors pour construire sur le papier une figure semblable à celle que présente le terein. A cet effet, on trace sur le papier une ligne *kl*, qu'on compose d'autant de parties égales, qu'il se trouve de toises ou de pieds dans la mesure

de *ba*. Enſuite, à l'aide d'un rapporteur & d'un crayon, on mene, des points k & *l* ſucceſſivement, des lignes qui faſſent avec k*l*, des angles égaux à ceux qui ont été obſervés ſur le terrein, en *a* & *b*. Alors les points *s*, *r*, *q*, *p*, *o*, *i*, *n*, *m* d'interſection des dernieres lignes & des précédentes, deviennent les lieux de tous les points principaux du havre. Ces points ſur le papier ſont d'ailleurs ſitués reſpectivement, comme les objets qu'ils repréſentent, le ſont ſur le terrein; c'eſt-à-dire, que leurs diſtances réciproques marquées ſur ce plan, ſont proportionnelles à celles qui ſéparent les objets ſur le terrein. En effet, qu'on ſuppoſe un inſtant tous ces points réunis par des lignes droites, & ſur le plan, & ſur le terrein; il eſt aiſé de prouver qu'alors on a fait ſur le papier un polygone ſemblable au polygone naturel. Les triangles *bde* & *lno*, par exemple, ſont évidemment ſemblables: car d'après la conſtruction qui vient d'être indiquée, le triangle *ln*k a été fait ſemblable au triangle *bda*, & le triangle *lo*k au triangle *bea*. On a donc les proportions, *ba*:k*l*::*bd*:*ln*, & *ba*:k*l*::*be*:*lo*, qui donnent celle-ci, *bd*:*ln*::*be*:*lo*. D'ailleurs l'angle *nlo* a été fait égal à l'angle *dbe*: par conſéquent les triangles *bde* & *lno* ſont ſemblables, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. Ce même raiſonnement appliqué à tous les triangles *bdc*, *bie*, *bih*, &c. comparés aux triangles *lmn*, *lor*, *lrq*, &c. conduit à conclure leur ſimilitude; & par conſéquent celle, du deſſein fait ſur le papier, au polygone imaginé ſur le terrein. L'égalité des angles de ces figures démontre que les objets principaux du havre ſont repréſentés ſur le papier par des points ſemblablement ſitués; & la ſimilitude des triangles fait voir auſſi, que les diſtances des points marqués ſur le plan, ſont proportionnelles aux diſtances réelles des objets, ſur le terrein. Le plan eſt même tel, que, par la diſtance de deux points quelconques choiſis ſur le plan de ce havre, on peut juger de leur diſtance réelle dans le havre même. Car veut-on ſavoir la grandeur de l'ouverture *de*? on doit dire, k*l*:*ab*::*no*:*de*; & comme k*l* eſt ſuppoſé contenir autant de parties égales que *ab* contient de toiſes:

de même le nombre de parties égales qu'on peut compter dans la ligne *me* tracée ſur le plan, indique le nombre de toiſes qu'on compte réellement dans l'ouverture *de* du havre. Enfin on acheve de rendre ce plan, parfaitement reſſemblant au havre dont il doit être l'image, en réuniſſant tous les points principaux déjà marqués, par des lignes droites ou courbes tirées de l'un à l'autre, & dont la forme eſt, autant qu'il eſt poſſible, rendue conforme aux contours des parties de côte, qui ſeparent ces objets ſur le terrein. Ces contours d'ailleurs peuvent être déſſinés d'après des relévemens exacts des points ſoit principaux ſoit intermédiaires. Par ce moyen, on obtient ſur le papier une figure parfaitement ſemblable, dans tous ſes détails, à celle du havre qu'il falloit repréſenter: & c'eſt par ce moyen qu'on tranſmet aux navigateurs l'image fidelle de certaines parties des côtes de la mer, dont la connoiſſance importe à leur ſûreté, ou à leur ſuccès.

117. *Trigonométrie rectiligne.* On voit par ce qui précede, qu'étant donné un côté d'un polygone, dont les angles & les autres côtés ſont inconnus & cherchés, on ne peut détèrminer la grandeur de ces derniers, qu'en comparant le premier polygone à un ſecond qui lui eſt ſemblable, & dont toutes les parties ſont connues. On ſait qu'il en eſt de même pour les triangles. Cependant lorſque les circonſtances ne préſentent pas un triangle, qui, connu dans toutes ſes parties, ſoit ſemblable à celui dont on ſe propoſe de calculer les angles ou les côtés; dans ce cas on peut recourir à d'autres moyens, pour découvrir la grandeur de ces derniers. En effet, nous allons démontrer, qu'étant données les meſures de trois parties d'un triangle (en ſuppoſant que l'une d'elles ſoit un des côtés); elles ſuffiſent pour déterminer la valeur de chacune des trois autres parties de ce même triangle. Si on établit ainſi pour condition, qu'il y ait toujours un côté parmi les trois parties connues, c'eſt parce que les trois angles d'un triangle, ne peuvent ſervir ſeuls à donner une idée des côtés. Car des angles de même grandeur appartiennent à tous les triangles qui ſont ſemblables, & qui ont en même tems des côtés de diffé-

rente longueur. Ainsi, les résultats des calculs devroient alors convenir à une infinité de triangles, ce qui les rendroit indéterminés & sans objet. Il faut donc qu'un des côtés soit toujours, au nombre des trois parties connues d'un triangle, pour que la grandeur réelle de ses autres parties puisse être déterminée.

Nous avons exposé comment on mesure les angles rectilignes : nous avons vu, que les comparaisons à établir entre ces angles, étoient bornées à celles de leurs mesures ; & les rapports de leur grandeur ont été reduits uniquement à ceux des arcs qu'ils embrassent entre leurs côtés. Le besoin de multiplier les points de vue sous lesquels on peut comparer des angles, a fait encore imaginer entr'eux de nouveaux rapports ; & on les a fondés sur les sinus des arcs qui leur servent de mesure, ainsi que sur les tangentes, les sécantes, les cosinus, les cotangentes, & les cosécantes de ces mêmes arcs. Toutes ces lignes, que nous allons faire connoître, ont paru devoir être substituées, dans plusieurs circonstances, aux arcs eux-mêmes, soit parcequ'elles sont toujours de même grandeur pour un même arc, ou pour son supplément dans un même cercle, soit parce qu'elles peuvent servir à déterminer, par leur longueur particuliere, le nombre des dégrés des arcs auxquels elles appartiennent. Soit un angle *dgi* (fig. 31), & soit décrit de son sommet *g* comme centre, l'arc *ci* qui est sa mesure. Le sinus de cet angle, ou de l'arc *ci*, est une perpendiculaire abaissée de l'extrémité *c* de cet arc, sur l'autre côté de l'angle, ou sur le rayon *gi* qui passe par l'autre extrémité de *ci*. La tangente de l'arc *ci*, ou de l'angle *cgi*, est une ligne *ie*, qui est tangente à une extrémité *i* de cet arc, & qui est bornée, dans sa longueur, par le prolongement du rayon *gc*, mené par l'autre extrémité *c* de l'arc *ci*. Enfin la sécante de cet arc est *ge*, ou une ligne qui menée par le centre & l'extrémitée *c* de l'arc *ci*, est comprise entre ce centre & le point ou elle rencontre la tangente *ei* du même arc. Les autres lignes nommées, cosinus, cotangente & cosécante de l'arc *ci*, sont les sinus, tangente & sécante du complément de ce même arc. Ainsi l'arc *ai* étant de 90 dégr.

l'arc *ac* eſt le complément de *ci;* le ſinus de *ac* eſt *cz* ou *og;* ſa tangente eſt *ad*; & ſa ſécante eſt *gd*: c'eſt-à-dire que le coſinus de *ci* eſt *go*, ſa cotangente eſt *ad*, & ſa coſécante eſt *gd*.

La longueur de chacune de ces lignes eſt proportionnée à la grandeur du rayon du cercle dans lequel elles ſont tracées: & ſi la meſure de l'angle *dgi* eût été décrite avec le rayon *gu*, au lieu du rayon *gi*, les ſinus & tangentes de ce même angle euſſent été des lignes plus petites que *co* & *ie*, auxquelles cependant elles ſont proportionnelles. Les rapports des ſinus, ainſi que des tangentes, ſont auſſi ceux des rayons des deux circonférences: ainſi, en variant la la longueur du rayon, on change la grandeur de ces lignes. C'eſt pourquoi l'uſage utile & commode auquel elles ſont deſtinées, a fait convenir de choiſir un rayon d'une longueur déterminée, pour ſervir d'unité de meſure. C'eſt avec ce rayon, qu'eſt ſuppoſée décrite la circonférence dans laquelle ſont tracées ces lignes, relatives à tous les arcs poſſibles, ou à tous les arcs imaginables. C'eſt dans cette circonférence qu'on a meſuré ou calculé leurs longueurs particulieres; & c'eſt d'après ces meſures & ces calculs, qu'on a formé des tables générales, qui préſentent les longueurs des ſinus & des tangentes de tous les angles, ainſi que les logarithmes qui leur correſpondent. Le rayon convenu qui ſert de baſe à ces tables, eſt, par cette raiſon, nommé le rayon des tables, & il a 10 pour logarithme.

Il faudroit ſans doute, avant d'indiquer comment ces tables ont pu être conſtruites, faire connoître comment elles peuvent ſervir dans la recherche des parties d'un triangle; mais leur importante néceſſité doit être déjà préſumée. Elle ſera démontrée, ſoit dans les propoſitions qui ſuivent, ſoit dans leurs applications nombreuſes; & pour ne pas y revenir, nous allons préſenter des détails ſur leur formation.

Soit donc *gi* le rayon des tables, qu'on regarde d'ailleurs dans les calculs comme égal à l'unité. Ce rayon eſt auſſi le ſinus d'un arc de 90 dégrés, tel que *ai*; tandis que le coſinus de cet arc eſt nul, parce que

ſon complément eſt o. Si on ſuppoſe *ci* de 30 dégrés, ſon ſinus eſt *co*. Le double de ce ſinus, qui eſt *cl*, ou la corde, d'un arc double de *ci*, c'eſt-à-dire de 60 dégrés, eſt égal au rayon *gi*; parce que le rayon eſt égal au côte de l'exagone régulier: & par conſéquent, le ſinus d'un arc de 30 dégrés, eſt la moitié du rayon des tables.

Remarquons qu'il ſuffit de connoître le ſinus d'un angle (tant toujours donné le rayon des tables), pour déterminer ſon coſinus, ſa tangente, ſa cotangente & ſa ſécante. Car dans le triangle rectangle *gco* (par la propriété de ces triangles), go^2, ou le quarré du coſin. de *ci*, eſt égal à la différence du quarré du rayon au quarre du ſinus du même arc. Les triangles *gco* & *gei*, étant ſemblables, donnent cette proportion, (*a*) *coſ. ci* : *ſin ci* :: 1 : *tang. ci* (en nommant le rayon 1); & celle-ci (*b*) *coſ. ci* : 1 :: 1 : *ſec. ci*. Enfin, les triangles *gei* & *agd* étant ſemblables, parce qu'ils ont, un angle droit, l'un en *a* & l'autre en *i*; & des angles *adg* & *dgi*, qui ſont égaux comme étant alternes internes, on en conclut cette proportion, (*c*) 1 : *cot. ci* :: *tang. ci* : 1. Il ſuffit donc, comme nous l'avons énonce, de connoître le ſinus d'un arc, pour en conclure la grandeur de ſon coſinus, de ſa tangente, de ſa cotangente & de ſa ſécante.

Ce qui vient d'être dit pour l'arc *ci*, pourroit l'être auſſi pour tout autre arc, tel que *bi*; ainſi imaginons de pareilles proportions pour cet arc *bi*, & comparons les avec celles qui ſont faites pour l'arc *ci*. Il réſulte des proportions, telles que (*b*), que *coſ. ci* : *coſ. bi* :: *ſec. bi* : *ſec. ci*; c'eſt-à-dire que les coſinus de deux arcs ſont en raiſon inverſe de leurs ſécantes. Si on compare les proportions, telles que (*c*), on en conclut que *cot. ci* : *cot. bi* :: *tang. bi* : *tang. ci*, ou que les tangentes de deux arcs ſont en raiſon inverſe de leurs cotangentes.

Toutes ces propoſitions offrent, ſans doute, des moyens, pour conſtruire des tables de ſinus; mais elles ne ſuffiſent pas. & elles concourent ſeulement avec les

ſuivantes, pour favoriſer cette opération. Voici une propoſition principalement utile dans ces calculs.

118. On peut d terminer le ſinus de la ſomme de deux arcs, ou celui de leur différence, étant donnés les ſinus & coſinus ſ parés de chacun de ces arcs. Soient (fig. 32) deux arcs *dc* & *ca*, dont la ſomme eſt *da*, & la différence *ba*. Le ſinus de *ca* (que nous nommerons ſin. A) eſt *cn*; celui de *cd* (qui ſera nommé ſin. B) eſt *dr*. Le coſinus de A eſt *ne*; & *re* eſt coſinus B. Le ſinus de la ſomme de ces deux arcs, ou *ſin.* (*A+B*) eſt *du*; & celui de leur différence, ou *ſin.* (*A-B*) eſt *bs*. Le premier *du* eſt compoſé de *do* & *ou*; c'eſt-à-dire, de *rm* & *do* (en ſuppoſant, *rm* menée parallélement à *du*, par le point *r*; & *ro* parallele à *mu*). Le ſecond *bs* n'eſt que la différence de *ou* ou de *rm* avec *oi*; mais *oi* eſt une ligne égale à *do*, parce que la corde *db* étant diviſée en deux parties égales en *r*, la ligne *di* doit auſſi être, diviſée comme elle, au point *o*, par les paralleles *ro* & *bi*; par conſéquent, le ſinus de la différence des deux arcs donnés, eſt égal à la différence des deux lignes *rm* & *do*. tout le problême ſe réduit donc à trouver l'expreſſion de *rm*, & celle de *do*, pour en conclure la valeur de *ſin.* (*A+B*), & de *ſin.* (*A-B*).

Si on compare enſemble les triangles ſemblables *ecn* & *erm*, on a la proportion, *rm*:*ſin. A*::*coſ. B*:1, & par conſéquent, *rm*=*ſin. A. coſ. B.* En comparant enſuite au même triangle *cne*, le triangle *dro* qui lui eſt ſemblable; (parce que les côtés de celui-ci ſont perpendiculaires à ceux du premier): on a auſſi *do*:*coſ. A*:: *ſin. B*:1, ou *do*=*coſ. A. ſin. B.* La ſomme des deux lignes *rm* & *do*, ou *du*, ou *ſin.* (*A+B*), eſt donc égale à *sin. A. coſ. B*+*ſin. B. coſ. A.* En prenant la différence de ces mêmes lignes ou de leurs valeurs, on a donc *ſin.* (*A-B*)=*ſin. A. coſ. B*-*ſin. B. coſ. A.* Il ſeroit ſuperflu de calculer directement l'expreſſion des coſinus, de la ſomme, & de la différence de ces mêmes arcs; puiſqu'on ſait qu'étant donné le ſinus d'un arc, on en conclut aiſément ſon coſinus; mais il eſt bon de faire remarquer quelques conſéquences de ces

propositions. Si le sinus d'un arc est donné, & par conséquent son cosinus, on peut en conclure le sinus du double de cet arc, ainsi que celui de sa moitié. Car en supposant que A=B, dans les expressions précédentes, on doit avoir $fin.\ 2A = 2 fin.\ A\ cof.\ A$; c'est-à-dire, qu'étant donné le sinus & le cosinus d'un arc A, on peut déterminer $fin.\ 2A$. On peut dire aussi, dans la même supposition, $cof.\ 2A = cof.\ A^2 - fin.\ A^2$, ou $cof.\ 2A = 1 - 2 fin.\ A^2$, parce que $cof\ A^2 = 1 - fin.\ A^2$: & enfin $fin.\ A^2 = \frac{1}{2}(1 - cof.\ 2A)$; c'est-à-dire que le cosinus d'un angle étant connu, on peut calculer le sinus de la moitié de cet angle. Cependant ce dernier résultat peut encore être obtenu d'une autre maniere. Soit *sy* (fig. 31) un arc, dont on connoît le sinus *sx*, & par conséquent, son cosinus *xg*. Le sinus de la moitié de cet arc est *sq*, moitié de la corde qui soutend l'arc *sy*; & comme en ajoutant le quarré du sinus *sx* qui est connu, avec celui de *yx* (qui est la différence du rayon avec le cosinus connu du même arc *sy*), on obtient le quarré de la corde entiere *sy*; il s'ensuit que le sinus de la moitié de l'arc *sy*, est la racine quarrée de la moitié de la somme indiquée; c'est-à-dire, que $sin.\ A^2 = \frac{1}{2}(1 - cof.\ 2A)$, comme précédemment.

C'est avec ces principes qu'on a pu calculer successivement les valeurs des sinus & tangentes de tous les arcs compris, depuis 0 jusqu'à 90 degrés; en remarquant que les arcs très-petits different peu de leurs sinus, & qu'il est superflu d'étendre les tables à des angles plus grands que 90 degrés. Car le sinus d'un angle obtus est toujours celui de son supplément: c'est-à-dire, par exemple, que le sinus de l'angle *sgi* (fig. 31), est la ligne *sx*, qui est le sinus de l'angle *sgy*, supplément de *sgi*.

119. Voici actuellement comment, dans un triangle rectiligne, on peut calculer trois de ses parties (angles ou côtés), étant données les trois autres parties, dont une au moins doit être un des côtés.

Trois principes généraux servent de base à ces calculs. Le premier, est que les sinus des angles d'un triangle sont entr'eux comme les côtés opposés à ces mêmes

angles. Soit le triangle *abc* (fig. 23). On le suppose inscrit à un cercle. La moitié de la corde, ou du côté *ab*, est généralement le sinus de la moitié de l'arc *adb*, ou de la mesure de l'angle *c*. Il en est de même des autres côtés de ce triangle, relativement aux angles qui leur sont opposés; & comme les moitiés de deux quantités sont nécessairement dans le rapport des quantités entieres, on peut dire, *ab*:*ac*:*bc*::*sin.acb*:*sin.abc*::*sin.bac*. De tels sinus de ces angles ont une longueur qui est relative à celle du rayon du cercle circonscrit; mais on peut substituer à leurs rapports, ceux des sinus des mêmes angles qui sont calculés dans les tables.

En effet, soit décrit, intérieurement au cercle *abcdef* qui est supposé égal (fig. 20) à celui qui est représenté (fig. 23), & avec le rayon des tables, un nouveau cercle *rkt*. L'angle *uot*, qui a son sommet au centre commun des deux cercles, a pour sinus la ligne *tp* dans l'un des cercles, & la ligne *bg* dans l'autre. Mais ces sinus, à cause des triangles semblables *opt* & *ogb*, sont entr'eux, comme le rayon du premier cercle, qui est celui des tables, est au rayon du plus grand cercle. Par conséquent, les sinus de deux arcs, considérés dans un cercle quelconque, sont dans un rapport égal à celui des sinus des tables. Ainsi, dans la proportion précédente, au lieu des rapports des sinus des angles du triangle *abc*, on peut substituer les rapports des sinus de ces mêmes angles, tels qu'ils sont calculés dans les tables. On peut donc faire cette proportion, *sin.c*:*sin.b*:*sin.a*::*ab*;*ac*:*bc*; c'est-à-dire que les sinus (calculés dans les tables) des angles d'un triangle, sont entr'eux comme les côtés opposés à ces mêmes angles.

Cette proportion sert dans tous les cas, excepté deux qui sont, 1.° le cas où les trois côtés d'un triangle sont donnés; & 2.° celui ou deux de ses côtés & l'angle qu'ils forment entr'eux sont connus. C'est pour ces deux derniers cas qu'on a imaginé deux autres principes qui vont être démontrés successivement. Avant de nous en occuper, il est à propos de faire remarquer les proportions qui résultent du premier principe, & qu'il convient de faire pour la résolution particuliere

des triangles qui ſont rectangles. Soit conſidéré le triangle *fde* (fig. 21) dans lequel l'angle *e* eſt ſuppoſé de 90 dégrés. on ſait que le ſinus d'un angle droit eſt égal au rayon, & que le rayon des tables eſt repréſenté par l'unité: ainſi, en appliquant le premier principe déja démontré, à ce triangle *edf*, on peut dire 1:*df*::*ſin. d*:*ef*::*ſin. f*:*ed.* Ce qui exprime que le rayon des tables eſt à l'hypothénuſe d'un triangle rectangle, comme le ſinus d'un des angles aigus eſt au côté qui lui eſt oppoſé: & la dénomination des termes qui compoſent cette analogie, annonce qu'elle ne peut être employée que dans les cas où l'hypothenuſe eſt donnée ou cherchée. Si dans cette même ſuite de rapports, on ne conſidere que les deux derniers, en ſe rappellant que les angles aigus d'un triangle rectangle ſont complémens l'un de l'autre; on peut dire *ſin. d*:*coſ. d*::*ef*:*ed*; enſuite ſi on diviſe les deux termes du premier rapport, par *coſ. d* (comme *ſin. d*:*coſ. d*::*tang. d*:1), on doit dire (*tang. d*:1::*ef*:*ed*, ou 1:*tang. d*::*ed*:*ef.* Cette proportion eſt particuliere aux ſeuls triangles qui ſont rectangles: & elle exprime que le rayon des tables eſt à la tangente d'un des angles aigus d'un triangle rectangle, comme le côté de l'angle droit, adjacent à cet angle aigu, eſt au côté qui eſt oppoſé à ce même angle. Cette analogie, comme on voit, n'eſt applicable que lorſqu'il n'eſt pas queſtion de l'hypothenuſe, parmi les parties données ou cherchés du triangle C'eſt donc à ce caractere, & à celui que nous avons déſigné précédemment, qu'on diſtingue facilement les cas où l'application de l'une ou de l'autre proportion, devient néceſſaire pour la réſolution d'un triangle rectangle Ces analogies ſerviroient ſans doute à déterminer un côté, d'un triangle rectangle dont les deux autres côtés ſeroient donnés: mais alors il eſt plus commode & plus expéditif de faire uſage de la propriété reconnue des triangles rectangles; ſavoir, que le quarré de l'hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux côtés de l'angle droit; ou que le quarré d'un côté de l'angle droit, eſt la différence du quarré de l'autre côté, à celui de l'hypothénuſe. C'eſt avec tous ces moyens, appliqués convenablement, qu'on parvient;

dans

dans tous les cas, à la résolution des triangles rectangles.

Le second principe qu'on employe dans la résolution de tout triangle rectiligne, ne sert que dans le seul cas ou les trois côtés d'un triangle étant connus, on cherche la grandeur d'un des angles, tel que *c* (fig. 33) dans le triangle *bce*, ou tel que *g* dans le triangle *bge*. Il suppose une perpendiculaire *bd*, abaissée du sommet d'un angle *b*, qui n'est pas cherché, sur le côté opposé *ce* du triangle *bce*, par exemple; & il ne fait connoître directement que la différence des deux segmens *dc* & *de* du côté *be*. C'est avec ces données que la longueur de l'un des segmens est déterminée, & c'est ensuite avec ce segment qu'on calcule l'angle qu'on se propose de connoître.

Soit demandé l'angle *c* dans le triangle *bce*. La proportion qui donne la différence des segmens est celle-ci: la somme des deux segmens, est à la somme des deux autres côtés du triangle, comme la différence de ceux-ci, est à celle des deux segmens; & voici la démonstration de cette analogie. Soit tracée, du point *b* comme centre, & avec un rayon égal au petit côté de l'angle *b*, la circonférence d'un cercle. Si on prolonge le côté *eb*, jusqu'à cette circonférence, on doit remarquer deux sécantes qui partent d'un même point hors du cercle. La premiere *ea*, est la somme des deux côtés *be* & *bc* du triangle *ebc*; & sa partie extérieure *ef* est la différence de ces mêmes côtés. La seconde sécante *ec*, est la somme des segmens *cd* & *de* du côté *ce* dans le triangle *bce*; & sa partie extérieure *ge* est la différence de ces mêmes segmens. Après ces préliminaires, appliquons une proposition démontrée ailleurs (114), relativement à deux sécantes placées comme celles que nous considérons ici, & faisons cette proportion, *ec*:*ea*:*ef*:*eg*; c'est-à-dire, la somme des deux segmens est à la somme des deux autres côtés, comme la différence de ces mêmes côtés est à celle des deux segmens.

Cette proportion, qui est démontrée pour le triangle *bce*, convient aussi au triangle *bge*, quoique la perpen-

diculaire *bd*, qui eſt abaiſſée, de *b*, ſur le prolongement de *ge*, tombe en dehors de ce triangle. Car les ſegmens, ſont alors *de* & *dg*, ou les diſtances de la perpendiculaire aux ſommets des angles *g* & *e* du triangle *bge*. Leur ſomme eſt *ec*, & leur différence eſt *eg*. C'eſt pourquoi, lorſque les trois côtés d'un triangle ſont donnés, le principe indiqué ſert à déterminer, dans le triangle *bce*, la différence de deux ſegmens; & dans le triangle *bge*, la ſomme de deux ſegmens. Car dans le premier, la ſomme des ſegmens, qui eſt le côté *ce*, eſt connue; & dans le ſecond, c'eſt la différence *ge* des deux ſegmens qui eſt donnée.

Lorſqu'on a calculé le terme inconnu de la proportion générale qui vient d'être énoncée, c'eſt-à-dire, la ſomme ou la différence des deux ſegmens; on réunit avec cette ſomme; cette différence, & la moitié du réſultat devient la valeur du plus grand des deux ſegmens; tandis que le plus petit eſt égal à la moitié de la ſomme de ces ſegmens, moins la moitié de leur différence. Car deux quantités inégales ſont-elles ajoutées enſemble? leur ſomme, ſi elle eſt augmentée de la différence de ces quantités, devient équivalente au double de la plus grande de ces quantités. C'eſt pourquoi, celle-ci eſt égale à la moitié de la ſomme des deux quantités, plus à la moitié de leur différence. Le même raiſonnement conduit à fixer la valeur de la plus petite de ces quantités. Ainſi, après avoir calculé le terme inconnu de l'analogie générale qui conſtitue le ſecond principe, on peut déterminer la grandeur du ſegment qui, dans le triangle propoſé, eſt adjacent à l'angle cherché. Comme ici c'eſt l'angle *c* qui eſt demandé, le ſegment *cd* eſt celui dont on doit chercher la longueur. Enſuite, dans le triangle *bcd*, qui eſt rectangle, & qui préſente deux côtés connus *bc* & *cd*, on fait cette proportion, $1 : cof.\ c :: bc : cd$, dans laquelle on calcule aiſément le terme *coſin. c*, qui ſeul eſt inconnu.

120. C'eſt par un tel procédé aſſez tortueux qu'on parvient à connoître géométriquement un des angles d'un triangle dont les trois côtés ſont connus; mais

l'algebre offre un moyen plus simple & plus direct pour arriver au même but. En effet, représentons, le côté *ce* par d, *cb* par b, *be* par a, le segment *dc* par x, & l'angle *bce*, qui est cherché, par $2e$. Le triangle *bcd* étant rectangle, on peut dire, $cos.\,2e:1::x:b$, ou $x=b\,cos.\,2e=b(1-2\,sin.\,e^2)$ [118]. La propriété connue des triangles rectangles, donne aussi, pour les triangles *bde* & *bdc*, les équations suivantes, $bd^2=a^2-(d-x)^2$, & $bd^2=b^2-x^2$. Donc en égalant les valeurs de bd^2, & en reduisant, on a, $b^2=a^2-d^2+2dx$; & par conséquent, $x=\frac{b^2-a^2+d^2}{2d}$. Cette derniere valeur de x étant égalée à celle qu'on a déjà trouvée, on a $2bd-4bd\,sin.e^2=b^2-a^2+d^2$; équation qui revient à celle-ci $2bd-b^2-d^2+a^2=4bd\,sin.e^2$, & par conséquent $4bd\,sin.\,e^2=a^2-(b-d)^2=(a+b-d)(a-b+d)$; d'où on conclut cette proportion, $sin.e^2:1::(a+b-d)(a+d-b):4bd$. Si on nomme $2s$ la somme des trois côtés connus, la derniere proportion se transforme en celle-ci, $sin.\,e^2:1::(s-d)(s-b):bd$, dans laquelle il n'y a d'inconnu que le terme $sin.\,e^2$, & qui est composée de maniere, qu'à l'aide des logarithmes, on parvient facilement à déterminer la grandeur de e, ou celle de l'angle cherché. L'algebre ne présente ainsi, pour cette récherche, qu'une proportion unique.

121. Le 3.e principe qui sert à la résolution des triangles rectilignes, n'a d'application que dans le seul cas, ou deux côtés d'un triangle sont donnés, ainsi que l'angle formé par ces côtés. Ce principe ne conduit directement qu'à déterminer la différence des deux angles inconnus, afin qu'elle serve, avec leur somme qui est toujours le supplément de l'angle donné, à déterminer la grandeur de chacun de ces deux angles. Ensuite si le troisieme côté est la partie cherchée du triangle proposé, ces derniers angles servent à les calculer à l'aide du premier principe. L'analogie qui constitue le troisieme principe est celle-ci: la somme des deux côtés donnés, est à leur différence, comme la tangente de la moitié de la somme des angles opposés à ces côtés, est à la

tangente de la moitié de leur différence : & voici comment on la démontre. Dans le triangle abc (fig. 21), on peut dire, conformément au premier principe, ac:bc::sin. b:ſin. a; & par conſéquent, $(bc+ac):(bc-ac)::(\text{ſin.}a+\text{ſin.}b):(\text{ſin.}a-\text{ſin.}b)$. Suppoſons actuellement que la ſomme des deux angles a & b ſoit repréſentée par $2m$, & leur différence par $2x$; alors, comme $a+b=2m$, & $a-b=2x$, on en conclut que $a=m+x$, & $b=m-x$. La propoſition précedente peut donc ſe changer en celle-ci $(bc+ac):(bc-ac)::\text{ſin.}(m+x)+\text{ſin.}(m-x):\text{ſin}(m+x)-\text{ſin.}(m-x)$. Si on développe les ſinus de $(m+x)$ & de $(m-x)$, comme on l'a expoſé précedemment [118], on parvient à cette proportion, $(bc+ac):(bc-ac)::\text{ſin } m \text{ coſ.} x:\text{ſin.}x.\text{coſ.}m$; & en diviſant chacun des termes du dernier rapport par coſ.m coſ.x, ce rapport devient celui de tang.m:tang.x. En ſubſtituant, à la place de m & x, leurs valeurs, on a tang. m=tang. $\frac{1}{2}[a+b]$, & tang.x=tang.$\frac{1}{2}[a-b]$; par conſéquent enfin, on a cette proportion, qu'il falloit démontrer, $[bc+ac]:[bc-ac]::\text{tang.}\frac{1}{2}[a+b]:\text{tang }\frac{1}{2}[a-b]$; c'eſt-à-dire que la ſomme de deux cotés d'un triangle, eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles oppoſés à ces cotés, eſt à la tangente de la moitié de leur différence.

On voit par la nature des termes qui compoſent cette analogie, que deux cotés d'un triangle étant connus, ainſi que l'angle qu'ils forment entr'eux; on peut déterminer la demi-différence des 2 angles inconnus. Enſuite ſi on ajoute cette demi-différence avec la demi-ſomme des mêmes angles, on obtient la valeur du plus grand angle, comme en les retranchant l'une de l'autre, on détermine le plus petit de ces angles. Enfin, ſi aucun de ces angles n'eſt la quantité cherchée; & ſi on ſe propoſe de trouver le troiſieme côté de ce triangle; on y parvient en appliquant le premier principe à ce même triangle, dont on connoît alors tous les angles & deux cotés.

121. L'algebre fournit auſſi, pour le même cas, une formule qui ne paroît pas plus ſimple, mais qui permet de déterminer un coté ou un angle, indépendamment l'un de l'autre. Soit cherché l'angle b, dans le

triangle *acb*, étant connus les deux cotés *ac*, *cb*, & l'angle *c*. Repréſentons *ac* par *a*, *bc* par *p*, *ba* par *q*, *ao* par *y*, *oc* par *x*, & enfin l'angle *c* par $2e$. On peut dire, dans le triangle rectangle *aco*, $1:a::cos.2e:x::sin.2e:y$; donc $a\ cos.\ 2e = x$, & $a\ sin.\ 2e = y$. Dans le triangle rectangle *abo*, on peut faire cette proportion, d'après le premier principe, *y* ou $a\ sin.2e:[p-x]$ ou $[p-a\ cos.2e]::tang.\ b:1$; par conſéquent, toutes les quantités *a*, *p* & $2e$ étant données, on peut déterminer la tangente de *b*, comme étant un terme d'une proportion, dont les trois autres termes ſont connus.

Si le côté *ba*, que nous nommons *q*, eſt la quantité cherchée, alors on conſidere le triangle rectangle *abo*, dont la propriété eſt que $q^2 = y^2 + [p-x]^2 = a^2 sin.2e^2 + p^2 - 2pa\ cos.2e + a^2\ cos.2e^2$, donc $q^2 = a^2 + p^2 - 2pa\ cos.2e = [a-p]^2 + 4pa\ sin.e^2$; c'eſt-à-dire que pour dédéterminer le quarré du côté cherché, il faut prendre le quarré de la différence des deux côtés connus, & l'ajouter au produit du double de ces mêmes côtés, multiplié par le quarré du ſinus de la moitié de l'angle donné. La racine quarrée de cette ſomme eſt alors le côté cherché.

Tels ſont les principes qui ſeuls ſont néceſſaires pour la réſolution des triangles rectilignes quelconques. Les applications à la marine en ſont fréquentes, & quoique nous nous réſervions de préſenter, dans le cours de cet ouvrage, toutes celles qui ſeront amenées par la ſucceſſion des matieres, nous allons néanmoins en donner quelques exemples.

123. Nous obſerverons à cet égard, qu'ayant déjà fait connoître comment on doit calculer, ſoit par des nombres, ſoit par des logarithmes, un terme d'une proportion, dont les trois autres termes ſont donnés, nous ne ferons qu'indiquer, dans les exemples ſuivans, les proportions qui conviennent à la ſolution des queſtions propoſées, ſans nous appeſantir ſur les détails matériels des opérations.

123. Nous avons expoſé (116), que pour tracer ſur le papier le plan d'une portion de côte, on doit meſurer une baſe *ab*, ainſi que les angles formés par cette

baſe, avec les rayons viſuels menés, de ſes deux extrémités, aux divers points qui doivent être repréſentés ſur ce plan. Ces mêmes meſures, qui toujours doivent être faites avec exactitude, peuvent auſſi ſervir à calculer, ſoit les diſtances de ces mêmes points principaux à chaque extrémité de la baſe *ab*, ſoit encore leurs diſtances reſpectives..

Demande-t-on, par exemple, la diſtance du point *b*, à l'île B, qui eſt placée à l'entrée du havre? comme on connoît, dans le triangle *ab*B, par des meſures priſes ſur les lieux, & le côté *ab*, & les angles *ab*B, *ba*B, on en conclut *b*B*a*. Alors on applique le premier principe à ce triangle, en diſant *ſin*. B:*ab*::*ſin*. *a*:*b*B, & on détermine aiſément le ſeul terme *Bb*, qui dans cette proportion eſt inconnu, ou la diſtance de *b* à l'île B. On calcule auſſi, par une analogie pareille, la diſtance de B au point *a*.

Si on demande la grandeur de l'ouverture de ce havre, on calcule, dans les triangles *bea* & *bda*, ſucceſſivement [& comme on vient de l'expoſer] les diſtances *bd* & *be*. On détermine auſſi la meſure de l'angle *dbe*, en cherchant la différence des angles meſurés *dba* & *eba*. Alors, connoiſſant, dans le triangle *bde*, les deux côtés *bd*, *be*, & l'angle compris *dbe*; on cherche *de* en appliquant le troiſieme principe, & les regles indiquées, du calcul qui convient à la circonſtance. Ainſi on fait d'abord cette proportion; la ſomme des deux diſtances calculées *db* & *be*, eſt à leur différence, comme la tangente de la moitié de la ſomme des angles *d* & *e*, eſt à la tangente de la moitié de leur différence. Ayant trouvé cette demi-différence des angles *d* & *e*, on l'ajoute à leur demi-ſomme; & ce réſultat eſt la valeur de l'angle *d* [ſi le côté *be* eſt plus grand que *bd*]. Enfin on fait cette proportion, *ſin*.*d*:*be*::*ſin*.*b*:*de*, dans laquelle l'ouverture *de* eſt le ſeul terme inconnu.

Quelquefois, privé d'inſtrumens propres à meſurer des angles avec préciſion, on ne peut qu'apprécier exactement la longueur des trois côtés *bd*, *de* & *be*, & prendre, du ſeul point *b*, des angles de relevemens. Alors ſi on ſe propoſe de ſavoir quel eſt l'angle formé par les côtés

bd & *de*, pour en conclure le giſſement de *de* : on imagine une perpendiculaire abaiſſée de *e* ſur *db*, dans le triangle *bde*. On applique le ſecond principe, & on trouve la différence des ſegmens du côté *bd*, en cherchant le 4.e terme de cette proportion ; la ſomme des deux ſegmens *bt* & *td*, eſt à la ſomme des deux côtés *be* & *ed*, comme la différence de ceux-ci, eſt à celle des ſegmens. On retranche enſuite la moitié de la différence de ces ſegmens de la moitié de leur ſomme; & on obtient le ſegment qui eſt adjacent à l'angle *d*, s'il eſt le plus petit; c'eſt-à-dire, ſi *de* eſt inférieur à *be*. Enfin, dans le triangle rectangle *tde*, la proportion ($de:1::dt:coſ.\,tde$) fait connoître l'angle *bde* qui eſt cherché. Alors une ſimple ſouſtraction ou une addition ſuffit pour déterminer le giſſement de *de*, en ſuppoſant, qu'on ait fait, du point *b*, le relèvement du point *d*, ou qu'on ait meſuré l'angle que forme la lig. *bd*, avec la direction de l'aimant. En effet, ſuppoſons l'angle *bde* de 68 degr. & les points *b* & *d* relevés NE & SO ; ou ſuppoſons que l'air de vent, dirigé de *b* en *d*, ſoit le NE, & faſſe par conſéquent un angle de 45 degrés, avec la ligne nord & ſud : la ligne *de* doit faire néceſſairement un angle de 23 dégrés, du côté du ſud, avec la direction de l'aimant ; c'eſt-à-dire que le giſſement des points *d* & *e*, ou de la ligne *de*, eſt le SSE 45 minutes E.

C'eſt ſur le terrein qu'ont été priſes les meſures, & de *ab*, & des angles que forment avec cette baſe, les rayons viſuels menés des extrémités de cette baſe à divers points éloignés : mais les circonſtances ne permettent pas toujours aux navigateurs de deſcendre ſur le rivage, pour faire des obſervations. C'eſt pourquoi, dans les occaſions fréquentes, où il devient néceſſaire, pour les beſoins du moment, comme pour la perfection & l'extenſion des cartes marines, de déterminer des poſitions, des giſſemens & des diſtances, il faut employer des moyens qui ſoient propres à remplir ces vues, & qu'on puiſſe même appliquer ſans que les navigateurs ceſſent de ſuivre une route, qui eſt commencée & dirigée néceſſairement vers d'autres lieux.

Suppoſons qu'un navigateur, étant en mer, ſur un

vaiſſeau qui s'avance dans l'eſpace avec une viteſſe uniforme, ſe propoſe de déterminer ſa diſtance inſtantanée à un objet fixe *z*, qui eſt ſous ſes yeux [fig. 88. G]. Au moment où il eſt parvenu au point *b* de la route *abcm*, il doit meſurer l'angle *zbc*, qui eſt formé par le rayon viſuel *bz*, & par la direction de la route *abm*; ou bien il doit relever à la bouſſole l'objet *z*. Enſuite, pendant la marche continuée du vaiſſeau depuis le point *b* juſqu'au point *c*, il doit meſurer avec ſoin la longueur du chemin *bc*: & enfin, arrivé en un point *c*, il doit relever de nouveau le même point *z*, ou meſurer l'angle *zcb*. [Remarquons que la grandeur de *bc* doit être à-peu-près le dixieme de la diſtance qui eſt à déterminer]. Après ces opérations, il conſidere le triangle *bzc*, dans lequel il connoît le côté *bc* & les angles *zbc*, *zcb*. Il peut donc conclure de ces données, la valeur de *bz* (parce que d'ailleurs la grandeur de l'angle *z* doit être connue, comme étant le ſupplément des deux angles meſurés *b* & *c*), en faiſant cette proportion $bz:\sin.c::bc:\sin.z$, qui n'offre d'autre terme inconnu que *bz*. Il détermine ainſi la diſtance cherchée, à laquelle le vaiſſeau étoit éloigné du point *z*, lorſque ſa viteſſe l'avoit porté au point *b* de ſa route.

Ces meſures & ces calculs, qu'on exécute facilement à l'aide des logarithmes, peuvent ainſi conduire à connoître la diſtance d'un vaiſſeau qui fait route, a un objet qui eſt ſur ſon horiſon. Mais ſi les meſures des angles ſont priſes à la bouſſole, par des relevemens; les réſultats des calculs ne ſont pas ſuſceptibles d'une grande préciſion, parce que la roſe a des diviſions bien petites ſur ſa circonférence, & parce qu'elle eſt ſans ceſſe en agitation. C'eſt pourquoi lorſqu'on déſire apporter une grande exactitude dans ces opérations, il faut meſurer les angles, à l'aide des autres inſtrumens dont on a parlé (99), ou dont nous parlerons ci-après, en traitant de l'aſtronomie de l'homme de mer.

S'agit-il de déterminer en mer, ſoit la diſtance de deux îles, ou de deux caps, ſoit la longueur d'une île, ou l'étendue d'une cote; pendant qu'on fait route ſur un vaiſſeau, qui paſſe à la vue de ces objets? Soit *ucb*

(fig. 34) la direction de la route du vaiſſeau, & *ad* la diſtance cherchée des points *a* & *d*. arrivé en *c*, l'obſervateur doit relever ces deux points à la bouſſole, ou meſurer les angles *acb* & *dcb*. Parvenu en *b*, il doit relever de nouveau les mêmes points, ou meſurer les angles *abc* & *dbc*. Le chemin *cb*, qui eſt fait par le bâtiment, & avec une viteſſe ſuppoſée uniforme, pendant l'intervalle des obſervations, doit auſſi être eſtimé avec le plus grand ſoin. Alors, dans le triangle *abc*, connoiſſant les deux angles *b* & *c*, ainſi que le côté compris *bc*, on peut calculer, comme dans l'exemple qui précede, le côté *ac*. De même, dans le triangle *dbc* (dont un côté *bc* eſt connu & les angles adjacens), on peut calculer le côté *cd* par un pareil procédé. Ainſi, par ce moyen, on peut déterminer, dans le triangle *acd*, les deux côtés *ac* & *cd*. On y connoît d'ailleurs l'angle *acd*, qui eſt la différence des angles obſervés *dcb* & *acb*. On applique alors à ce triangle le troiſieme principe; on fait les proportions & les calculs qui ont été préſentés dans le premier des exemples précédens; & on parvient enfin à conclure la valeur du côté *ad*; c'eſt-à-dire, la diſtance de deux points, qui peuvent être, ou deux îles, ou deux caps, ou les extrémités d'une côte, ou celles d'une île, &c.

Remarquons que la ſolution d'une telle queſtion, qui embraſſe, & celle de meſurer la diſtance d'un vaiſſeau à une pointe de terre, dont les relevemens ont éte obſervés; & celle de déterminer, non ſeulement la diſtance de deux objets éloignés, mais auſſi leur giſſement reſpectif; eſt auſſi utile que néceſſaire, pour déterminer fréquemment, ou vérifier la poſition de certains points de la ſurface des mers, lorſqu'on connoît d'ailleurs celle du vaiſſeau ſur lequel ſont faites les opérations indiquées.

Suppoſons qu'en faiſant route, à la vue par exemple, du Pic-de-Ténériffe, qui ſe montre aux limites de l'horiſon; on veuille déterminer, & la hauteur & la diſtance de cette montagne. Avant de reſoudre ce problême, il devient à-propos de préſenter quelques idées acceſſoires & utiles. Repréſentons par *AbD* (fig. 35) une

portion de la circonférence d'un grand cercle du globe, qu'on ſuppoſe paſſer par le centre *q* de la baſe du Pic *zux*, & par le point *b*, qu'on ſuppoſe être le lieu du vaiſſeau, ou de l'obſervateur: & imaginons une ligne *sbc*, qui ſoit tangente à cet arc au point *b*. Cette tangente eſt nommée une ligne horiſontale, parce qu'elle eſt perpendiculaire à l'extrémité, du rayon de la terre mené au même point *b*. La direction de cette ligne eſt auſſi celle du niveau des eaux de la mer en *b*. Si enfin, de ce dernier point, on ſuppoſe pluſieurs autres lignes dirigées de divers côtés, qui ſoient toutes perpendiculaires à l'extrémité du même rayon *db*; & qu'on imagine un plan qui paſſe par toutes ces tangentes: un tel plan, qui eſt alors lui même tangent à la ſurface de la mer en *b*, reçoit le nom de plan horiſontal; & il eſt l'horiſon du point *b*. Il ſépare tous les objets qui ſont viſibles pour le point *b*, de tous ceux qui ne peuvent être apperçus de ce même point. Car on juge aiſément que la rondeur de la terre doit cacher aux yeux de l'obſervateur, tout ce qui eſt placé au deſſous d'un tel plan.

Après avoir préſenté les définitions néceſſaires, & d'une ligne horiſontale, & de l'horiſon d'un lieu; examinons comment on peut réſoudre la queſtion propoſée, ou comment on peut meſurer en mer la hauteur & la diſtance d'une montagne, vue dans le lointain, & telle, par exemple, que le Pic de Ténériffe.

On détermine la diſtance, du ſommet du Pic, au lieu de l'obſervation, en ſuivant le même procédé auquel on s'eſt conformé dans l'exemple précédent. Pendant que le vaiſſeau fait la route *cb*, (fig. 34) dont la longueur doit être meſurée avec ſoin, on prend, aux points *b* & *c*, des relevemens du ſommet P du Pic; ou on meſure directement, avec un bon inſtrument, les angles P*cb* & P*bc*. On doit auſſi, lorſque le vaiſſeau eſt au point *b*, meſurer avec un inſtrment convenable, (en ſuppoſant que la ligne *ca* ſoit horiſontale), la grandeur de l'angle P*ca*, c'eſt-à-dire, la hauteur apparente & angulaire du ſommet du Pic au-deſſus de l'horiſon de l'obſervateur. Alors, dans le triangle P*bc*, on connoît deux angles & le côté compris: on

peut donc calculer la diſtance *bP*, en faiſant cette proportion, *ſin.P:bc::ſin.c:Pb*, où le ſeul terme inconnu eſt la diſtance cherchée du ſommet du Pic au point *b*.

Après avoir iſolé les objets de ces opérations; il eſt à-propos de les préſenter dans leur lieu naturel. Il faut les voir ſur le contour du globe. Ainſi, conſidérons l'obſervateur au point *b* de cette ſurface, & le Pic occupant par ſa baſe l'eſpace *zn*, en même tems qu'il s'élève de la hauteur *iu*, au-deſſus de l'horiſon *sbc* de l'obſervateur.

Dans le triangle *ubd*, on connoît le côté *ub* (qui a été calculé [fig. 34], puiſqu'il eſt le même que P*b*), & le côté *bd*, qui eſt le rayon de la terre dont *d* eſt ſuppoſé le centre. L'angle compris *ubd* eſt connu auſſi, car il eſt la ſomme de la hauteur meſurée *ubs*, & de l'angle *sbd* qui eſt droit. Alors, dans ce triangle *ubd*, on peut calculer le côté *du*, en faiſant l'application, & d'un principe, & des opérations ſubſéquentes, qui ont été expoſés précédemment. Enfin, la différence du côté *ud* au rayon de la terre, eſt la hauteur *uq* du Pic, au-deſſus du niveau de la mer.

Si en outre de la diſtance directe & déjà trouvée du vaiſſeau en *b* au ſommet du Pic, on déſiroît connoître le chemin réel *qb*, qui ſépare le point *b*, du centre de la baſe du Pic; ce chemin a pour longueur celle de l'arc *qb*, ou de la meſure de l'angle *udb*. C'eſt pourquoi, on doit, pour la déterminer, calculer l'angle *bdu*, dans le même triangle *ubd*, & avec les mêmes données. On convertit enſuite en lieues, les degrés qui lui ſervent de meſure [à raiſon de 20 lieues au dégré], parce que l'arc *bq* eſt une partie de la circonférence d'un grand cercle du globe; & par ce moyen, la diſtance circulaire *bq* eſt évaluée en lieues marines.

Le tableau de ces opérations, préſente également celles qui ſeroient à faire ſur le terrein; ſi d'un lieu fixe, on ſe propoſoit de juger, la hauteur d'une montagne P, & ſa diſtance. Il faudroit meſurer à terre une baſe *bc* (fig. 34), qui ſeroit dirigée à-peu-près perpendiculairement, au rayon viſuel mené d'un point de cette baſe, au ſommet P de la montagne. Il faudroit

aussi mesurer les angles *Pbc* & *Pcb*, ainsi que la hauteur angulaire *Pba*. Ensuite on calculeroit, comme ci-dessus, la distance directe *Pb*, & on concluroit enfin, de toutes ces données, la hauteur *uq* (fig. 35) de cette montagne, en cherchant le côté *ud*, dans le triangle *ubd*.

Remarquons actuellement que jamais en mer, un navigateur qui observe des angles, ou qui fait des relevemens, ne peut avoir l'œil au niveau de l'eau en *b*; & que, sur un vaisseau, il est toujours placé au-dessus de la ligne horisontale *bs*, à une hauteur *ba*, qui varie avec celle des lieux d'observation tels que, le pont, ou le gaillard, ou la dunette, ou les mâts, ou les œuvres mortes au-dessus de la surface de la mer. Alors ce n'est plus le plan tangent en *b*, ou *sbc*, qui est l'horison de l'observateur; c'est la ligne *af*, tangente en *y*, qui représente la ligne suivant laquelle il vise à l'extrémité de son horison. La hauteur angulaire & apparente de P, ne doit donc être pour lui que la mesure de l'angle *uaf*. Il reste donc à chercher l'angle *fad* ou *yad*, pour calculer *ud* dans le triangle *uad*, par le même procédé employé précédemment. Dans le triangle rectangle *yad*, on peut déterminer la grandeur de l'angle *fad*: car on y connoît le côté *yd*, qui est le rayon de la terre; & le côté *ad*, qui est la somme de ce même rayon & de l'élévation de l'œil au dessus du niveau de la mer: & on trouve cet angle en faisant cette proportion, *sin.fad*:*yd*::1:*abd*, dont le terme *sin.fad* est seul inconnu.

Si ce dernier angle est ajouté avec la hauteur angulaire du pic, ou à l'angle *uaf*; la somme, est la valeur de l'angle *uad*. On voit aussi que la distance *ua* peut, dans cette nouvelle situation de l'observateur, être calculée comme *ub* l'a été précédemment. Par conséquent, avec ces données, on peut, par un même calcul déjà indiqué, obtenir la grandeur de *ud*, dans le triangle *uad*, & en conclure sa différence avec le rayon de la terre, c'est-à-dire, la hauteur cherchée de la montagne.

Si on désiroit savoir, d'après la hauteur connue de P, ou d'une terre quelconque, quelle est la distance

à laquelle son sommet doit commencer à paroître sur un horison ; les mêmes triangles serviroient à répondre à cette question. Soit supposé que l'observateur est en *a*, & que son horison est *af*. Si le prolongement *Af* du rayon *dA*, est égal à la hauteur du pic ; la longueur de la ligne *af* est la distance directe du point *a*, au point où le sommet de ce pic se montre sur l'horison du point *a* ; & il faut la chercher dans le triangle *adf*. Les deux côtés *ad* & *fd* sont connus ; puisque l'un est la somme du rayon de la terre, ajouté à l'élévation de l'œil au-dessus du niveau de la mer ; & l'autre est la somme du même rayon ajouté à la hauteur connue *fA* de la montagne supposée. L'angle *fad* peut d'ailleurs être calculé, comme on l'a dit plus haut, dans le triangle *yad* : c'est pourquoi on doit, pour trouver *fa*, faire d'abord cette proportion, *fd:sin.a::ad:sin.f*. Elle sert à déterminer l'angle *f*, & en faisant ensuite celle-ci, *fa:sin.d::fd:sin.a*, on détermine *fa* qui en est le seul terme inconnu. C'est ainsi qu'on peut calculer la distance directe de laquelle le sommet P doit être éloigné du point *a*, pour paroître à l'horison de ce même point *a*. Si l'arc *b*A est cherché, comme exprimant le chemin qu'il faudroit faire du point *b*, pour arriver au centre de la base de P ; alors il ne s'agit plus de calculer *fa*, mais la mesure de l'angle *adf*, qu'on peut calculer dans la triangle *adf*. Cette mesure étant connue en degrés, on la réduit en lieues, à raison de 20 lieues au degré, & on obtient enfin la longueur de l'arc *by*A, qui est la distance de *b* au centre de P, mesurée sur la surface du globe.

Remarquons que le complément de l'angle *yad* (de ce triangle qui est formé par *ad*, & par une ligne menée du point *a*, où est supposé l'œil de l'observateur, tangentiellement au globe en *y*) est nommé l'inclinaison de l'horison de la mer. Il est égal à l'angle *ady* : sa grandeur dépend de l'élévation de l'œil de l'observateur ; & on le calcule par cette proportion ; *ad*:1::*yd*:*sin.a* ; dans laquelle *sin.a*, ou le cosinus de l'inclinaison de l'horison de la mer, est le seul terme qui soit inconnu. C'est en supposant à *ba* différentes valeurs, de-

puis un pied jusqu'à 225, qu'on a formé une table qui présente la grandeur de l'angle d'inclinaison de l'horison, pour les positions les plus ordinaires, dans lesquelles sont placés les navigateurs qui observent en mer.

Remarquons aussi que si on compare, par exemple, le point *b* qui est à la surface de la mer, avec un objet *o* qui est placé comme lui sur une même ligne horisontale *cbos*; la distance du premier au centre de la terre *d*, est plus petite que celle du second; & la différence *qo* est nommée la différence de niveau de ces deux objets : parce que deux points ne sont de niveau, que lorsqu'ils sont tous deux à égale distance du centre de la terre. Cette différence *oq* peut aisément être calculée, en supposant que la distance, des deux points comparés *o* & *q*, ait été mesurée, & soit exactement connue. En effet, dans le triangle rectangle *obd*, on connoît *bd*, qui est le rayon de la terre, & *bo* qui est la distance donnée du point *b* au point *o*. La somme des quarrés de ces deux côtés vaut donc le quarré de *od*, & sa racine diminuée du rayon de la terre, est la différence de niveau *oq*. Cette même ligne *oq* peut être aussi déterminée d'une autre maniere. On peut supposer la ligne *od* prolongée jusqu'à la circonférence au-delà du centre *d*; alors on auroit une sécante $(oq+2qd)$ & une tangente *ob*, qui seroient ménées d'un point commun *o*, à une même circonférence. C'est pourquoi, en appliquant ici ce qui a été démontré (114) relativement à des lignes ainsi placées, on peut faire la proportion $oq+2qd:ob::ob:oq$; c'est-à-dire que $oq^2+2oq.qd=ob^2$. Si on ajoute le quarré qd^2 aux deux membres, on a $(oq+qd)^2=ob^2+qd^2$; par conséquent $oq=(ob^2+qd^2)^{\frac{1}{2}}-qd$. Il faut donc, pour déterminer *oq* ou la différence de niveau de des points *a* & *b*, prendre la somme des quarrés séparés, de la distance du point *b* au point *o*, & du rayon de la terre; extraire la racine de cette somme, en retrancher le rayon de la terre, & le reste est alors la quantité cherchée *oq*. C'est ainsi que *oq* doit être calculé à la rigueur; mais des considérations fondées permettent de simplifier cette opération. Car on

peut juger, par la grandeur du diametre de la terre, qui eſt de 39223000 pieds, combien il eſt ſupérieur à une ligne telle que *oq* (en ſuppoſant que *oq* ſoit un objet viſible ſur l'horiſon de *b*); & combien la ſomme de ces deux quantités doit peu différer du diametre de la terre. C'eſt pourquoi on peut, ſans erreur ſenſible, changer la proportion précédente en celle-ci, [$2qd:ob::ob:oq$], qui ne préſente qu'un ſeul terme inconnu dans *oq*, ou dans la différence de niveau qui eſt cherchée.

L'application de ces dernieres idées eſt fréquente, & on peut en juger par l'exemple ſuivant. ſi on a obſervé du point *b*, la hauteur angulaire du point *u*, & qu'on ſoit parvenu à déterminer la partie *uo* de la hauteur totale *uq* d'une montagne *zux*, qui n'eſt pas, dans ſon entier, viſible du point *b*; alors la ligne *oq* eſt celle dont il faut connoître la longueur pour en compoſer avec *uo* la hauteur totale de la montagne; & cette hauteur *oq*, eſt le réſultat du calcul précedent. La différence de niveau eſt donc toujours utile à connoître, pour que la hauteur réelle des objets, au-deſſus de la ſurface du globe, puiſſe être conclue de la hauteur qu'ils paroiſſent avoir au-deſſus d'une ligne qui eſt horiſontale & tangente au globe.

ARTICLE SECOND.

Des plans & des ſurfaces planes.

124. UN plan, comme on l'a déja dit (91), eſt une portion de l'eſpace, dont l'étendue, ſoit en longueur, ſoit en largeur eſt indéfinie; dont l'épaiſſeur eſt infiniment petite, & qu'une ligne droite doit toucher par tous ſes points, lorſqu'elle lui eſt appliquée, dans quelque ſens que ce puiſſe être. Tel eſt *dabc* (fig. 2). Si dans ce plan, on mene des lignes droites, qui embraſſent, terminent, ou circonſcrivent un eſpace *obp*: cet eſpace ainſi limité, eſt une ſurface plane, dont la grandeur ou l'étendue n'eſt ſenſible que dans deux ſens, c'eſt-à-dire, en longueur & en largeur. Car ſon

épaisseur, ainsi que celle du plan *db*, est considérée comme nulle, ou comme infiniment petite.

C'est dans ce dernier état, que sont considérées toutes les surfaces dont il est question dans la section présente; & ces portions de l'espace, que l'esprit semble isoler, & détacher des contours extérieurs des corps, pour les analyser, les mesurer, & les comparer plus aisément, sont imaginées étendues sur des plans. Ainsi, la position de ces surfaces, soit à l'égard d'autres surfaces, soit à l'égard des lignes droites qui les rencontrent ou qui les trversent, doit être déterminée par les situations respectives des plans dans lesquels elles sont placées, ou par celles des lignes droites à l'égard de ces mêmes plans. C'est pourquoi, du point *i*, placé au-dessus du plan *db*, si on imagine une ligne *iu*, qui vienne rencontrer la surface *opq* en *u*, l'angle qu'elle forme avec cette surface, est le même que celui de son inclinaison sur le plan *db*. Une ligne droite est-elle appliquée, dans tous les sens, sur la figure *oqp*, & touche-t-elle sa surface par plusieurs points de sa longueur? la figure supposée est nécessairement plane.

Ainsi, dans un chantier de construction, les charpentiers veulent-ils établir dans un même plan les faces latérales des pieces qui composent un membre de vaisseau? ils placent ces pieces horisontalement & à la suite les unes des autres (fig. 52. G). Soient ces pieces représentées par *duc*, *ag*, *fi*, *hl*, *kq*, *ps*, *ru*. Après avoir mis parfaitement de niveau la face *dznca* de la varangue, ils tendent des cordeaux en différens sens sur les faces, soit de cette varangue, soit des diverses alonges; & lorsque ces cordeaux paroissent s'appliquer exactement sur elles, ils regardent toutes les faces de ces parties d'un même couple, comme étant dans un seul & même plan.

Veulent-ils aussi marquer, sur les lisses d'un vaisseau (fig. 37), dont les couples de levée sont déjà établis, le lieu de plusieurs points du contour d'un couple de remplissage? ils tendent des cordeaux, par des points indiqués d'avance sur la lisse du fort & sur la quille,

comme

comme devant appartenir au contour de ce couple; alors ils font gliffer ces cordeaux les uns fur les autres, de maniere qu'ils ne ceffent de toucher deux cordeaux qui paffent par les points donnés; & ils obtiennent ainfi fur chaque liffe, les points où chacune eft coupée par le contour du couple de rempliffage propofé.

125. Nous avons développé précédemment, toutes les fituations que des lignes font fufceptibles d'avoir entr'elles : nous avons préfenté la mefure de tous les angles rectilignes; & pour completter tout ce qui eft relatif à ces mêmes lignes, il faut actuellement confidérer les angles qu'elles peuvent former avec des plans, ou avec des furfaces planes. Nous examinerons enfuite comment on doit mefurer les angles qu'un plan fait avec un autre plan; c'eft-à-dire, les angles plans : & enfin nous nous occuperons de la mefure, ainfi que des rapports, de toutes les furfaces planes.

126. *Angles des lignes droites avec des plans.* Les définitions précédentes annoncent affez, qu'une ligne droite qui n'eft pas appliquée ou couchée fur un plan, ne peut avoir avec lui qu'un feul point commun; & une telle ligne eft alors, ou oblique, ou perpendiculaire à ce même plan. Elle lui eft perpendiculaire, fi de tous côtés elle lui eft également inclinée. Soit *ao* (fig. 36) une ligne droite perpendiculaire au plan BCDE : elle eft placée de maniere que fi on prend pour centre le point *o*, où elle rencontre le plan, & qu'on décrive une circonférence fur ce plan; tous les points de cette ligne *ao*, font également éloignés de ceux de la circonférence tracée. Car comparons le point *a* avec deux points *i* & *z* de cette circonférence, & foient menés les rayons *oi* & *oz*, ainfi que les lignes *ai* & *az*. On forme par cette conftruction, des triangles *aoi* & *aoz* qui font égaux, comme ayant 1° un côté commun *ao*; 2° deux côtés *oi* & *oz*, qui font égaux comme rayons d'un même cercle; & 3° enfin, l'angle compris *aoi* égal à l'angle compris *aoz*, parce que la ligne *ao* eft fuppofée n'être pas plus inclinée vers *oi* que vers *oz*. L'égalité ainfi démontrée de ces triangles, entraîne celle des côtés *ai* & *az* : donc le point *a* de cette ligne *ao* eft

également éloigné des deux points de la circonférence *izmq* : & le même raisonnement conduiroit à conclure qu'il est également distant de tous les points de cette courbe.

Une conséquence qui résulte de cette proposition est que cette ligne *ao* a tous ses points également éloignés des extrémités d'un diametre quelconque *im* de ce cercle ; ou qu'elle est perpendiculaire à toutes les lignes qui peuvent être menées sur ce plan, par le point *o* qui est le pied de cette perpendiculaire.

Si une ligne, telle que *ai* (fig. 36), est oblique à un plan BC ; on doit remarquer qu'elle n'est pas également inclinée, à l'égard de diverses parties de ce plan, c'est-à-dire qu'elle fait des angles différemment grands, avec les diverses lignes qui peuvent être tracées par le point *i* sur ce plan. En effet, du sommet *a* de cette oblique, soit abaissée sur le plan BC une perpendiculaire *ao* ; soit décrite, du point *o* comme centre, & sur ce plan, une circonférence qui passe par le point *i* ; soit mené le rayon *oi*, ou une ligne qui réunisse, sur le plan, le pied de l'oblique *ai* & celui de la perpendiculaire *ao* ; enfin soit menée en *i* une ligne *bc*, qui soit perpendiculaire au rayon *oi* ; alors cette ligne *ai*, qui est oblique au plan, est cependant perpendiculaire à la ligne *bc*. Car si on fait la partie *ib* égale à la partie *ic*, & qu'on mene les lignes *bo*, *ba*, *co*, *ca* ; on forme des triangles *abo* & *aco* qui sont égaux : parce que les côtés *ob* & *oc* sont égaux, comme des obliques qui s'écartent également de la perpendiculaire *oi* ; parce que le côté *oa*, est commun ; & parce que les angles *aob* & *aoc* sont chacun de 90 dégrés. Les côtés *ab* & *ac* de ces deux triangles sont donc égaux ; & comme le point *i* est supposé à même distance des points *b* & *c* ; la ligne *ia* a deux points *i* & *a* également éloignés des points *b* & *c*. Elle est donc perpendiculaire à *bc*. Elle est donc, comme on l'a annoncé, différemment inclinée aux divers côtés du plan BC.

On vient de démontrer que la ligne *bc* étant perpendiculaire sur *io*, l'est aussi sur *ia* ; & on démontreroit de même que si la ligne *bc* fait des angles droits avec

ia, elle est aussi perpendiculaire sur *io*. Car dans cette supposition, le point *a* est également éloigné des points *b* & *c*, & ceux-ci doivent être à égale distance du point *o*, à cause de l'égalité des triangles *aco* & *abo*: ainsi la ligne *ic* étant égale à *bi* & perpendiculaire à *ia*, la ligne *io* doitêtre perpendiculaire sur *bc*.

Tous les angles que l'oblique *ai* fait avec diverses lignes menées par le point *i* dans le plan BC, étant différens les uns des autres; quel peut donc être celui qui représente l'inclinaison de la ligne *ai* sur le plan BC. C'est sans doute celui de tous ces angles qui est le plus petit; & c'est *aio*, ou celui que forme cette oblique avec la ligne qui, tracée dans le plan, réunit le pied de l'oblique avec celui d'une perpendiculaire abaissée d'un point de *ai*, sur le plan BC. On peut présumer d'avance que cet angle *aio* est le plus petit de ces angles, puisque la ligne *ai*, qui est supposée faire avec *io* un angle aigu, doit former avec des lignes (menées de *i* dans l'ouverture des angles *cio* ou *bio*), des angles dont la grandeur augmente progressivement, à mesure que ces lignes sont plus rapprochées de *bc*, pour devenir de 90 dégrés, lorsque ces mêmes lignes se confondent avec *bc*. On peut cependant le démontrer directement. Comparons l'angle *aim* avec l'angle *aiz*, en supposant une corde *iz* menée du point *i*, dans le cercle tracé du point *o* comme centre. Si d'un autre point *a* comme centre, & avec un rayon *az*, on tracoit la mesure de l'angle *iaz*, elle seroit évidemment plus petite que celle de l'angle *iam*, tracée du même point pour centre, & avec le même rayon *am* ou *az*; puisque les cordes *iz* & *im* des arcs qui serviroient de mesures à ces angles, ont entr'elles une inégalité qui annonce l'infériorité de l'angle *iaz*, à l'égard de *iam*. Les cordes sont chacune le double du sinus de la moitié de l'angle, qui a son sommet en *a*: par conséquent les angles *aiz* & *azi*, qui sont égaux entr'eux, comme opposés à des côtés égaux, sont plus grands que les angles *aim* & *ami*, dont l'égalité est aussi fondée sur celle des côtés opposés. Il est donc démontré que de tous les angles que forme la ligne *ai*, avec les lignes

qu'on peut mener dans le plan *bc* par le point *i*, le plus petit eſt celui qu'elle fait, avec la ligne *io* qui réunit le pied *i* de cette oblique, & celui d'une ligne abaiſſée perpendiculairement ſur ce plan, d'un point quelconque de cette même oblique. La meſure de l'inclinaiſon d'une ligne à l'égard d'un plan, doit donc être priſe comme celle d'un angle rectiligne.

Il reſulte des mêmes conſidérations, que ſi la ligne *ai* étoit couchée ſur le plan BC, & ſur la ligne *io*, les angles intermédiaires, qui ſont formés par cette lig. & par toutes celles qu'on peut ſuppoſer menées, du point *i*, dans ce plan, entre les lignes *io* & *ic*, varieroient depuis 90 degrés juſqu'à o degré. Mais la ligne *ai* étant ſuppoſée ſe relever au-deſſus du plan, pour prendre la poſition que préſente la figure, tous ces angles intermédiaires ne peuvent plus varier, que depuis 90 degrés juſqu'à la différence qui regne entre la valeur de l'angle *aio* & 90 degrés: de ſorte que l'angle *aio* étant ſuppoſé de 90 degrés, tous les angles intermédiaires doivent avoir la même valeur, & être autant d'angles d'angles droits. Il ſuffit donc que la ligne *ai* ſoit perpendiculaire à deux lignes *bc* & *io*, tracées par ſon pied *i*, dans un plan, pour qu'elle ſoit en même tems perpendiculaire à toute autre ligne menée par ſon pied dans ce même plan; c'eſt-à-dire, pour qu'elle ſoit perpendiculaire au plan. Donc, ſi on propoſe d'élever au point *i* une ligne qui ſoit perpendiculaire au plan BC; il faut mener deux lignes telles que *bc* & *im*, par le point *i* donné dans ce même plan: & une ligne élevée en *i* perpendiculairement aux deux lignes dernieres, eſt la perpendiculaire demandée.

Suppoſons qu'un plan, tel que BC, traverſe une ligne *ax*, & la coupe au point *o*. Suppoſons auſſi qu'on demande qu'un tel plan ſoit placé de maniere, que la ligne *ax* lui ſoit perpendiculaire; voici le procédé qu'on doit ſuivre. On prend, au-deſſous de ce plan, ſur la ligne donnée, un portion *ox* égale à la partie *oa*, qui eſt au-deſſus de ce même plan. On décrit du point *o* comme centre, dans le plan donné, un cercle *izmq*; & rendant égales entr'elles les diſtances des deux points

a & *x* à deux points *i* & *z* de ce cercle, la ligne *ax* doit devenir, par cette opération, perpendiculaire au plan BC. On le démontre, en faisant voir qu'elle est perpendiculaire en même tems, aux deux lignes *oi* & *oz*, ou aux diametres *im* & *qz*. En menant des points *a* & *x*, des lignes droites dirigées aux points *i*, *z*, *m*, *q*, on forme des triangles *qox* & *aoz*, qui sont égaux, parce qu'il y a égalité, entre *a o* & *o x*, ainsi qu'entre *oq* & *oz*, & entre les angles *aoz* & *qoz* qui sont opposés au sommet. La distance *az* est donc egale à *qx*. On démontreroit de même l'égalité de *mx* & de *ia*. D'ailleurs, les lignes *az* & *ai* étant égales, il faut que *qx* & *mx* soient égales entr'elles, ainsi qu'aux lignes *xi* & *xz*; c'est-à-dire que la ligne *aox* est perpendiculaire sur les deux lignes *im* & *qz*, puisque deux de ses points *o* & *z* sont également éloignés de leurs extrémités. La ligne *ax* est donc perpendiculaire au plan BC, lorsque ce plan est placé avec les précautions annoncées

C'est sur cette démonstration qu'est fondée une opération pratiquée par des charpentiers, lorsque dans la construction d'un vaisseau, ils se proposent d'établir un couple sur sa quille, de maniere que la direction de celle-ci soit perpendiculaire au plan du même couple. Ils choisissent sur la longueur de la quille, deux points tels que *n* & *q* (fig. 29. G) qui soient également éloignés du lieu *f* de ce couple. Ils marquent sur le contour du dernier, deux points *z* & *e*, ou les extrémités de sa varangue, qui sont à égale distance du lieu *f*. Ensuite ils mesurent, à l'aide d'un compas à verge, les distances des points *q* & *n*, aux deux points *z* & *e* du gabariage: & lorsque l'égalité de ces distances est parfaitement établie, ils jugent avec raison & comme on l'a prouvé ci-dessus, que la direction de la quille est perpendiculaire au plan du couple établi.

127. *Angles plans*. Examinons actuellement un plan qui en rencontre une autre, sous une inclinaison quelconque. Rappellons d'abord, que si deux points marqués dans l'espace (91), indiquent la direction d'une ligne droite qui réunit ces points; de même, trois points

qui ne ſont pas ſur une même ligne, déſignent la direction d'un plan où ils ſont placés. Il en réſulte qne deux lignes droites ne peuvent avoir deux points communs ſans ſe confondre: & il eſt également vrai, d'après ces principes, que deux plans doivent être couchés l'un ſur l'autre; lorſque dans l'eſpace, on peut aſſigner trois points, qui n'étant pas en ligne droite, appartiennent à l'un & à l'autre plan.

Si un plan *anmc* (fig. 38) rencontre, ou coupe un autre plan *bani*; ces deux plans, qui ne ſont pas appliqués l'un ſur l'autre, ne peuvent avoir de communs que deux ſeuls points. Ainſi imaginons qu'on ait tracé, ſur un de ces plans, une ligne droite qui paſſe par ces deux points; cette même ligne doit inconteſtablement être appliquée toute entiere ſur l'autre plan, puiſqu'elle a avec lui deux points communs. Cette ligne appartient donc totalement aux deux plans ſuppoſés, & par conſéquent elle eſt leur interſection commune; c'eſt-à-dire qu'en général, l'interſection de deux plans eſt toujours une ligne droite. C'eſt ainſi que les plans *bani* & *canm* ont pour interſection commune la ligne droite *na*.

Le premier de ces plans eſt-il oblique au ſecond? Il s'agit de ſavoir comment leur inclinaiſon doit être meſurée. Suppoſons que le plan *bani*, d'abord couché ſur *canm*, ne ſoit parvenu à former avec celui-ci un angle quelconque, qu'en tournant autour de l'interſection commune & conſtante *an*, comme autour d'un axe. Conſidérons auſſi le plan *bani* comme formé & compoſé d'une infinité de lignes droites, telles que *ro*, & qui ſoient toutes perpendiculaires à *na* (91). On juge qu'en conſéquence de la rotation ſuppoſée du plan *bani* autour de *an*, toutes les lignes élémentaires de ce plan, & qui d'abord étoient couchées ſur *canm*, prennent toutes, & en même tems, une égale inclinaiſon à l'égard du dernier plan: l'inclinaiſon de l'aſſemblage de toutes ces lignes, ou celle du plan *bani*, à l'égard du plan *canm*, doit donc être la même que celle d'une ſeule de ces lignes élémentaires *or*. Ainſi la meſure de cet angle plan, ſe reduit à celle de l'inclinaiſon, à l'é-

gard du plan *canm*, d'une ligne *or*, qui dans le plan *bani*, eſt menée perpendiculairement à l'interſection commune de ces plans. Nous venons de voir que pour déſigner l'angle de la ligne *or* avec le plan *canm*, il faut, d'un point *o* de cette ligne, abaiſſer ſur ce plan une perpendiculaire *ox*; & que ſi, par une ligne *rx* menée dans ce même plan, on joint le pied *r* de l'oblique *or*, & le pied *x* de la perpendiculaire, l'angle *orx* eſt alors l'angle cherché: par conſéquent, ce même angle *orx* eſt égal à l'angle plan. Si on remarque enfin que *or* étant perpendiculaire à la ligne *an*, cette derniere ligne doit l'être auſſi à *rx;* On peut établir pour regle générale, qu'un angle formé par deux plans, eſt égal à l'angle rectiligne que font entr'elles deux lignes qui tracées dans chaque plan, ſont perpendiculaires à leur interſection commune, & en un même point.

Lorſque le plan *bani*, en tournant autour de *an*, s'avance vers la poſition *sanq*; le pied *x* de la ligne *ox*, perpendiculaire au plan *canm*, ſe rapproche graduellement du point *r:* & dès que l'angle des deux plans eſt de 90 dégrés, la ligne *ox* devient *ur*, ou ſe confond avec la ligne *or*, qui eſt la même choſe que *ur*. Par conſéquent, cette derniere eſt, comme *ox*, perpendiculaire au plan *canm*. Donc auſſi toute ligne, qu'on peut ſuppoſer ménée dans le plan *sanq*, & perpendiculairement à la ſection commune *an*, ou parallélement à *ur*, eſt néceſſairement perpendiculaire au plan *canm*.

Une autre conſéquence eſt, que ſi deux plans *sanq* & *urd*, qui ſe traverſent réciproquement, ſont l'un & l'autre perpendiculaires à un plan *canm*, leur interſection commune doit l'être auſſi au même plan. Car pour meſurer l'angle des plans *sn* & *cn*, il ſuffit de mener par le point *r*, dans le plan *sn*, une ligne qui ſoit perpendiculaire au plan *cn*. De même, pour meſurer l'angle des plans *cn* & *urd*, il faut, par un point *r*, tracer dans le plan *urd*, une ligne qui ſoit perpendiculaire au plan *cn*. Or, par un point donné ſur un plan, on ne peut élever qu'une ſeule perpendiculaire:

la ligne *ur* eſt donc commune néceſſairement aux deux plans ſuppoſés : elle eſt donc leur interſection ; & par conſéquent, l'interſection de deux plans, qui tous deux ſont perpendiculaires à un troiſieme, eſt elle-même perpendiculaire à ce dernier.

Si deux plans ſont perpendiculaires chacun à un autre plan ; c'eſt-à-dire, ſi (fig. 38) le plan *cn* eſt perpendiculaire au plan *sn* ; & ſi le plan *bn* l'eſt auſſi au plan *nf*, l'angle des plans *nc* & *nb*, doit être égal à celui des plans *ag* & *aq* Car les lignes *ro* & *rd*, qui, dans les deux premiers plans, ſont perpendiculaires à leur ſection commune, forment un angle *ord*, qui eſt égal évidemment à celui des deux lignes *er* & *ru*, qui ſont perpendiculaires à la ſection commune des deux autres plans comparés.

On peut conclure auſſi des mêmes principes, que deux plans *sn* & *cn* étant perpendiculaires l'un à l'autre, toute ligne qui eſt menée, par un des points de leur interſection *an*, perpendiculairement au plan *cn*, doit être dans le premier plan *sn*. Car pour meſurer l'angle formé par ces deux plans, il faut mener, par un point *r* & dans le plan *sn*, une perpendiculaire au plan *cn* ; & comme la perpendiculaire ſuppoſée paſſe par le point *r* ; comme par un même point *r* appartenant à un plan *cn*, on ne peut élever à ce plan qu'une ſeule perpendiculaire ; il s'enſuit que ces deux perpendiculaires que nous avons conſidérées iſolément, ne peuvent être que la même ligne. Ainſi une ligne eſt-elle menée perpendiculairement à un plan, & par un point de l'interſection de ce plan avec un ſecond qui lui eſt perpendiculaire ? elle doit être appliquée dans ce ſecond plan. Il en réſulte que ſi deux lignes *as* & *rn* ſont toutes deux perpendiculaires au plan *cn*, elles ſont néceſſairement paralleles. En effet, ſoient réunis les pieds *r* & *a* de ces lignes, par une troiſieme *ar* tracée dans le plan *cn* : on peut imaginer que par *ur* & *ra*, on a fait paſſer un plan qui, par cette raiſon, doit être lui-même perpendiculaire au plan *cn*. comme ce plan paſſe auſſi par le pied *a* de la ſeconde ligne *as*, celle-ci doit ſe trouver entiérement appliquée ſur le plan *saru* ; & par conſé-

quent, les deux lignes ſuppoſées *as* & *ru*, étant dans un même plan, & formant toutes deux un même angle de 90 dégrés, avec une ſécante *ar*, qui eſt auſſi dans le plan commun, doivent être paralleles l'une à l'autre (98). Si trois lignes droites *as*, *rn* & *xo* étoient ſuppoſées perpendiculaires à un même plan *cn*, on demontreroit de la même maniere qu'elles ſont toutes paralleles entr'elles. On les compareroit ſucceſſivement deux à deux, comme on vient de le dire; & il en réſulteroit que deux quelconques ſont l'une & l'autre paralleles à une troiſieme, ou que toutes trois doivent être paralleles.

La meſure des angles plans eſt ainſi réduite à celle des angles rectilignes qui ſont formés par des lignes, menées dans les plans, perpendiculairement à leur ſection commune & au même point. On doit donc en conclure qu'il doit y avoir autant d'angles plans qu'on peut concevoir d'angles rectilignes, & que les rapports des premiers ſont les mêmes que ceux des ſeconds. C'eſt pourquoi on peut dire, que les angles plans qui ſont oppoſés au ſommet ſont égaux; que les deux angles qu'un plan forme avec un autre qu'il rencontre, valent enſemble 180 degrés; que des plans paralleles ont tous leurs points correſpondans à égale diſtance les uns des autres; & que ſi ces derniers plans ſont traverſés par un troiſieme, les angles alternes internes ſont égaux entr'eux, ainſi que les alternes externes, &c., comme on l'a démontré pour des lignes paralleles (98). Les charpentiers de vaiſſeaux font une application utile de ces dernieres idées. Obligés, dans la conſtruction d'un bâtiment, d'établir les couples parallélement au maître couple (fig. 37), ils meſurent ſur la quille l'intervalle qui ſépare, & le lieu de la varangue du maître, & celui du couple à établir, enſuite ils font regner la même diſtance entre tous les points correſpondans des gabariages de ces deux couples: & par cette opération, qu'ils nomment perpignage, ils rendent paralleles tous les couples de levée qui entrentdans la carcaſſe d'un vaiſſeau.

128. Les principes précédens conduiſent à un réſultat

important qu'il eſt à-propos de faire remarquer. Si deux plans *kiqmn* & *aoudc* (fig. 39) ſont paralleles, & ſi on les fait traverſer par un plan triangulaire, tel que *rakno*; ce dernier plan a pour ſection commune, avec *aoud*, une ligne *ao*; & avec *knmq*, une ligne k*n*. Enſuite, d'après la ſuppoſition, ces ſections ou ces lignes *ao* & k*n* doivent être paralleles; & par conſéquent, les triangles *rao* & *r*k*n* ſont néceſſairement ſemblables. On peut donc faire cette ſuite de rapports égaux, *ra*:*r*k::*ao*:k*n*::*ro*:*rn*. Si les mêmes plans paralleles ſont ſuppoſés être traverſés par un ſecond plan triangulaire *rnm*, qui ait avec le premier *r*k*n*, une ſection commune *rn*; on doit dire, & par les mêmes raiſons, *ro*:*rn*::*ou*:*nm*::*ru*:*rm*. Si on imagine enfin d'autres plans triangulaires diſpoſés les uns à coté des autres, comme le ſont les deux premiers, on eſt fondé à en conclure des nouvelles ſuites de rapports égaux. Toutes ces ſuites comparées entr'elles, deux à deux, préſentent des rapports égaux qui les lient toutes enſemble, & qui démontrent l'égalité de tous les rapports dont elles ſont compoſées. Si parmi ces rapports, on choiſit ceux-ci *ra*:*r*k::*ro*:*rn*::*ru*:*rm*::*rd*:*rq*::*rc*:*ri*, il en réſulte que toutes les ſections communes des plans triangulaires ſuppoſés, ſont coupées proportionnellement par les deux plans paralleles qui les traverſent. On peut auſſi transformer l'expreſſion de ce réſultat en celle-ci : ſi des lignes droites ſont menées d'un point *r*, placé hors d'un plan, à divers points de ce même plan; & ſi elles ſont traverſées par un ſecond plan parallele au premier; elles ſont coupées en parties qui ſont proportionnelles entr'elles. D'autres rapports des mêmes ſuites étant comparés, on peut dire, *ao*:k*n*::*ou*:*nm*::*ud*:*mq*::*cd*:*iq*::*ac*:k*i*; c'eſt-à-dire que les deux figures *aodc* & k*nqi*, tracées ſur ces deux plans, ont leurs côtés proportionnels. Il n'en réſulte pas encor que ces figures ſoient ſemblables; Cependant cette ſimilitude eſt ſuſceptible d'être démontrée, comme on va le voir. Soient menés, par les lignes *r*k & *rq*, un plan k*rq*; & par les lignes *r*k & *rm*, un autre plan *rkm*; les réſultats de cette nouvelle conſtruction doivent être pareils aux précédens ; c'eſt-à-dire

que les sections de ces nouveaux plans avec les plans paralleles, sont des lignes paralleles ; & que les triangles *rad*, *rkq* sont semblables. On en diroit de même des triangles *rau* & *rkm*, qui sont formés par les nouveaux plans *rau* & *rkm*. Ainsi on peut faire les proportions suivantes, après avoir comparé avec les précédentes, les nouvelles suites des rapports entre les côtés des triangles qui viennent d'être indiqués ; 1.° *ao*:k*n*::*ou*:*nm*::*au*:k*m* ; 2.° *au*:k*m*::*ud*:*mq*::*ad*:k*q* ; & 3.° enfin, *ad*:k*q*::*cd*:*iq*::*ac*:k*i*. Les deux figures *aoudc* & k*nmqi* sont donc semblables. Car les triangles qui les composent sont semblables, chacun à chacun, comme ayant leurs trois côtés proportionnels. On peut aussi exprimer ce résultat d'une autre maniere, en disant, que si d'un point *r* élevé au-dessus d'un plan, on mene des lignes aux sommets des angles d'un polygone quelconque k*nmqi* tracé dans ce plan ; & si après avoir fait traverser toutes ces lignes par un plan parallele au premier, on réunit par de nouvelles droites, menées dans le second plan, les points où il coupe les premieres lignes, la figure qui se trouve ainsi formée dans le second plan, est semblable à celle qui est tracée sur le premier.

129. *Projections des lignes & des surfaces sur des plans*. Les principes précédens sont les fondemens de l'art de la perspective & des projections. On en fait des applications directes dans l'architecture navale, & cette raison nous impose l'obligation de traiter cette matiere, dans ses rapports avec la marine.

Faire un plan perspectif, c'est tracer la figure d'un objet, telle qu'elle paroît à un œil, qui plus ou moins éloigné, est supposé sur une ligne perpendiculaire au plan sur lequel l'apparence de l'objet est projettée ou dessinée. C'est ainsi qu'un œil qui est en *r* (fig. 39) perpendiculairement au-dessus du plan k*nmqi*, & qui rapporte à ce plan, la figure *aoudc*, voit le point *o* sur le point *n* du plan perspectif, dans la direction prolongée du rayon visuel mené de *r* en *o*. Il rapporte de même aux points k, *m*, *q*, *i*, conséquemment à la position des autres rayons visuels, les points *a*, *u*, *d*, *c* : & ces

points de projection étant réunis par des lignes droites; la figure donnée *aoudc* paroît à l'œil qui eſt en *r*, être deſſinée ſous la forme k*mnqi* ſur le plan de projection. Cette derniere figure eſt auſſi nommée la projection de *aoudc*, ſur le plan k*nmqi*.

Si l'œil qui qui a été ſuppoſé en *r*, & à une diſtance bornée du plan perſpectif, eſt placé dans un éloignement infini de ce même plan; alors les rayons viſuels *r*k, *rn*, *rm*, &c; ne ſe rencontrent qu'à une diſtance incommenſurable; & ils peuvent alors être conſidérés comme étant, tous paralleles les uns aux autres, ou tous perpendiculaires au plan de projection. Les objets, qui dans ce cas, ſont rapportés ſur ce dernier plan, ſont alors repréſentés ſous des formes, qu'on nomme leur projections orthographiques. Telles ſont les projections qui ſont en uſage dans l'architecture navale, ainſi elles vont ſeules fixer notre attention.

Conſidérons une ligne droite *ab* (fig. 43 G) qui doit être projettée ſur le plan *fa*. Si on imagine que de tous ſes points, on abaiſſe des perpendiculaires ſur le plan *fn*, & qu'on réuniſſe par une ligne *cb*, tous les points de ce plan, auxquels aboutiſſent ces perpendiculaires, cette ligne eſt la projection de *ab*. Alors dans le triangle rectangle *acb*, on peut faire cette proportion; *ab*:*cb*::1:*coſ*. *abc*; c'eſt-à-dire que *cb*=*ab coſ*. *abc*. On voit par ce réſultat, que la projection *cb* eſt d'autant plus inférieure à la ligne projettée *ab*, que l'inclinaiſon de celle-ci, à l'égard du plan perſpectif, eſt plus conſidérable; de ſorte que cette inclinaiſon étant nulle, ou la ligne *ab* étant parallele au plan *fa*, alors le *coſ*. de *abc* eſt égal au rayon, ou *ab* devient parfaitement égale à ſa projection. Mais ſi cet angle *cba* eſt de 90 dégrés, alors la projection de *ab* eſt nulle; ou plutôt elle n'eſt repréſentée que par un ſeul point *b*.

On trouve par un procédé ſemblable, la projection d'une ligne courbe, telle que *ei*, ſur le même plan *fn*. On abaiſſe de divers points de ſon contour, des perpendiculaires ſur ce plan; & ſi ces lignes peuvent être bornées au nombre de deux, pour déterminer la projection d'une ligne droite, elles doivent être plus nombreuſes

pour indiquer avec exactitude celle d'une ligne courbe. Elles doivent même être d'autant plus multipliées que la courbure de *ei* est plus grande: & leur nombre dépend de celui des lignes droites infiniment petites, qu'on peut considérer comme les élémens qui composent la longueur de la courbe *ei*. D'ailleurs ces lignes élémentaires ont avec leurs projections particulieres & correspondantes des rapports qu'on peut calculercomme celui de *ab* à *bc*.

Si actuellement on considere une figure plane ou une surface *lrkm*, sa projection sur le plan *fn* doit être déterminée par des perpendiculaires, abaissées de tous les points de cette surface, sur ce même plan. Bornons-nous à indiquer celles qui sont abaissées des sommets des angles de cette figure, & qui doivent assigner les limites de la projection demandée. On voit que la figure *kmxo* est la projection orthographique de *krlm*. La projection particuliere du côté k*r* est k*o*; & si on imagine que cette figure entiere k*rlm* soit formée d'une infinité de lignes droites pressées & paralleles à k*r*, chacune de ces lignes élémentaires seroit à sa projection, comme le rayon est au cosinus de l'inclinaison du plan de projection. On peut même présumer, sans avoir recours à la mesure directe des surfaces, que la somme de ces lignes élémentaires, ou la surface entiere k*rlm*, doit être à la somme de leurs projections particulieres, ou à la projection de cette surface, comme le rayon, est au cosinus de l'inclinaison dn plan projetté.

On peut donc conclure, comme on l'a fait pour des lignes droites, que la projection d'une surface plane est égale à cette figure elle-même, lorsqu'elle est parallele au plan de projection; & si le plan d'une telle surface étoit perpendiculaire au plan *fn*, l'intersection commune de ces plans seroit la projection de cette figure, quel que puisse être son contour ou sa grandeur.

En rassemblant tous ces résultats, on doit voir (fig. 36), que si BC est un plan de projection, les lignes *ao*, *ru* & *pt* doivent avoir pour projections les seuls points *o*, *u* & *t*, si elles sont perpendiculaires à ce plan; que les lignes *ab*, *ai*, *ac* ont pour projections les lignes *bo*, *io*, *co* qui sont tracées sur le plan auquel elles sont

inclinées ; que la ſurface *abc* a pour projection le triangle *cob* ; & que celles des triangles *abo*, *aio*, *aco*, *aoz*, dont les plans ſont ſuppoſés perpendiculaires au plan BC, ſont les ſeules lignes *bo*, *io*, *co*, *oz*, qui ſont leurs interſections avec le plan de projection. De même (fig. 38), les ſurfaces *urd*, *sanq* étant projettées ſur le plan *cn* auquel elles ſont perpendiculaires, ont pour projections les lignes *rd* & *an*, qui ſont les interſections communes de ces ſurfaces avec le plan de projection *nc*.

130. Dans l'architecture navale, on ne projette pas ſur des plans le corps entier d'un vaiſſeau qu'on ſe propoſe de conſtruire ; mais on y trace les projections de pluſieurs ſections principales d'un tel corps. Ces ſections ſont faciles à imaginer. En effet, ſuppoſons qu'un vaiſſeau repréſenté par *defg* (fig. 75. G), ſoit coupé & traverſé par un plan tranchant, dirigé ſuivant les lignes *ab* & *ic* ; il doit en réſulter, dans ce vaiſſeau, une ſection dont la figure eſt *acbi*. Si ce plan eſt dirigé ſuivant les lignes *ab* & *dg*, la ſection eſt alors *dbga* ; & ainſi des autres.

Les plans qu'on a choiſi pour ſervir aux projections annoncées, des couples, des liſſes, & des lignes d'eau, ſont au nombre de trois. Ils ſont perpendiculaires les uns aux autres ; & ſi, comme on doit le faire, on les conſidere dans un même vaiſſeau, on voit l'un de ces plans dans *dagb* qui eſt horiſontal : les deux autres plans ſont *abc* & *defg*, qui ſont verticaux & perpendiculaires, ſoit ent'eux, ſoit à l'égard du premier plan. L'un *acb* eſt le plan du maître couple du vaiſſeau, & il eſt placé de maniere que la direction de la quille lui eſt perpendiculaire. comme il eſt ſuppoſé vertical, il porte le nom de vertical. Le ſecond *defg* eſt nommé le plan d'élévation. Il eſt dirigé par la quille *ef*, l'étrave *gf*, & l'étambot *de*. Il partage le vaiſſeau en deux parties égales, & par cette derniere raiſon, on le diſtingue ſous le nom de plan diametral. Il eſt ſuppoſé vertical, comme le premier, et ces deux plans ſont perpendiculaires l'un à l'autre. Enfin le troiſieme plan de projection *dgba* eſt auſſi perpendiculaire aux deux premiers : mais ſa poſition lui a fait donner le nom de plan horiſontal.

Il eſt auſſi quelques autres plans particuliers, qui ſont ſitués obliquement aux précédens, & qui ne ſervent à préſenter les figures que des ſeules liſſes d'un bâtiment; mais nous nous réſervons d'en parler, après les détails généraux qui naturellement doivent précéder ces développemens acceſſoires.

Examinons 1.º les projections qui ſont faites ſur le plan vertical *acb*. Ce plan eſt celui du maître couple, ou d'une ſection, au plan de laquelle la quille eſt perpendiculaire. On peut reconnoître (fig. 37) une telle ſection, dans la ligne courbe *iodc* (qui eſt la ſéparation des pieces de bois qu'on accole enſemble, pour compoſer le couple ſolide d'un vaiſſeau). Tous les autres couples que préſente la même figure, annoncent la forme & le lieu de pluſieurs autres ſections, qu'on imagine être faites, dans le corps d'un vaiſſeau, par des plans tranchans & dirigés parallelement à celui du maître couple. La poſition particuliere des couples qui ſont en avant ou en arriere du maître, conduit à conclure que leurs projections ſur le plan de ce dernier, doivent être parfaitement égales aux couples projettés (129), ſoit dans leur contour, ſoit dans leur étendue. Ainſi (fig. 47. G), dans le plan SHRQ*dts* (qui eſt celui du maître, dont le demi-contour réel eſt repréſenté par *stdQ*), les projections, telles que *him*Q, *yo*Q, *z*T*x*D, ſont celles des demi-contours de trois couples particuliers d'un vaiſſeau. Elles ſont égales aux couples mêmes, & les courbes qui les repréſentent, embraſſent entre leurs branches un eſpace égal à celui qui eſt compris entre les branches réelles des gabariages d'autant de couples ſolides du bâtiment. Cette égalité vient de ce que les plans de ces ſections ſont paralleles au plan de projection.

Conſidérons auſſi les contours des liſſes d'un vaiſſeau; c'eſt-à-dire, de ces larges ceintures telles que *eqpsz* qui l'entourent (fig. 37), pendant sa conſtruction. Imaginons, comme on le fait dans l'architecture navale, que la partie *dpsz* d'une liſſe, & qui embraſſe l'avant du bâtiment, ſoit placée dans un plan différent de celui qui paſſe par la partie arriere *dqe* de la même liſſe (en ſuppoſant

cependant ces deux plans tous deux perpendiculaires à celui du maître, ou au vertical). Alors on doit juger que les projections des deux parties de cette lisse, sur le vertical, ne peuvent être que les intersections de leurs plans particuliers, avec celui de projection. C'est ainsi que la projection de la partie arriere de cette lisse, doit être représentée (fig. 47. G) par une ligne *dB* inclinée à l'horison, comme le plan de cette section patielle. Les autres lisses, soit supérieures, soit inférieures à celle-ci, ont aussi pour projections, des lignes droites qui sont placées comme ces sections, dans le vaisseau supposé; ou des lignes telles que *a*D, *br*, *d*B, *p*A, *g*K, *s*H.

Si on imagine dans un vaisseau des nouvelles sections qui soient faites horisontalement, elles sont alors perpendiculaires au plan vertical; & leurs projections sur ce dernier, ne peuvent être que les intersections qui leur sont communes avec ce plan. On voit (fig. 47. G) dans les lignes 3*l*, 3*t*, 3*f*, 3*e*, 3*c*, les projections d'autant de sections, qui, par leur position, reçoivent le nom de lignes d'eau. Enfin, dans ce plan, on voit encor la projection du plan diametral du vaisseau. Ce plan est *defg* (fig. 75. G), & son intersection avec le plan vertical est *ic*; c'est pourquoi sa projection (fig. 47. G) sur le vertical est une portion de la ligne QH. Telles sont les projections de diverses sections d'un vaisseau sur le plan, qui est nommé vertical, & qui est celui du maître couple.

Considérons 2.° celles qui sont faites sur le plan diamétral d'un vaisseau, ou sur le plan d'élévation Soit *agfr*AD le plan indiqué (fig. 73. G). Il est perpendiculaire au plan du maître couple; ainsi ce couple, & tous les autres couples de levée qui lui sont paralleles, ne peuvent avoir d'autres projections sur le plan d'élévation, que des lignes droites, qui sont égales aux intersections de ces plans avec celui de projection. C'est pourquoi les projections de deux couples qui correspondent aux points *e* & *d* de la quille d'un vaisseau, sont les lignes *eoz* & *dxn* perpendiculaires à la quille. De même, les lignes d'eau, dont les plans sont horisontaux, & par conséquent perpendiculaires au plan

fondé

diamétral, ont pour projections des lignes droites. On voit dans les droites *pq* & *ty*, celles de deux lignes d'eau particulieres. Quant aux lisses, comme leurs plans sont obliques au plan diamétral, leurs projections sur ce dernier ne peuvent être égales à ces mêmes lisses, & elles consistent dans des courbes, telles que *ucn*, *aoxr*, qui sont peu ressemblantes aux lisses réelles d'un vaisseau. Dans ce plan d'ailleurs, on voit la forme réelle de l'étrave & de l'étambot, parce que ces lignes courbes sont placées entièrement dans le plan diamétral. On voit dans la figure 57. G, une portion *obyq* du plan diametral ou d'élévation, sur lequel sont représentées les projections *qy*, *tp*, *zx* des demi-couples, qui, vus obliquement sur un vaisseau, présentent l'apparence de *my*, *ap*, *sx*. On voit aussi dans des lignes ponctuées, telles que *ogn*, la forme des projections des lisses, sur le plan d'élévation d'un vaisseau.

Soit 3° le plan horisontal représenté par A*r*B*s* (fig. 46. G). le plan des couples est perpendiculaire à celui-ci, & leurs projections y sont nécessairement des lignes droites, telles que *rs*, *i*3, &c. Les lignes d'eau seules dont les plans sont paralleles à ce plan de projection, sont représentées sur ce dernier, dans toute leur grandeur réelle. Ainsi les courbes A*m*B, A*u*C, A*i*B, &c. sont égales aux demi-lignes d'eau du vaisseau auxquelles elles sont relatives. Les projections entieres de deux de ces lignes d'eau sont représentées séparément (fig. 24 & 44. G). On trace quelquefois sur ce même plan horisontal, les projections des lisses, & on voit (fig. 68. G) la projection *afi* d'une portion de lisse dont la forme réelle est *adh*. La dissemblance des lisses avec leurs projections horisontales & le peu d'utilité des dernieres, ont fait souvent négliger de les tracer. Mais on dessine le vrai contour de chacune, sur le plan même de la section qui est supposée faite dans un vaisseau suivant leur contour & obliquement au plan diametral. Ces derniers plans, nommés obliques sont ajoutés aux trois principaux dans l'architecture navale.

Nous avons déjà remarqué que les deux parties d'une même lisse, l'une de l'avant & l'autre de l'ar-

riere, ne ſont pas dans un même plan; & nous devons ajouter que ſi on les conſidere, ſi on les examine ſur un vaiſſeau; on reconnoît que le contour de l'une *ui* eſt dans un plan tel que *uih* (fig. 49. G); tandis que l'autre k*u* paroît dans un plan *akud*. Ces deux plans ſe joignent au point *u*; ils ſont inclinés l'un à l'autre; & réunis, ils préſententle cours entier d'une même liſſe.

Malgré cette diſtinction des plans, des deux branches d'une liſſe; on trace ſouvent dans l'architecture navale, le contour d'une même liſſe, ſur un ſeul & même plan *rdnuq* (fig. 48. G); en obſervant, de donner à la partie de l'avant *ndu*A les ordonnées qu'elle a ſur le vaiſſeau dans ſon propre plan, & de repréſenter le contour de l'arriere de la même liſſe *rdq* avec les mêmes précautions. Cette maniere aſſez ſinguliere & peu vraie, de tracer les liſſes d'un vaiſſeau, n'eſt pas ſuſceptible de conſèquences dangéreuſes, & ces lignes peuvent être employées, comme elles y ſont deſtinées, à faire connoître les équerrages des couples, à indiquer le lieu de toutes les alonges, & par conſéquent à diriger convenablement les charpentiers, ſoit dans le travail des pieces de bois qui compoſent ces couples, ſoit dans l'établiſſement de ces pieces à leurs places reſpectives. Quant aux rapports de leurs contours avec les qualités eſſentielles que doivent avoir des bâtimens de mer, ils ne ſont, ni aſſez immédiats, ni aſſez déterminés, pour faire ſervir ces courbes, ou leurs projections (ainſi qu'on le pratique quelquefois), comme des baſes propres à indiquer la forme qu'on doit donner à la carene d'un bâtiment. Elles ne peuvent même pas être regardées comme des ceintures d'un vaiſſeau, (fig. 37); & par conſéquent comme propres à faire connoître la direction des bordages. Car, comme nous le verrons ailleurs, de telles ceintures ſur la ſurface de la carene d'un vaiſſeau, ſont des courbes à double courbure, dont les points par conſéquent, & à plus forte raiſon une branche entiere, ne peuvent être ſuppoſés, comme le ſont les branches des liſſes, dans un ſeul & même plan.

Comme l'extrémité de l'arriere d'un vaiſſeau préſente

par sa courbure variée & rapide, quelques difficultés dans l'exécution ou dans le travail des pieces qui la composent; on imagine des plans tranchans, qui, dans cette partie, font diverses sections, tant horisontales que verticales. Parmi les sections verticales, il en est une *rg* qui est dirigée obliquement au plan diamétral. On la voit (fig. 57. G) : on la nomme estain, & son plan *rzg* n'est pas parallele à ceux *zsx*, *tap & qmy* des autres couples dont on a parlé précédemment. Conséquemment à la position annoncée de l'estain, sa projection (fig. 66. G) sur le plan diamétral *uas*, est *zmx*. Sur le plan horisontal elle ne peut être qu'une ligne droite, & elle est représentée par *ag* (fig. 59. G) ou par *efd* (fig. 68. G). Enfin sa projection sur le plan du maître couple ou du vertical, est AQRTU (fig 67, G). On voit par conséquent que sur aucun des trois plans principaux, l'estain n'est présenté sous sa forme réelle. Les sections horisontales qu'on imagine être faites dans cette extrémité d'un vaisseau, sont placées à la hauteur de chaque barre de l'arcasse, afin que les contours extérieurs de celles-ci soient tracés sur le plan horisontal, dans leur véritable grandeur, & que leur gabaris puissent être facilement formés pour la commodité des charpentiers. Les contours des barres sont représentés par les lignes courbes *ug*, *ub*, *up*, *uq*, *ur*, *us* (fig. 59. G): Et la ligne ponctuée *ag*, où se terminent toutes ces courbes, est comme on l'a dit, la projection de l'estain; puisque ce demi-couple dans le vaisseau, passe par les extrémités des barres, & se trouve dans un plan vertical. C'est par le moyen de ces projections, qu'on parvient à tracer le contour réel de l'estain, & qu'on indique aux charpentiers comment ils doivent conformer le gabari de cette piece de l'arcasse. Car les lignes *as*, *ar*, *aq*, *ap*, *ab*, *ag* sont les projections des diverses largeurs, qui, sur le contour de l'estain, correspondent à la hauteur de chaque barre. C'est pourquoi les mesures de ces lignes étant portées (fig. 61. G) en *dl*, *pb*, *nf*, *c*A, perpendiculairement à la ligne F*l*, & placées à des distances *bf*, *bl*, *f*A, qui soient égales à celles des barres correspondantes de l'arcasse, la courbe *cnpd* qu'on fait passer

par les extrémités *c*, *n*, *p*, *d*, devient le contour extérieur de l'eſtain ſolide qui doit faire partie de l'arriere du vaiſſeau. D'autres demi-couples, ſous le nom de devoyés ou d'élancés, & placés, ainſi que l'eſtain, obliquement au plan diamétral, quoique dans des plans verticaux, ſont auſſi projettés ſur les mêmes plans principaux. Leur contour réel eſt conclu de leurs projections, par le même procédé qui vient d'être indiqué pour déterminer le gabari de l'eſtain.

Les projections des barres de l'arcaſſe, qui ſont horiſontales, ſont ſur le plan diamétral, ou ſur le plan du maître couple, des lignes droites. Des lignes telles que *rm*, & ſes paralleles repréſentent, dans le plan diamétral (fig. 66. G), les projections de ces barres.

On imagine auſſi, pour diriger certaines parties du travail des charpentiers, ou pour leur faire connoître la grandeur de certains équerrages, d'autres ſections verticales qui ſont faites dans cette extrémité du vaiſſeau, & parallélement au plan diamétral. Les lignes *cd*, *hi*, *fl*, *mn*, *ua* (fig. 59. G) annoncent, & la poſition, & les diſtances de ces ſections, ainſi que leurs projections ſur le plan horiſontal. Sur le plan vertical, leurs projections ſont repréſentées par les lignes menées des points *d*, *c*, *f*, *g*, *a*, (fig. 65. G) parallélement à la ligne *ab*, qui eſt la projection du plan diamétral. Ces mêmes ſections projettées ſur le dernier plan (fig. 66. G), y paroiſſent dans leur grandeur réelle; & les lignes courbes, qui, des points *d*, *e*, *f*, *g*, s'élevent pour ſe rendre à la ligne *az*, ou à la projection de la liſſe d'hourdy, repréſentent les véritables contours de ces nouvelles ſections. C'eſt par cette conſtruction, qu'on détermine les équerrages des pieces qui compoſent l'arriere. Par exemple, la ligne *rm* eſt la projection d'une barre ſur le plan diamétral, & les angles que forme cette ligne avec toutes les courbes ponctuées qu'elle traverſe, annoncent les équérrages de ces barres, dans tous les points qui leur ſont communs avec ces ſections imaginaires.

131. *Mesure des surfaces planes.* Après avoir indiqué toutes ces applications utiles des principes précédens: après avoir donné, dans la premiere section, l'idée d'une figure plane, de la mesure de ses côtés, de la grandeur de ses angles: & enfin, après avoir exposé comment le contour, d'une telle figure tracée dans l'espace, peut être rapporté à différens plans déterminés; comment elle y est projettée sous une forme qui la déguise, mais qui est telle que toujours des rapports distincts & simples lient son contour réel à celui de ses projections: il faut actuellement considérer la grandeur de l'espace même qu'elle embrasse par ses côtés; ou il faut chercher à évaluer l'étendue de sa surface.

Nous avons vu qu'on mesure une ligne droite, en portant sur sa longueur celle d'une petite ligne, qui est prise pour unité, & qui est, ou la toise, ou une de ses divisions, telles qu'un pied, un pouce, &c. De même, mesurer une surface, c'est déterminer combien de fois elle contient, une petite surface connue qu'on est convenu d'adopter pour unité de surface. Cette unité principale, qui est employée dans la société, & qui est représentée (fig. 40) par *abcd*, est une toise quarrée, c'est un parallélogramme dont les angles sont droits, & dont chaque côté est égal à une toise. On estime aussi l'étendue des surfaces, suivant les circonstances, en pieds quarrés, ou en pouces quarrés, ou, &c.; mais ces dernieres mesures ne sont alors considérées que comme des fractions ou des parties de l'unité principale. Bientôt nous verrons que ces dénominations peignent parfaitement les objets qu'elles désignent.

Lorsqu'il a été question de chercher à connoître la valeur des angles des figures planes quelconques, & les rapports de de leurs contours, nous avons vu que la question a été reduite à considérer ces mêmes objets dans les seules figures triangulaires; parce qu'on peut en conclure tout ce qui regardedes polygones d'un nombre quelconque de côtés. Ainsi, pour suivre un ordre uniforme, il faut actuellement chercher à juger de la surface de tout polygone, par celle des triangles dont on peut supposer que chacun est composé. Il faut

donc examiner quelle eſt la meſure de la ſurface d'un triangle quelconque.

Soit un triangle rectiligne *abc* (fig. 21). Sa ſurface eſt l'eſpace renfermé ou circonſcrit par ſes trois côtés. Si du ſommet *a* d'un de ſes angles, une perpendiculaire *ao* eſt abaiſſée ſur le côté oppoſé *bc*, la ligne *ao* reçoit le nom de hauteur du triangle, & alors le côté *bc* eſt nommé la baſe de ce même triangle.

Comme il ſeroit difficile d'arranger dans l'eſpace triangulaire *abc*, pluſieurs figures telles que *abcd* (fig. 40), & qui couvriſſent exactement ſon étendue, afin de faire connoître le nombre de fois qu'une telle unité y ſeroit contenue : comme cet arrangement peut ſe faire plus commodement dans la ſurface d'un parallélogramme rectangle DABE, qui par ſa forme, a plus d'analogie avec celle de l'unité de meſure *abcd*, & qui peut être aiſement partagé en petits quarrés, tous égaux à cette unité : il faut déterminer la meſure de la ſurface d'un parallélogramme rectangle. Cette recherche eſt non-ſeulement d'une utilité directe, pu'iſqu'il eſt toujours néceſſaire de connoître la ſurface d'une telle figure; mais elle eſt d'une utilité générale, puiſqu'on peut en conclure quelle doit être l'expreſſion de la ſurface, ſoit de tout triangle rectiligne, ſoit de tout parallélogramme.

En effet, ſoit un triangle CBD (fig. 41) rectangle en D ; & ſoient menées, 1° par le point B une ligne BA parallele au côté CD ; & par le point C, une parallele au côté BD : il réſulte alors de cette conſtruction un parallélogramme rectangle ABCD, dont la moitié eſt évidemment égale au triangle CBD ; puiſque ce triangle & BAC ſont égaux comme ayant, à cauſe des paralleles, les trois côtés égaux chacun à chacun. Ces triangles & ce parallélogramme ont d'ailleurs une même baſe CD ou AB, & une même hauteur DB ou AC. Ainſi un triangle rectangle eſt toujours la moitié d'un parallélogramme rectangle, lorſque ces figures ont même baſe & même hauteur.

Si ſur le triangle obliquangle CDI, on forme, par des paralleles menées comme précédemment, un parallélogramme obliquangle OCDI, on démontreroit de

même 1° que les triangles ICD & ICO, 1° ont la base CD, & la hauteur BD du parallélogramme OCDI; 2° qu'ils sont égaux entr'eux; & 3° que chacun par conséquent a une surface qui est la moitié de celle du parallélogramme. On peut donc conclure en général qu'un triangle quelconque est toujours la moitié d'un parallélogramme, lorsque ces figures ont même base & même hauteur.

Si on compare les deux parallélogrammes BDCA & OCDI, qui ont même base CD, & même hauteur BD; on conclud facilement leur égalité. En effet ces deux figures sont composées chacune de deux parties, l'une de OCDB & AOC, l'autre de OCDB & DBI. Elles ne peuvent donc différer que par l'inégalité des triangles AOC & DBI, puisque l'espace OCDB est commun à l'une & à l'autre. Mais ces triangles sont égaux, parce que, conséquemment aux paralleles, les côtés AC & BD sont égaux, ainsi que les côtés CO & DI, & parce que les angles ACO&BDI, sont compris chacun entre des côtés paralleles. Donc deux parallélogrammes qui ont même base & même hauteur sont égaux en surface: donc aussi il y a égalité entre les surfaces de leurs moitiés; c'est-à-dire entre les triangles qui, comme eux, ont même base & même hauteur. Un tel raisonnement peut ainsi s'étendre à tous les triangles, comme à tous les parallélogrammes possibles; & on doit dire en général que tous les triangles qui ont même base & même hauteur, sont égaux en surface. On doit le dire de même de tous les parallélogrammes. Un triangle quelconque est donc la moitié d'un parallélogramme rectangle dont il a la base & la hauteur; C'est pourquoi il suffit de déterminer quelle est la surface du dernier, pour en conclure celle d'un triangle quelconque.

Considérons le rectangle ADEB (fig. 40) dont la base est AB, & la hauteur DA. Soient partagés, le côté AB en parties qui soient égales à la base *ab* de l'unité de mesure, & le côté DA en parties qui soient aussi égales à la hauteur *ca* de cette même unité. Soient ensuite menées, par les points de division de AB, des paralleles à la hauteur DA, & par ceux de la hauteur des

paralleles à la base. Alors le rectangle se trouve partagé en petits quarrés qui sont tous égaux à l'unité de mesure : & il ne s'agit plus que de déterminer leur nombre, pour désigner, suivant les conventions, la surface du rectangle. Si on n'examine qu'une seule tranche A*om*B de cette figure, on voit qu'elle contient autant de quarrés qu'il y a de divisions dans la base AB. On voit aussi que dans toute la figure, il y a autant de tranches égales à A*om*B, qu'on compte de parties égales dans la hauteur AD; par conséquent le nombre des parties contenues dans une de ces tranches, (ou le nombre des parties de la base), étant répété autant de fois qu'il y a de parties égales dans la hauteur, le produit doit être le nombre total des quarrés, ou des unités de mesure, renfermés dans l'étendue de ce rectangle. Telle est donc l'expréssion de sa surface : mais au-lieu de dire, pour indiquer cette surface, qu'il faut multiplier, par le nombre des paaties égales de la hauteur, le nombre des quarrés renfermés dans une tranche; on exprime brievement la surface de ce rectangle, en disant qu'elle est égale au prduit de sa base multipliée par sa hauteur. La surface d'un triangle quelconque est la moitié d'un tel produit; ainsi elle est égale à la moitié de sa base multipliée par sa hauteur. Celle d'un parallélogramme quelconque est donc aussi égale au produit de sa base multipliée par sa hauteur; puisqu'on peut toujours imaginer un parallélogramme rectangle, qui auroit même base & même hauteur que celui qui seroit à mesurer. La surface d'un parallélogramme dont les côtés sont égaux & les angles de 90 dégrés, est donc exprimée par le quarré d'un des côtés de cette figure; & c'est par cette raison qu'on a donné, soit à l'unité de mesure, le nom de toise quarrée; soit aux divisions de cette unité principale, les dénominations de pied quarré, de pouce quarré, &c.

Si on demande quelle est la surface d'un polygone quelconque, & tel, par exemple, que *flihg* (fig. 19), il faut le supposer partagé en triangles qui soient formés par des diagonales menées d'un des angles aux autres

angles. Sa surface est alors la somme des surfaces partielles de tous les triangles dont il est composé.

Parmi ces polygones, nous devons remarquer ceux qui étant des quadrilateres, ont deux côtés paralleles. On les nomme des trapezes, & ACDI (fig. 41) est de cette forme. Ces polygones ne sont ici distingués de tout autre, que parce que leur figure est celle de plusieurs voiles employées dans le gréement des vaisseaux, & parce que d'ailleurs l'expression de leur surface est facile à indiquer généralement. Considérons ACDI; ses côtés paralleles sont CD & AI, & ils sont nommés les bases supérieure & inférieure, du trapeze dont la hauteur est une ligne BD ou CA, perpendiculaire à ces bases. La surface de cette figure, lorsqu'elle a été partagée par une diagonale CI, est la somme des surfaces particulieres des deux triangles ACI & CID; & comme ces triangles ont une hauteur commune DB, en supposant qu'ils ont pour base, l'un CD, & l'autre AI; la somme de leurs surfaces, ou la surface du trapeze proposé, est égale au produit de la hauteur commune BD, multipliée par la moitié de la somme des deux bases paralleles. Cette surface peut aussi être exprimée d'une autre maniere. Car supposons une ligne *rq*, menée à égale distance des deux bases du trapeze, ou par le milieu des côtés CA & DI, alors on forme des triangles ACI & *rcu*, qui sont semblables à cause des paralleles; & par conséquent la ligne *ru* est la moitié de AI, comme *cr* est la moitié de CA. On démontre de même par la similitude des triangles CID & *uiq*, que *uq* est la moitié de CD, comme *iq* est la moitié de ID. la ligne *rq* toute entiere vaut donc la moitié de la somme des deux bases du trapeze: donc la surface de cette figure, qui a été démontrée être égale au produit de la demi somme des bases paralleles, multipliée par la hauteur du trapeze, peut être dite égale au produit de cette hauteur multipliée par un ligne menée à égale distance des deux bases.

Si un polygone est régulier, sa surface est aussi égale à celle des triangles qui peuvent y être formés, par le moyen de diagonales menées d'un des angles aux autres

angles ; mais ſa régularité conduit à une expreſſion ſimple de l'eſpace qu'elle renferme. On peut ſuppoſer un tel polygone inſcrit à un cercle (fig. 20), & partagé en triangles, par des rayons tirés du centre de ce cercle aux divers angles du contour. Ces triangles, dont les ſurfaces ajoutées enſemble compoſent celle du polygone, ont une même hauteur (109), telle que *og* ou *oh*, en prenant pour baſe de chacun, le côté du polygone qui lui correſpond : par conſéquent la ſomme des ſurfaces de tous ces triangles, doit être égale au produit de la moitié de la hauteur commune, multipliée par la ſomme des côtés du polygone. La ſurface d'un polygone regulier eſt donc toujours exprimée par le produit de ſon contour, multiplié par une perpendiculaire abaiſſée du centre du cercle qui lui eſt circonſcrit, ſur un de ſes côtés. De-là on peut conclure l'expreſſion de la ſurface d'un cercle quelconque ; puiſqu'on peut regarder un cercle comme un polygone regulier d'une infinité de côtés. Conſidérée ſous ce rapport, la ſurface d'un cercle eſt donc égale au produit de ſa circonférence multipliée par la moitié de ſon rayon.

Si dans un cercle on ne conſidere qu'un ſecteur, tel que *aubo*, ou l'eſpace renfermé entre un arc *aub* & les deux rayons *oa* & *ob* qui paſſent par ſes extrémités; ſa ſurface eſt égale au produit de la moitié du rayon, multipliée par la longueur de l'arc qui ſert de baſe à ce ſecteur. Car ſi un ſecteur eſt une certaine partie de la ſurface d'un cercle, l'arc qu'il embraſſe doit être la même partie de la circonférence. On peut dire auſſi plus directement, qu'un ſecteur conſidéré comme une portion d'un polygone régulier d'une infinité de côtés, eſt compoſé de triangles, qui ſont formés par des rayons menés du centre aux extrémités des lignes élémentaires, qu'on peut ſuppoſer dans la longueur de l'arc. Tous ces triangles ont chacun dans le rayon une même hauteur : ainſi, la ſomme de leurs ſurfaces, ou la ſurface du ſecteur, eſt égale au produit de la moitié du rayon multipliée, par la ſomme des baſes de ces triangles élémentaires, ou par la longueur de l'arc entier qui ſert de baſe au ſecteur propoſé.

L'eſpace *agbu* qui eſt renfermé entre l'arc *aub* & ſa corde *agb*, porte le nom de ſegment; & comme il eſt la différence du ſecteur entier *aubo*, au triangle *abo*, ſa ſurface doit être la différence des ſurfaces des deux figures indiquées. Nous venons de voir comment on meſure la ſurface d'un tel ſecteur *aob*. Quant à celle du triangle *aob*, elle eſt égale, comme on ſait, à la moitié de ſa baſe *ba* multipliée par la hauteur *go*. Lorſqu'on ne connoît, pour ce calcul, que le rayon du cercle, & le nombre de degrés de l'arc du ſecteur; il faut avec ces données, déterminer, & la baſe, & la hauteur d'un tel triangle. On fait donc, dans le triangle rectangle *aog*, la proportion ſuivante, $1 : ao :: \sin.\frac{1}{2}aub : \frac{1}{2}ab$; & le terme $\frac{1}{2}ab$ étant ſeul inconnu, on calcule ſa valeur, qui eſt celle de la moitié de la baſe cherchée du triangle *aob*. On détermine auſſi la hauteur de ce dernier par cette proportion, $1 : ao :: \cos.\frac{1}{2}aub : og$. Enſuite, après les calculs indiqués, on retranche la ſurface de ce triangle de celle du ſecteur, pour parvenir à la ſurface du ſegment propoſé.

Il eſt ſouvent queſtion de meſurer des eſpaces qui ſont terminés par une courbe différente de la circonférence d'un cercle; & parmi ces ſurfaces toujours ſuppoſées planes, on doit citer les couples d'un vaiſſeau, ſa flottaiſon, ſes lignes d'eau, &c. Voici le procédé qu'il faut ſuivre pour déterminer la ſurface de pareilles courbes.

Soit *abdc* (fig. 24. G) la moitié d'une ligne d'eau *abde*, ou d'une ſection faite horiſontalement dans le corps d'un vaiſſeau; & ſoit demandée l'étendue de ſa ſurface. On peut imaginer ſon contour *abd* partagé en un très-grand nombre d'arcs, & qui ſoient ſi petits que leur courbure ſoit inſenſible, ou qu'on puiſſe les regarder comme autant de petites lignes droites. Alors, ſi des extrémités de ces arcs, on mene des lignes qui ſoient perpendiculaires ſur une ligne *ad* qui traverſe cette ligne d'eau diamétralement, la partie *abdc* de cette ſurface ſe trouve partagée en un grand nombre de petits trapezes, dont les ſurfaces partielles réunies, compoſent ſa ſurface totale. Si d'ailleurs cette diviſion du

contour *abd* eſt dirigée de maniere qu'il y ait une même diſtance entre chaque perpendiculaire & ſa voiſine, on obtient ainſi des trapezes qui ont tous une même hauteur *qs*. La ſurface d'un trapeze, comme on l'a vu précédement, eſt égale à ſa hauteur multipliée par la moitié de ſes deux baſes paralleles; ainſi la ſomme des ſurfaces de tous les trapezes qui compoſent l'eſpace *abdc*, ou la ſurface d'une demi-ligne d'eau, eſt égale au produit de la hauteur *qs* (qui eſt commune à tous ces trapezes) multipliée par la ſomme des moitiés des baſes de tous ces trapezes. Donnons à toutes les perpendiculaires abaiſſées des divers points du contour de cette demi-ligne d'eau ſur ſon diametre, le nom d'ordonnées de cette courbe; & rémarquons que dans cette figure, chaque ordonnée eſt en même tems la baſe ſupérieure d'un trapeze, & la baſe inférieure du trapeze adjacent: par conſéquent, la ſomme des demi-baſes de tous les trapezes eſt celle de toutes les ordonnées, lorſque la courbe, telle que *abd*, eſt ſuppoſée rencontrer l'axe *ad* en deux points *a* & *d*. la ſurface *acdb* eſt donc égale alors au produit de la ſomme des ordonnées de cette courbe, multipliée par leur diſtance commune. Si la courbe (comme dans la fig. 44. G) ne rencontre l'axe *cd* qu'en un ſeul point *d*; & que la ſurface demandée *crado* ſoit terminée à une de ſes extrémités, par une ligne *ac*; alors l'ordonnée *ac* n'eſt baſe que d'un ſeul trapeze. Sa moitié ſeule doit donc entrer dans la ſomme des demi-baſes de tous les trapezes; & par conſéquent la ſurface d'une courbe, telle que *cad*, ou *qobdc* (fig. 24. G) eſt égale au produit de la diſtance commune des ordonnées, multipliée par la ſomme de la moitié de la derniere ordonnée *ca* ou *oq*, & de toutes les autres ordonnées entieres, qui ſont compriſes dans l'eſpace propoſé. Enfin s'il eſt queſtion de meſurer un eſpace *oqcb*, qui ſoit terminé à ſes deux extrémités par deux lignes droites, telles que *oq* & *bc*, ſa ſurface eſt évidemment égale à la diſtance commune des ordonnées, multipliée par la ſomme, & de la moitié des deux ordonnées extrêmes, & des ordonnées totales qui ſont intermédiaires.

On juge aiſément d'après cet expoſé, comment on doit meſurer la ſurface, ſoit d'un demi-couple *brfa* (fig. 27. G), ſoit d'un plan diamétral *obdi* (fig. 34. G), ſoit d'une figure plane & curviligne, telle que *mez* (fig. 26. G), ſoit enfin de toutes celles qu'on a annoncées comme projettées ſur les plans des trois ſections principales d'un vaiſſeau.

132. *Rapports des ſurfaces planes.* Deux triangles peuvent être, ou égaux, ou ſemblables, ou différens. Dans le premier cas, il y a égalité entre les produits qui repréſentent leurs ſurfaces. Ainſi le produit de la baſe du premier multipliée par ſa hauteur, eſt égal au produit de la baſe du ſecond multipliée par ſa hauteur; & de ces deux produits, on peut par conſéquent conclure une proportion, en regardant les deux facteurs du premier, comme les extrêmes, de cette proportion dont les moyens ſeroient les deux facteurs du ſecond. On peut donc dire que les baſes de ces deux triangles ſont en raiſon inverſe de leurs hauteurs.

Remarquons que ſi deux paralélogrammes ſont égaux en ſurface, on peut établir les mêmes rapports par les même raiſons. Ainſi leurs baſes ſont, dans ce cas, en raiſon inverſe de leurs hauteurs.

Si deux triangles ont une même hauteur, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les baſes. Car on peut faire cette proportion (en repréſentant par *abc* & *edf* [fig. 21] les ſurfaces de deux triangles dont les hauteurs ſont *ao*, *ei*, & les baſes *bc*, *df*), *abc*:*edf*::*bc*.*ao*:*df*.*ei*; mais les lignes *ao* & *ei* ſont ſuppoſées égales; & comme le ſecond rapport de cette proportion ne peut pas changer, lorſqu'on diviſe ſes deux termes par la même quantité *ao* ou *ei*; comme d'ailleurs le quotient de la diviſion d'un produit par l'un de ſes deux facteurs eſt l'autre facteur; on peut donc faire cette nouvelle proportion, *abc*:*edf*::*bc*:*df*. Deux triangles de même hauteur ont donc des ſurfaces qui ſont entr'elles comme leurs baſes. S'ils étoient ſuppoſés avoir des baſes égales, on démontreroit de même que leurs ſurfaces ſont entr'elles comme leurs hauteurs: & ce qui vient d'être dit pour les triangles, s'applique complettement à deux

parallélogrammes qui ſont ſuppoſés avoir, ou des baſes égales, ou une même hauteur.

133. Si deux triangles ſont ſemblables, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues. Car ſoient repréſentés par *abc* & *edf*, de tels triangles: leurs ſurfaces en général ſont entr'elles comme les produits de leur baſe par leur hauteur. On a donc cette proportion fondamentale, $abc:edf::bc.ao:df.ei$. Mais la ſimilitude, & des triangles comparés, & de ceux qui ſont formés par les hauteurs *ao* & *ei*, rend leurs côtés homologues proportionnels: on peut donc dire, $ao:ei::ab:ed::bc:df$; ou ſeulement $ao:ei::bc:df$, ou enfin $ao:bc::ei:df$. Comme un rapport ne change pas en multipliant ſes deux termes par une même quantité. Suppoſons les termes du premier rapport multipliés par *bc*, & les deux termes du ſecond par *df*; alors on peut mettre ces produits en proportion, & dire $ao.bc:ei.df::bc^2:df^2$. Comparant enfin cette derniere avec la proportion fondamentale, on en conclura celle-ci, $abc:edf::bc^2:df^2$ (à cauſe du rapport commun des produits *ao.bc* & *ei.df*.) Les ſurfaces des triangles ſemblables ſont donc entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues.

Celles de deux parallelogrammes, ainſi que de deux polygones quelconques, qui ſont ſemblables, ont auſſi un rapport égal à celui des quarrés de leurs côtés homologues. Car ſuppoſons qu'on ait partagé en triangles par des diagonales tirées d'un des angles aux autres angles, des polygones qu'on peut repréſenter par *bcdea* & *fghilf* (fig. 19). Ces triangles comparés deux à deux ont des ſurfaces qui ſont entr'elles comme les quarrés de deux côtés homologues de ces polygones. On peut dire par conſéquent, que chaque triangle de *bcdea* eſt à ſon correſpondant dans le polygone *ghilf*, comme un de ces triangles eſt à ſon correſpondant. Dans une telle ſuite de rapports égaux, on peut dire auſſi, la ſomme des ſurfaces de tous les triangles du premier polygone, ou la ſurface de celui-ci, eſt à la ſurface du ſecond, comme un triangle du premier eſt à ſon correſpondant dans le ſecond; ou comme le quarré

d'un côté du premier, eſt au quarré du côté homologue du ſecond polygone. Les ſurfaces des polygones qui ſont ſemblables, ſont donc entr'elles comme les quarrés des côtés homologues.

Deux cercles, qui ſont des figures ſemblables, doivent donc avoir des ſurfaces qui ſont entr'elles dans le rapport des quarrés des rayons ou des diametres; & on doit en dire autant de deux ſecteurs, ou de deux ſegmens, qui ont pour baſe des arcs d'un même nombre de dégrés.

C'eſt de ces propoſitions qu'on pourroit encore conclure la propriété déjà prouvée des triangles rectangles; ſavoir, que le quarré de leur hypothénuſe eſt égal à la ſomme des quarrés des deux côtés de leur angle droit. Car ſoit *bac* (fig. 21) un triangle dont l'angle *bac*, eſt de 90 dégrés; & ſoit abaiſſée de *a*, ſur l'hypothénuſe *bc*, la perpendiculaire *ao*, qui eſt en même tems la hauteur commune des trois triangles rectangles *abc*, *abo*, *aoc*; tandis qu'ils ont pour baſe, le premier *bc*, le ſecond *bo*, & le troiſieme *oc*. Sous ce rapport, les ſurfaces de ces triangles ſont entrelles comme les baſes; & comme d'ailleurs ces figures ſont ſemblables, elles ſont auſſi comme les quarrés de leurs hypothénuſes. C'eſt pourquoi, à cauſe du rapport des ſurfaces qui eſt commun à ces deux proportions indiquées, on peut dire, que les quarrés des hypothénuſes de ces triangles ſont entr'eux comme leurs baſes, ou $ab^2:bo::ac^2:oc$. on en conclut que $ab^2+ac^2:bo+oc$ ou $bc::ab^2:bo$; mais comme on peut dire auſſi que $ab^2:bo::bc^2:bc$, il en réſulte que $ab^2+ac^2:bc::bc^2:bc$: proportion qui par l'identité de ſes conſéquens, démontre l'égalité de ſes antécédens; c'eſt-à-dire que le quarré de l'hypothénuſe d'un triangle rectangle *abc*, eſt égal à la ſomme des quarrés des côtés de l'angle droit.

Si un triangle rectangle, tel que *adc* (fig. 29), eſt conſidéré, comme on peut toujours le faire, dans un cercle dont le diametre eſt ſon hypothénuſe; alors les côtés de l'angle droit *ad* & *dc*, deviennent deux cordes; & par conſéquent, les quarrés de ces cordes qui paſſent par les extrémités d'un diametre, tel que *ac*, ſont en-

tr'eux comme les ſegmens de ce diametre, qui leur correſpondent, & qui ſont formés par des perpendiculaires abaiſſées des extrémités de ces cordes, ſur le même diametre. Un ſemblable rapport a lieu entre les quarrés de deux cordes qui dans un cercle, ſont menées d'une même extrémité d'un de ſes diametres. En effet, ſoient les cordes *ao* & *ad*; & ſoient abaiſſées, des extrémités *o* & *d*, ſur le diametre *ac*, deux perpendiculaires *oe* & *db*; ces cordes deviennent les côtés d'un angle droit dans deux triangles rectangles, en menant les lignes *oc*, & *dc*: ainſi on peut dire (conſéquemment à ce qui vient d'être démontré) dans le premier triangle *aoc*, $ao^2:ae::ac^2:ac$; & dans le 2.ᵉ *adc*, $ad^2:ab::ae^2:ac$: d'où on conclut que $ao^2:ad^2::ae:ab$; c'eſt-à-dire que les quarrés de deux cordes, qui, dans un cercle, partent des extrémités d'un même diametre, ſont entr'eux comme les ſegmens correſpondans de ce diametre ſur lequel des perpendiculaires ſont abaiſſées des extrémités des cordes.

134. On peut faire dans la marine pluſieurs applications des réſultats qui précédent. Les voiles des vaiſſeaux, par exemple, ſont, ou des triangles, ou des trapezes, ou des quadrilateres. Celles qui ſont triangulaires, telles que les focs, & pluſieurs voiles d'étai, doivent donc être égales en ſurfaces, ou lorſque leurs côtés ſont égaux, ou lorſqu'elles ont même chute & même bordure, ou lorſque leurs bordures ſont en raiſon inverſe de leur chute. Si, telles que les voiles qu'on nomme quarrées, elles ont la forme de trapezes, leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les produits de leur chute, par la ſomme de l'envergure & de la bordure; de ſorte que lorſque leur chute eſt la même, leurs ſurfaces ſuivent le rapport des ſommes de l'envergure & de la bordure de chacune. Si les formes des voiles comparées ſont ſemblables, leurs ſurfaces ſont entre elles comme les quarrés de leurs côtés homologues; & par conſéquent comme ceux de leur chute ou de leur bordure, &c.

Le rapport de la ſurface du gouvernail d'un vaiſſeau, à celle du gouvernail d'un autre vaiſſeau, eſt fondé

fondé sur les mêmes bases & exprimé de la même maniere; puisque (fig. 35. G), dans un gouvernail *eubdca*, qui est attaché à un vaisseau flottant, la partie *abdc*, qui seule est plongée dans l'eau, peut être considérée comme ayant pour face un trapeze, dont la hauteur est *bd*. Ainsi les tirans d'eau de deux vaisseaux étant les mêmes, les surfaces de leur gouvernail sont entre elles comme les sommes des deux largeurs, mesurées au niveau, de l'eau & de la quille. Si ces machines ont des faces semblables, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs côtés homologues, ou des tirans d'eau des vaisseaux.

C'est ainsi qu'on peut calculer le rapport des surfaces, ou des pales B de deux avirons (fig. 74. G), ou de celles de deux pagaïes (fig. 76. G), ou des pattes R & B de deux ancres (fig. 80. G).

Si une ligne d'eau, telle que *abde* (fig. 24. G), est semblable à une autre section horisontale d'un vaisseau, leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs longueurs, telles que *ad*, ou de leurs largeurs principales, telles que *bce*. Si deux couples, tels que *bme* & *tnr* (fig. 22 & 23. G) sont semblables; on peut dire que leurs surfaces sont entr'elles comme les quarrés de leurs largeurs principales *be* & *tr*, ou de leurs creux *cm* & *en*. Ces principes fournissent donc des moyens de comparer des figures données, & de conclure aisément les rapports de leurs surfaces.

135. Il peut être question, dans certaines circonstances, de construire une figure qui soit semblable à une autre figure connue; en supposant d'ailleurs un rapport déterminé entre les surfaces de l'une & de l'autre. Ainsi il est à propos d'indiquer comment on doit s'y prendre pour trouver la figure demandée. Soit proposé, par exemple, de faire une voile qui ne présente que les trois quarts de la surface d'une autre voile donnée, & qui soit d'ailleurs semblable à celle-ci. Nous avons vu (116) qu'il est toujours facile de tracer le contour d'un polygone qui doit être semblable à un autre connu, lorsqu'on sait quelles sont & la longueur & la position d'un des côtés du polygone cherché. Ainsi la

ſolution de la queſtion propoſée exige ſeulement de déterminer la grandeur, par exemple, de l'envergure de la voile dont on demande la figure. Cette voile & celle à laquelle elle eſt comparée ſont entr'elles, d'aprés les conditions énoncées dans la queſtion, & comme les quarrés de leurs côtés homologues, & comme 3 eſt à 4. C'eſt pourquoi le rapport de 3 à 4 eſt égal à celui des quarrés des envergures de ces deux voiles. Soit *acdb* (fig. 42) la forme de la voile connue, & nommons x l'envergure cherchée : on doit faire cette proportion (B) $4:3::cd^2:x^2$. On voit que ce 4.e terme ou le quarré de l'envergure de la nouvelle voile, peut être calculé arithmétiquement. Il faut, à cet effet, élé-ver au quarré la longueur de l'envergure *cd* (eſtimée en toiſes ou pieds), & multiplier ce quarré par $\frac{3}{4}$, alors la racine quarrée du réſultat eſt la longueur de l'envergure demandée. Mais cette recherche du même objet peut être faite géométriquement, à l'aide des propoſitions précédentes, & le procédé eſt utile à connoître. Soient portées ſur une ligne indéfinie (fig. 29) ſept ouvertures égales de compas, & ſoit *ae* la ſomme de leurs longueurs ; de maniere que dans *ae*, il y ait quatre de ces parties égales, & trois dans *ec*. Soit décrite ſur cette ligne *ac*, comme diametre, une demi-circonférence ; Soient menées deux cordes, des deux extrémités du diametre, à l'extrémité *o* d'une perpendiculaire élevée ſur *ac*, au point de ſéparation des deux parties *ae* & *ec*. ſi enſuite on porte ſur *ao* (à compter du point *o*) la longueur de l'envergure *cd* de la voile donnée, & que par le point *t* ſon extrémité, on tire une ligne *ti* parallele au diametre *ac* ; cette parallele doit couper ſur la ſeconde corde *oc*, une partie *oi*, dont la longueur eſt celle d'une voile qui doit être ſemblable, à la voile dont l'envergure eſt égale à *ot*, & qui doit n'avoir que les $\frac{3}{4}$ de la ſurface de celle-ci. En effet, les cordes *ao* & *oc* ſont, à cauſe des paralleles, proportionnelles aux parties *ot* & *oi* ; c'eſt-à-dire qu'on peut faire cette proportion, $oa:oc::ot:oi$; & en prenant les quarrés de ces termes, $oa^2:oc^2::ot^2:oi^2$. mais il eſt démontré, par la conſtruction & par les démonſtrations

antérieures, que $oa^2:oc^2::ae:ec::4:3$: donc auſſi on peut dire $4:3::ot^2:oi^2$. Ainſi comparant cette derniere proportion avec celle (B) qui a été démontrée devoir donner la longueur de l'envergure cherchée ; on conclut de l'identité des trois premiers termes, l'égalité des quatriemes ; c'eſt-à-dire que la partie *oi* de la corde *oc* eſt réellement la longueur de l'envergure cherchée. Si on propoſe enſuite de tracer, d'après cette nouvelle envergure, la figure de la voile demandée ; on porte la grandeur de *oi* ſur *cd* (fig. 42). Soit cette longueur *ci*, & ſoit menée, du point *c*, une diagonale *cb* ſur la ſurface de la voile donnée. Soient auſſi tirées, par le point *i*, une parallele à *db*, & par le point *b* (où la précédente rencontre la diagonale *cb*), une parallele à la bordure *ab* : la figure ainſi formée eſt celle d'une voile telle, que ſa ſurface eſt les trois quarts de celle de la voile *cdba*, à laquelle elle eſt d'ailleurs ſemblable. ces rapports indiqués ſont faciles à vérifier. Car d'après la conſtruction, les triangles formés dans ces voiles ſont ſemblables, & par conſéquent ces voiles ſont ſemblables. Enſuite leurs ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs envergures ; & ces quarrés ont été faits dans le rapport de 4 à 3 : donc toutes les conditions de la queſtion ſe trouvent parfaitement remplies par une telle conſtruction.

On pourroit varier de tels problêmes ; & les procédés à ſuivre pour les reſoudre, reſteroient toujours les mêmes.

136. Lorſqu'on ſe propoſe de calculer la ſurface d'un cercle dont le diametre eſt donné, on peut le faire directement, en cherchant la grandeur de ſa circonférence (115), & en la multipliant par le quart de ſon diametre. Mais on peut auſſi la déterminer, par les rapports indiqués ; c'eſt-à-dire, en la comparant à la ſurface d'un cercle qui ayant 7 pieds de diametre, a 22 pieds de circonférence, & en établiſſant, par une proportion, que ces ſurfaces ſont entr'elles comme les quarrés de leurs diametres. Si, par exemple, on demande quelle eſt la ſurface de la bouche d'un canon, dont le diametre eſt de 6 pouces. On ſait que le cercle qui a 7 pieds de diametre & 22 pieds de circonférence,

doit avoir ($22.\frac{7}{4}$) pieds de ſurface ; & le rapport ſimplifié, de cette ſurface au quarré de ſon diametre, eſt celui de 11 à 14 : on doit donc, pour ſatisfaire à la queſtion propoſée, faire cette proportion, $11:14::36:x$ (parce que le quarré de 6 pouces eſt de 36 pouces quarrés). La ſurface cherchée du cercle propoſé, qui eſt le quatrieme terme (ſeul inconnu dans cette proportion), eſt donc de $28\frac{2}{7}$ pouces, & telle eſt la grandeur de la bouche du canon déſigné.

Si on demande la ſurface d'un ſecteur pris dans le même cercle, & en ſuppoſant que l'arc qui lui ſert de baſe eſt de 45 dégrés, on doit la chercher en conſidérant que le rapport de cette ſurface à celle du cercle entier, eſt celui de 45 à 360, ou de 1 à 8. Le calcul le donneroit ainſi de $3\frac{15}{28}$ pouces. Mais il eſt à-propos de préſenter un autre moyen de déterminer cette étendue, en la regardant comme le produit de la longueur de l'arc qui lui ſert de baſe, multipliée par le quart du diametre. La longueur de cet arc eſt proportionnée à celle de la circonférence entiere, & on trouve cette derniere par l'égalité du rapport de deux circonférences à celui de leurs diametres, ou en diſant, $7:22::6:x$. Ainſi la circonférence cherchée, qui eſt ici repréſentée par x, a en longueur $\frac{132}{7}$ pouces. Telle eſt donc la longueur des 360 dégrés ; & on en conclut celle de 45 dégrés, par cette proportion, $360:45::\frac{132}{7}:y$. La longueur de l'arc de 45 dégrés dans cette circonférence, & qui eſt repréſentée par y, eſt donc de $\frac{132}{56}$ de pouces ; & en la multipliant par $\frac{6}{4}$ ou $\frac{3}{2}$ pouces, on trouve que la ſurface du ſecteur propoſée eſt, comme précédemment, de 3 pouces $\frac{15}{28}$.

Les ſurfaces des figures planes ne peuvent pas être toujours déterminées, ou par des calculs auſſi faciles, ou à l'aide de certains rapports ſimples, tels que ceux qui viennent d'être employés : & pour prévoir tous les cas, nous allons faire connoître comment on calcule ces ſurfaces, par des combinaiſons directes de leurs dimenſions, conformément aux principes expoſés précédemment.

Soit propoſé, par exemple, de déterminer la ſurface

d'une voile telle qu'un hunier *cdab* (fig. 42) qu'on doit considérer comme un trapeze. Soit supposé que sa chute ou sa hauteur est de 9 toises 4 pieds 5 pouces, & la somme de son envergure & de sa bordure, de 23 tois. 5 pieds 2 pouces, alors sa surface est égale au produit de 11 toises 5 pieds 7 pouces, par 9 toises 4 pieds 5 pouces (on prend ici la toise pour l'unité de mesure de la longueur des lignes, & la toise quarrée pour l'unité de mesure des surfaces). Cette multiplication peut être faite par le procédé qui a été indiqué pour celle des nombres complexes ; mais un tel calcul ne se rapporte pas assez à l'esprit & à l'intention des démonstrations précedentes. En effet nous avons vu que la surface d'un parallélogramme rectangle n'est autre chose que la répétition d'une surface ou d'une tranche (fig. 40) [qui a pour hauteur l'unité de mesure], prise autant de fois qu'il y a de tranches ; ainsi la surface d'une figure quelconque ne peut être aussi que la répétiton d'une surface déterminée & connue. C'est pourquoi, considérons la surface cherchée du hunier proposé, comme celle d'un parallélogramme qui auroit pour base 11 toises 5 pieds 7 pouces, & pour hauteur 9 toises 4 pieds 5 pouces, & qui par conséquent doit contenir dans sa surface un parallélogramme de 11 tois. 5 pieds 7 pouces de base & 1 toise de hauteur, autant de fois qu'il y a d'unités dans le multiplicateur 9 tois. 4 pieds 5 pouces.

On pourroit comparer aussi cette surface cherchée à celle d'un parallélogramme qui auroit la même base & une toise de hauteur. Ces deux surfaces sont entr'elles comme leurs hauteurs : on peut donc faire cette proportion, la surface cherchée ou x : (11 t. 5 p. 7 p.) . 1 toise :: 9 tois. 4 pieds 5 pouces : 1 toise ; c'est-à-dire que pour calculer cette surface, il faut répéter la surface d'un parallélogramme qui a 11 tois. 5 pieds 7 pouces de base sur une toise de hauteur, autant de fois qu'il y a d'unités dans 9 toises 4 pieds 5 pouces, & cette derniere dimension faisant fonction de multiplicateur, est regardée comme un nombre abstrait. Ces deux manieres d'envisager le même objet, indiquent donc le même

procédé à ſuivre pour parvenir à trouver la ſurface demandée; & il en réſulte qu'il faut multiplier 11 toiſes 33 pieds 72 pouces (ou la ſurface d'un parallélogramme qui a une toiſe de hauteur ſur 11 toiſes 5 pieds 7 pouc. de baſe), par 9 toiſ. 4 pieds 5 pouc. Cette multiplication doit être faite ſuivant les regles ordinaires de la multiplication des nombres complexes, par parties aliquotes; mais il faut, dans l'exécution, avoir toujours préſentes quelques valeurs relatives, ſoit des unités & de ſes parties, ſoit de certains produits dont la connoiſſance facilite les opérations. Il faut ſavoir que la toiſe quarrée étant un parallélogramme rectangle de 6 pieds de hauteur, ſur 6 pieds de baſe, a 36 pieds de ſurface; que le pied quarré vaut, par une raiſon ſemblable, 144 pouces quarrés; que le produit d'une toiſe par un pied, ou que la ſurface d'un parallélogramme qui a une toiſe de hauteur, ſur un pied de baſe, eſt de 6 ppi.; que le produit d'une toiſe par un pouce doit être douze fois plus petit que celui qui exprime la ſurface du précédent parallélogramme, & que par conſéquent il vaut un demi-pied quarré, ou 72 po. quarrés, &c.

Après ces préliminaires, voici les détails généraux de la mutiplication propoſée. Le multiplicande doit être 11 tt 33 pp 72 ppo, & le multiplicateur 9 t 4 p 5 p Ces deux facteurs étant écrits, le premier au-deſſus du ſecond, on commence par répéter 11 tt neuf fois, & le produit eſt 99 tt. Comme une toiſe quarrée répétée neuf fois, donne un produit de 9 tt, la partie aliquote 18 ppi. étant multipliée par 9, doit être la moitié de ce produit, c'eſt-à-dire 4 tt 18 ppi. on trouveroit ainſi le réſultat de la multiplication par 9, & des autres pieds quarrés, & des 72 ppo. du multiplicande. Après ces premieres opérations, le

11^{tt}	33^{ppi}	72^{ppo}
9to	4^{pi}	5^{po}
99^{tt}	0^{ppi}	0^{ppo}
4	18	
3	0	
0	27	
0	4	72
5	34	108
1	35	84
0	23	124
0	5	139
116^{tt}	5^{ppi}	95^{ppo}

le multiplicande entier doit être multiplié d'abord par la partie 3 pi. du multiplicateur; & il en doit résulter un produit qui est la moitié du multiplicande, puisque le produit de celui-ci multiplié par une toise, ou répété une fois, ne peut pas différer du multiplicande même. Ensuite le multiplicateur étant un pied, le produit doit être le tiers du précédent qu'on vient d'indiquer, & ainsi de suite. Par ce moyen, ou plutôt par ces raisonnemens, on parvient, en ajoutant les produits partiels, ou les toises quarrées, les pieds & les pouces quarrés qui les composent, à obtenir pour produit total 116 tt. 5 ppi. 95 ppo.

Il peut quelque fois être proposé, (étant données, par exemple, l'envergure & la bordure d'un hunier, ainsi que sa surface totale); de déterminer la chute qu'une telle voile doit avoir; & il faut indiquer les regles qu'on doit suivre pour connoître cette dimension. Soit cette surface donnée de 116 tt. 5 ppi. 95 ppo. Elle est le produit de deux facteurs; & sans doute il faut la diviser par l'un des deux pour obtenir l'autre au quotient. Mais quel doit être ce facteur? On sait qu'une surface, telle que le dividende supposé, ne peut contenir qu'une autre surface; ainsi, dans la division indiquée, le diviseur ne peut être qu'une surface: & elle est facile à assigner, puisque la surface proposée n'est que la répétition de celle d'un parallélogramme dont la hauteur est d'une toise, & dont la base est égale à la demi-somme de l'envergure & de la bordure de la voile proposée. (Cette demi-somme est dans cette question, de 11 toif. 5 pieds 7 pouc.). Ce raisonnement est encore confirmé dans son résultat, par celui d'un autre principe. On sait que les parallélogrammes de même base ont des surfaces qui sont entr'elles comme leur hauteur: ainsi, comparant la surface proposée (qu'on peut regarder comme celle d'un parallélogramme qui a pour base 11 t. 5 pi. 7 po. & une hauteur cherchée), à la surface d'un autre parallélogramme qui a la même base & une toise pour hauteur: on doit faire cette proportion, 11 tt. 33 ppi. 72 ppo : 116 tt. 5 ppi. 95 ppo. :: 1 : x. (le premier terme exprime la surface d'un parallélogramme qui a une toise

de hauteur, sur 11 t. 5 pi. 7 pouces de base). Le 4.e terme de cette proportion, qui est la dimension cherchée, est donc, comme on l'a dit auparavant, le quotient de la division de la surface donnée, par celle que nous avons indiquée. Cette opération est facile à faire en reduisant le dividende & le diviseur en pouces quarrés, & en se conformant aux regles ordinaires de la division. le resultat est 9 t. 4 pi. 5 po.; c'est-à-dire que la chute d'un tel hunier proposé doit avoir cette longueur. Ce qui se trouve d'accord avec les calculs précédens.

On pourroit cependant parvenir au même résultat, en divisant une ligne seulement par une ligne, au-lieu de diviser, comme on vient de le faire, une surface par une surface. Car les deux termes du premier rapport de la proportion précédente, peuvent être regardés l'un & l'autre comme exprimant les surfaces de deux parallélogrammes, qui auroient, l'un 11 toises 5 pieds 7 pouces de base, sur une toise de hauteur, & l'autre la même hauteur, sur une base de 116 toises 0 pieds $11\frac{23}{71}$ pouces. D'après une telle considération, si on substitue à la place de ce premier rapport, celui des surfaces des deux parallélogrammes qui ont tous deux une même hauteur d'une toise; ou celui de leurs bases, qui est un rapport équivalent, la premiere proportion se change en celle-ci, 11 tois. 5 pieds 7 pouces : 116 tois. 0 pieds $11\frac{23}{72}$ pouces :: 1 : x. On doit donc trouver x, ou la chute cherchée du hunier, en regardant la surface donnée, comme celle d'un parallélogramme, qui n'a qu'une toise de hauteur; & en divisant la base que doit avoir un tel parallélogramme, par la dimension donnée de la voile proposée. Le quotient est alors, comme précédemment, 9 t. 4 pi. 5 po.

ARTICLE TROISIEME.

Des solides.

137. Tous les corps que présente la nature sont autant de solides ; parce que le lieu qu'ils occupent dans l'univers est étendu dans tous les sens. Leur forme est prononcée par des faces planes ou courbes, qui embrassent plus ou moins de surface, & cette portion de l'espace qui est comprise & terminée par ces faces est nommée leur solidité.

Jusqu'ici nous avons considéré, comme séparés, détachés, isolés des corps, & les lignes qui forment leurs arrêtes ou leurs dimensions ; & les faces qui circonscrivent leur grandeur ; & les plans de ces faces ; ainsi que ceux de toutes les sections qu'on peut imaginer dans ces corps. Les surfaces ont été aussi supposées sans épaisseur : on n'a vu dans les lignes que leur longueur ; & les points ont été imaginés sans étendue. C'est dans cet état idéal, qu'on a mesuré, soit des lignes droites & circulaires, soit des surfaces, soit des angles plans & rectilignes ; & qu'on a déterminé leurs rapports généraux ou particuliers. Ainsi tous les objets des démonstrations qui ont été présentées depuis le commencement de ce traité de géométrie, n'ont pas été envisagés dans l'ordre naturel des choses, mais dans un ordre absolument imaginaire. Actuellement il convient de sortir de cette sphere de fictions, pour entrer dans celle du monde physique ; mais il faut apporter dans celle-ci, toutes les lumieres qui peuvent avoir été acquises par les premieres recherches, qui d'ailleurs n'ont été faites que parce qu'elles s'appliquent & entièrement & immédiatement aux formes de tous les corps connus.

Déja nous avons annoncé (90) quels sont les solides qui sont directement des objets de la géométrie élémentaire. Nous avons cité, les prismes, les pyramides, les cylindres, les cônes, les spheres. C'est donc à ces corps qu'il faut d'abord faire l'application de toutes les pro-

positions précédentes, & il faut démontrer aussi l'extension de cette application à tout autre solide.

Les arrêtes rectilignes & les dimensions des corps, peuvent être mesurées, comme on l'a dit de toutes les lignes droites (93), en les considérant comme étendues & appliquées sur des plans, qu'on imagine, ou sur le contour, ou dans l'intérieur de ces corps. C'est ainsi que, dans une pyramide *adbc* [fig. 5] (& qui est nommée triangulaire, parce que sa base *dbc* est un triangle), si on abaisse du sommet *a*, une perpendiculaire *au* sur le plan de sa base; cette ligne *au*, qui est nommée la hauteur de cette pyramide, peut être supposée & mesurée dans un plan quelconque qui passe par cette même ligne. On doit en dire de même, & des arrêtes *ad*, *ab*, *ac*, qui sont les intersections communes des faces planes de cette pyramide; & des côtés quelconques de la base *bdc*; & de toutes les lignes droites qu'on peut imaginer ou qui sont visibles, dans les prismes ainsi que dans tous les corps naturels.

L'application de ce qui a été dit sur les circonférences des cercles doit aussi être faite dans toute son étendue, aux bases, des cylindres (fig. 4), & des cônes (fig. 6), ainsi que toutes les sections circulaires qu'on peut supposer faites dans des spheres (fig. 7). Quelles que soient enfin les lignes droites, menées dans un espace occupé par des corps, on peut toujours les considérer & les comparer successivement deux à deux, dans un même plan; alors la forme de calcul, indiquée précédemment, doit être adoptée pour déterminer, & les angles, & les côtés ou les contours, soit des triangles, soit des polygones de toute sorte, qui dans les corps sont tracés, sur leurs surfaces planes, ou sur les plans de certaines sections supposées. Les angles que des faces planes ou des sections diverses des corps peuvent faire entr'elles, sont soumis aussi aux mêmes mesures que les angles plans dont on a appris à estimer la grandeur; & comme ceux-ci, ils trouvent leurs mesures dans celles de certains angles rectilignes.

138. *Surfaces des solides.* La surface d'un corps est la somme des surfaces de ses faces; comme le contour

d'un polygone eſt la ſomme des côtés qui le terminent. Ces faces peuvent être planes ou courbes. Les ſurfaces des premieres doivent être meſurées comme celles des polygones; & les cercles, par des conſidérations particulieres, ayant été compris dans la claſſe générale des polygones rectilignes, on peut en conclure des préceptes, ſur les meſures des ſurfaces courbes des corps, tels que des cônes, des cylindres & des ſpheres, puiſque, par leur forme, ils préſentent des analogies avec la figure circulaire.

Soit une pyramide quelconque *adbc* (fig. 5). Sa ſurface eſt compoſée de celles de toutes ſes faces triangulaires (car on eſt convenu de ne pas compter l'étendue de la baſe *bdc* comme une portion de cette ſurface). La baſe peut être un polygone quelconque, & le nombre de ſes côtés eſt celui des faces latérales de la pyramide. Lorſqu'une perpendiculaire *au* eſt abaiſſée du ſommet *a* ſur le plan de la baſe *bdc*, pour repréſenter la hauteur de cette pyramide, & lorſque cette ligne *au* paſſe par le centre de la baſe, dans le cas où cette baſe eſt un polygone regulier; une telle pyramide eſt diſtinguée ſous le titre de pyramide droite & réguliere. Ses faces, ainſi que ſes arrêtes, ſont alors parfaitement égales; mais il n'en eſt pas de même, ſi la baſe n'eſt pas un polygone regulier, ou ſi la hauteur de la pyramide ne paſſe pas par le centre de ſa baſe ſuppoſée reguliere; alors la pyramide eſt nommée irréguliere.

On obtient la ſurface de cette derniere, en prénant ſéparément celle de chacune de ſes faces, & en les ajoutant toutes enſemble. La ſurface de la face *abc* eſt le produit du côté *bc* de la baſe de la pyramide, multiplié par la moitié de la hauteur *az* de cette face. (cette ligne *az* eſt abaiſſée perpendiculairement du ſommet *a* de la pyramide, ſur le côté *bc* de la baſe). Si on prend ainſi ſucceſſivement le produit de chaque côté de la baſe de cette pyramide, par la demi-hauteur de la face correſpondante; la ſomme de ces produits doit exprimer la ſurface entiere de la pyramide ſuppoſée irréguliere. dans le cas où elle ſeroit réguliere, ſa ſurface ſeroit plus facile, ſoit à meſurer, ſoit à exprimer: car

alors la hauteur de chaque face est nécessairement une même ligne, telle que *az*. Ainsi la somme des surfaces de toutes les faces, est égale au produit du contour de la base, multiplié par la moitié de la hauteur d'une des faces.

Si une pyramide est tronquée parallélement à sa base, ou si d'une pyramide entiere *adbc*, on a soustrait une partie pyramidale *ariq*, dont la base particuliere *riq* est parallele à *dbc*; la surface de ce tronc *rdbcqi*, est composée de celle, de toutes ses faces qui sont devenues autant de trapezes. Lorsqu'un tel tronc appartient à une pyramide droite & reguliere, sa surface est alors égale au produit de la longueur *iz* (hauteur d'une des faces), multipliée par la demi-somme des contours des deux bases paralleles *riq* & *dbc*. Mais la pyramide *abcd* n'étant pas reguliere, alors on doit mesurer séparément la surface de chacune de ses faces, & on les réunit en une même somme, pour composer la surface totale du tronc supposé.

Enfin lorsque la base supérieure *riq* n'est pas parallele à la base inférieure *bcd*, les faces du tronc, ne sont plus que des quadrilateres irréguliers; & la surface du tronc est l'assemblage des surfaces, de toutes ces figures qu'on mesure comme celle d'un polygone quelconque.

139. Nous avons déjà remarqué qu'une pyramide a toujours autant de faces que sa base a de côtés: ainsi en supposant que cette base soit un polygone regulier d'une infinité de côtés, elle devient un cercle; & la pyramide reçoit alors le nom de cône. Ce cône est droit, si sa hauteur *ao* (fig. 6) passe par le centre *o* du cercle qui lui sert de base; & sa surface, mesurée comme celle d'une pyramide droite & reguliere, est égale au produit de la circonférence de sa base, par la moitié du côté *ab*. Ce cône est oblique, lorsque sa hauteur *au* ne passe pas par le centre de sa base. Dans ce cas, il faut, pour obtenir sa surface, décomposer le contour *cdbe* de sa base, en petites lignes droites élémentaires infiniment petites. Alors on mesure separément tous les triangles dont la base est un de ces élémens, & dont le sommet est au point *a*, pour former

par leur réunion la ſurface entiere d'un tel cône. Un cône droit *acb* eſt-il tronqué parallélement à ſa baſe? la ſurface du tronc *kcdblu* eſt égale au produit du côté *lb*, multiplié par la moitié des circonférences des deux baſes *kul* & *cdb*; ou ce qui revient au même, par la circonférence *fei*, qui tient le milieu entre les deux baſes paralleles de ce tronc de cône.

140. Soit un priſme dont on ſe propoſe de meſurer la ſurface. La forme d'un tel corps a été définie précédemment [90]; & il eſt droit ou oblique, ſuivant que ſes arrêtes, telles que *ab*, *fc*, *ed* [fig. 3], ſont ou perpendiculaires, ou obliques aux baſes paralleles *afe* & *bcd*. Sa ſurface eſt eſtimée par celle de toutes ſes faces latérales, qui ſont autant de parallélogrammes; c'eſt-à-dire, par la ſomme des produits de la baſe de chacun de ſes parallélogrammes, multipliée par leur hauteur. Ainſi ſuppoſons qu'il ſoit queſtion de meſurer la ſurface d'un priſme droit. Ses arrêtes, qui ſont perpendiculaires aux plans de ſes baſes, le ſont auſſi ſur les côtés de ces mêmes baſes: par conſéquent l'arrête *ab*, par ex., peut être priſe, pour la baſe particuliere d'une face, telle que *abcf*, & ſa hauteur eſt alors la ligne *bc*, qui eſt le côté d'une baſe de ce priſme droit. En raiſonnant de la même maniere ſur chaque face; & en remarquant qu'elles ont toutes une même baſe, qui eſt une des arrêtes du priſme; on conclut aiſément que la ſurface d'un priſme droit eſt égale au produit d'une de ſes arrêtes, multipliée par le contour d'une des baſes. Si un priſme eſt oblique, ou ſi ſes arrêtes ne ſont pas perpendiculaires ſur le plan de la baſe *bdc*; on peut ſuppoſer encore que chaque arrête ne ceſſe pas de ſervir de baſe à chaque face de ce priſme, & alors la recherche de la ſurface de ce ſolide exige que la hauteur de ces faces ſoit déſigné. C'eſt pourquoi on imagine dans ce cas, que ce priſme ſoit traverſé par un plan *onm*, auquel chaque arrête ſoit perpendiculaire. Par une telle conſtruction, l'interſection de ce plan avec celui de chaque face; ou chaque côté de la ſection *onm*, qui eſt néceſſairement perpendiculaire à chaque arrête correſpondante du priſme, repréſente la hauteur de chaque

face. La ſomme, des ſurfaces de ces parallélogrammes; qui ſont les faces du priſme oblique; ou la ſurface de ce priſme; eſt donc égale au produit d'une de ſes arrêtes, multipliée par la ſomme des hauteurs de ſes faces, ou par le contour d'une ſection, au plan de laquelle les arrêtes ſont perpendiculaires.

Telle eſt l'expreſſion de la ſurface d'un priſme quelconque: elle eſt indépendante du nombre de ſes arrêtes, ou de celui des côtés de ſa baſe. Ainſi, en ſuppoſant que le nombre de ces côtés ſoit infiniment grand, ou que ſa baſe ſoit un cercle qui eſt un polygone régulier d'une infinité de côtés, ce ſolide, dont la forme eſt celle d'un cylindre [fig. 4], a une ſurface qui eſt exprimée comme celle d'un prisme. Un cylindre eſt-il droit? ſa ſurface eſt égale au produit de la circonférence *nrpq* de ſa baſe par la longueur de ſon côté *on*. Mais eſt-il oblique? on doit imaginer une ſection *zx*, faite dans ce cylindre, de maniere que le côté *on* ſoit perpendiculaire à ſon plan; & la ſurface de ce ſolide eſt alors exprimée par le produit du contour de cette ſection *zx*, multiplié par le côté *on*.

141. L'expreſſion de la ſurface d'une ſphere peut être déterminée par les mêmes principes. Soit une ſphere NOSE [fig. 43], dont un diametre eſt NS, & dont C eſt le centre. Soit un de ſes grands cercles NOSE, qui peut être conſidéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, ou comme ayant une circonférence diviſée en un nombre infini de petites lignes droites élémentaires, & telles que *ac*. Soit auſſi *od*E un autre grand cercle, au plan duquel le cercle NOSE eſt ſuppoſé perpendiculaire. Si on imagine dans cette ſphere une infinité de ſections, qui, paralleles au plan *ode*, ſont dirigées par tous les points de diviſion, tels que *a*, *b* & *c* de la circonférence entiere NOSE; ces ſections ſont autant de cercles plus ou moins grands. car ſuppoſons que pour chaque point *u* du contour extérieur d'une de ces ſections, on ait formé un triangle rectangle *mcu*: de tels triangles ſont tous égaux, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés égaux. En effet, les lignes *uc* & *mc* ne changent pour

aucun des points de cette section ; & l'angle *mcu*, qui dans tous ces triangles a pour mesure un arc égal à *u*N, est constamment le même : par conséquent, la distance de chaque point du contour de la section supposée, à l'égard du point *m*, est égale à la ligne *um* ; ou, ce qui revient au même, tous les points du contour de cette section sont dans un même plan, & également éloignés d'un point *m* qui appartient à ce plan. Cette section est donc un cercle qui a pour centre le point *m*, & pour rayon la ligne *um*. On démontreroit de même que toutes les autres sections paralleles à *od*E sont autant de cercles ; & à cause de leurs situations respectives, nous les nommerons désormais des paralleles. Si la circonférence du cercle *od*E est aussi divisée en une infinité de parties égales, telles que *od* ; & si on imagine un autre grand cercle N*rzd*, dont le plan soit perpendiculaire à *od*E ; alors considérons l'espace *aczr*, qui est renfermé sur le contour de la sphere, entre les deux plans des cercles NDSC, NOSE, & entre deux arcs paralleles *ar* & *cz*. Comme l'arc *ac* peut être considéré comme une petite ligne droite, & qu'il en est de même des autres arcs *ar* & *cz* ; l'espace *arcz* a la forme d'un trapeze rectiligne. En menant parallélement, & à égale distance de ses deux bases *ar* & *cz*, le petit parallele *bu* ; il est démontré que sa surface est égale au produit de *bu*, multiplié par *rz* (131). On peut exprimer de la même maniere, les surfaces de tous les petits trapezes, qui, sur le contour de la sphere, sont compris entre les deux cercles paralleles qui passent par les points *a* & *c*, ou qui composent la surface d'une tranche de la sphere : La surface entiere d'une telle tranche est donc égale au produit de l'arc *rz*, multiplié par la circonférence, qui a pour rayon *um*. Cherchons maintenant une autre expression de cette même surface, ou un produit qui, équivalent à celui qui la représente, soit propre à indiquer des rapports généraux entre toutes les tranches qui composent la sphere. Imaginons que dans le plan N*rd*C, on mene une ligne *ri*, qui soit perpendiculaire à *zx*, après avoir tracé dans ce plan les lignes *uc* & *zx*. Alors les deux triangles *umc* & *rzi* sont semblables,

comme ayant leurs côtés perpendiculaires chacun à chacun : on peut donc faire cette proportion, *rz*:*ri*:: *uc*:*um*. On sait d'ailleurs que la circonférence dont *bu* est un arc, est à la circonférence *od*E, comme le rayon *um* de la premiere, est au rayon *dc* de la seconde, ou comme *ri*:*rz*; par conséquent, en égalant le produit des extrêmes de cette derniere proportion, au produit de ses deux moyens, on voit que le produit qui représente la surface de la tranche considérée, est le même que celui de *ri*, ou de la partie correspondante R*x* du diametre NS de la sphere, multipliée par la circonférence d'un grand cercle, tel que *ode*. La surface de la tranche infiniment mince qui est comprise entre les deux cercles paralleles dont *ar* & *cz* sont des arcs, est donc égale au produit de la circonférence d'un grand cercle multipliée par la partie du diametre qui est correspondante à cette tranche. La surface de toute autre tranche seroit, d'après un raisonnement semblable, représentée par un pareil produit : par conséquent la somme des surfaces de toutes les tranches de la sphere, ou celle de la sphere entiere, est égale à la circonférence d'un des grands cercles, multipliée par la somme de toutes les parties du diametre NS, ou par ce diametre total.

On est aussi autorisé à conclure que si une tranche plus ou moins épaisse de cette sphere, est comprise entre deux plans qui soient paralleles à celui du grand cercle *od*E, & si la partie du diametre (perpendiculaire à ce plan) qui lui correspond, est la ligne *ny*; sa surface est égale au produit de cette partie *ny*, multipliée par la circonférence d'un des grands cercles de la sphere.

De même la surface courbe d'un segment, ou d'une calotte sphérique, qui correspond à la partie NR du diametre NS, & qui est terminée par une section *ar*R parallele au plan *od*E, est égale au produit de la ligne NR, multipliée par la circonférence d'un grand cercle de la sphere.

142. *Rapports des surfaces des solides.* On ne peut comparer les surfaces des solides, que par celles de leurs faces; & comme déjà nous avons fait connoître

les rapports des surfaces des figures planes rectilignes & circulaires, il ne reste aucune démonstration à faire sur cet objet. Nous nous bornerons à faire remarquer quelques applications des résultats indiqués. 1° L'égalité des faces, dans deux prismes, ou dans deux pyramides, ou dans deux corps, entraine nécessairement celle de leurs surfaces. 2° Des prismes ont-ils des arrêtes égales? leurs surfaces sont entr'elles, comme les contours de leurs bases, s'ils sont droits; ou plus généralement, comme ceux des sections auxquelles leurs arrêtes sont perpendiculaires. 3° Des solides semblables sont ceux qui présentent un même nombre de faces semblables & semblablement placées. Ainsi d'après cette définition, les surfaces de ces solides doivent être entr'elles comme les surfaces des figures semblables; c'est-à-dire, comme les quarrés de leurs côtés homologues. Tels sont les rapports des surfaces, ou des voiles, ou des proues de vaisseaux, ou de leurs œuvres mortes, ou de leurs gréemens, ou des pattes de leurs ancres; lorsque tous ces objets, comparés séparément, ont des formes qui sont semblables.

Deux spheres, qui, sans doute, sont des corps semblables, ont des surfaces, dont le rapport est égal à celui des quarrés de leurs rayons, ou de leurs diametres. On pourroit même démontrer directement cette proposition. Car les surfaces de deux spheres sont entr'elles comme les produits qui les représentent; or soient A & B les circonférences des grands cercles de ces spheres, & soient D & F leurs diametres: on a la proportion A:D::B:F, de laquelle on peut passer à celle-ci (par une multiplication convenable) $AD:D^2::BF:F^2$, ou $AD:BF::D^2:F^2$. Les produits AD & BF, qui représentent généralement les surfaces des deux spheres, ou ces surfaces elles-mêmes, sont donc dans un rapport qui est égal à celui des quarrés des diametres.

C'est ici le lieu de remarquer que ce dernier rapport peut servir à calculer la surface d'une sphere dont on connoît le diametre; & réciproquement On en donnera plus bas un exemple. On doit dire aussi que la surface

de la ſphere eſt quadruple de celle d'un de ſes grands cercles ; parce que pour exprimer l'une de ces ſurfaces, il faut multiplier la circonf rence d'un grand cercle par ſon diametre entier ; tandis que l'autre eſt le produit de cette même circonférence par le quart de ſon diametre. Ajoutons enfin que la ſurface d'une ſphere eſt égale à celle d'un cylindre qui lui eſt circonſcrit ; ou qui a, pour baſe un grand cercle de la ſphere, & pour hauteur un des diametres de cette ſphere. Car la ſurface de ce cylindre, eſt, comme celle de la ſphere qui lui eſt inſcrite, égale au produit de la circonférence d'un grand cercle, multipliée par ſon diametre.

143. *Solidité des ſolides.* Il reſte actuellement à meſurer la grandeur de l'eſpace qui eſt compris entre les faces d'un corps. Cette ſolidité eſt exprimée par un nombre de petits ſolides, tels que A (fig. 14), qui peuvent être contenus entre les plans qui terminent un ſolide propoſé.

Lorſque nous avons parlé des ſurfaces planes, nous avons démontré que la meſure de la ſurface de toute ſorte de polygones, peut être conclue de celle d'un triangle quelconque. De même, étant connue la ſolidité d'une pyramide, celle de tout autre ſolide peut aiſément être déterminée. Car on peut imaginer que ceux-ci ſont compoſés de pyramides qui ſont formées par des plans menés dans l'intérieur de ces corps, par les ſommets des divers angles de leurs faces.

L'unité A qui eſt employée pour meſurer la ſolidité des corps, eſt un priſme droit & cubique. Sa hauteur *ab*, ainſi que la longueur *bc*, & la largeur *cd* de ſa baſe, ſont chacune égales à une unité dont la grandeur eſt ordinairement celle d'une toiſe, & ce priſme A porte alors le nom de toiſe cube.

Remarquons que la forme de pareils cubes ne permet pas de les arranger facilement dans l'intérieur d'une pyramide, & ſur-tout d'une maniere propre à démontrer avec évidence, quel eſt le nombre de ces cubes qui peuvent remplir exactement l'eſpace occupé par un tel ſolide. Un priſme droit eſt plus convenable pour une ſemblable démonſtration. C'eſt pourquoi, s'il eſt

possible d'établir un rapport général entre les solidités & d'un prisme & d'une pyramide, qui auroient l'une & l'autre même base & même hauteur; il suffira de connoître quelle est la mesure de la solidité d'un prisme, pour déterminer celle d'une pyramide, & par conséquent d'un solide quelconque.

Considérons, avant cette recherche, la pyramide *rkn mqi* (fig. 39) dans laquelle on suppose une section *aoudc*, qui est faite parallélement à la base *knmqi*. Nous avons vu que les figures, & d'un telle section, & de la base, sont semblables. Si on imagine que dans la même pyramide, on ait fait une infinité de sections paralleles à la base, & qui ne soient séparées les unes des autres, que par une distance infiniment petite, telle que l'épaisseur d'un point; ces nouvelles sections partagent cette pyramide en un même nombre de tranches solides, qui sont infiniment minces. Chacune de ces tranches doit paroître évidemment être composée d'autant de points solides, qu'il y a de points superficiels dans l'une de ses sections terminatrices: par conséquent, la somme des points solides qui sont contenus dans une de ses tranches, est à celle des points solides qu'on peut compter dans une autre tranche de la même pyramide; ou les solidités de ces deux tranches, sont entr'elles comme les sections qui les terminent.

Soit une seconde pyramide, & d'une forme quelconque. Supposons qu'elle ait une hauteur égale à celle de la premiere, & que, comme elle, elle soit partagée en un même nombre de tranches de même épaisseur. Alors deux tranches correspondantes de ces 2 pyramides, ou placées dans l'une & l'autre à égale distance de leur sommet, doivent contenir chacune d'autant plus de points solides, que leurs sections terminatrices ont plus de surface: ainsi les solidités de ces tranches comparées, sont entr'elles, comme les surfaces des sections qui les forment. Dans chacune de ces pyramides, la base est donc à une section quelconque (qui lui est semblable), comme le quarré de la hauteur de la pyramide, est à celui de la distance de cette section au sommet de la même pyramide. C'est pourquoi, en supposant égales

entr'elles, comme on l'a dit; & les hauteurs des deux pyramides, & les diſtances de leurs ſections à leur ſommet; il s'enſuit que le rapport de deux ſections, qui ſe corréſpondent dans ces deux pyramides, eſt égal à celui des baſes. On peut donc en conclure que toutes les tranches correſpondantes de ces deux ſolides, ont des rapports égaux. Une telle ſuite de rapports égaux conduit à cette conſéquence, que la ſomme des tranches de la premiere pyramide, eſt à celle des tranches correſpondantes de la ſeconde, comme la baſe de la premiere eſt à celle de la ſeconde. Deux pyramides qui ont une même hauteur, ont donc des ſolidités qui ſont dans le rapport de leurs baſes; & ſi non ſeulement leur hauteur eſt la même, mais encor ſi leurs baſes ſont égales, il y a égalité entre leurs ſolidités: ou en général, deux pyramides quelconques, qui ont des baſes & des hauteurs égales, ont une même ſolidité.

Comparons actuellement une pyramide droite & quelconque à un priſme droit, en ſuppoſant égales & leurs baſes & leurs hauteurs, la ſolidité du priſme vaut trois fois celle de la pyramide. La démonſtration générale de cette propoſition ſe reduit à faire voir, qu'une pyramide triangulaire eſt toujours le tiers d'un priſme de même baſe & de même hauteur. En effet on peut imaginer une pyramide quelconque propoſée, comme partagée par des plans coupans, en autant de pyramides triangulaires (fig. 39), qu'on peut former de triangles dans le polygone qui lui ſert de baſe. Soit donc une pyramide triangulaire *adbc* (fig. 5) comparée au priſme triangulaire qui eſt repréſenté (fig. 3) par *abcdef*. Si dans ce priſme on trace, ſur ſes faces collatérales *efcd* & *afcb*, deux diagonales *fd* & *fb*; & ſi on imagine qu'un plan coupant ſoit dirigé ſuivant ces deux lignes, alors le priſme eſt partagé en deux pyramides; l'une triangulaire, qui a ſon ſommet en *f*, & pour baſe le triangle *bcd*; & l'autre qui avec le même ſommet, a pour baſe la face *abde* du priſme. La premiere de ces pyramides a même baſe & même hauteur que la pyramide *adbc* qui eſt comparée au priſme. Si la ſeconde, qui eſt quadrangulaire, eſt coupée par un plan dirigé par ſon ſommet

f, & par la diagonale *eb* de la baſe de cette pyramide; elle eſt alors partagée en deux pyramides triangulaires, qui toutes deux ont le même point *f* pour ſommet, & dont l'une a pour baſe *abe*, tandis que la baſe de l'autre eſt *ebd*. Une ligne qui, du point *f*, feroit abaiſſée perpendiculairement ſur le plan *abde*, ſeroit la hauteur commune des deux dernieres pyramides. Celles-ci d'ailleurs ont des bases égales, puisque les triangles *abe* & *ebd* sont chacun moitié d'un même parallélogramme. Ces pyramides ayant ainſi même base & même hauteur, sont donc égales en solidité. Conſidérons actuellement celle de ces pyramides qui a été supposée avoir pour sommet le point *f*, & pour base *abe*. On peut imaginer que son sommet soit auſſi le point *b*; & sa base seroit alors la face opposée *afe*, c'eſt-à-dire la brse du prisme. Cette pyramide auroit, dans ce cas, comme la premiere pyramide *fbcd*, & la base & la hauteur du prisme. Elle seroit encore égale à la pyramide comparée *adbc*. Celle-ci seroit donc égale à chacune des trois pyramides dont le prisme eſt évidemment composé: par conséquent, une pyramide quelconque a toujours une solidité, qui eſt le tiers de celle d'un prisme de même base & de même hauteur.

Deux prismes en général qui ont même base & même hauteur, sont donc égaux en solidité. Car alors il y a égalité entre les pyramides dont ils peuvent être supposés formés.

La mesure des solidités des pyramides & des prismes quelconques dépend donc de celle d'un prisme droit. Soit BHGFDI (fig. 44) un tel prisme. Mesurer sa solidité, c'eſt chercher combien il contient de petits cubes tels que A; & le calcul de ce nombre eſt indiqué par les conſidérations suivantes. Soit partagée la surface de sa base HGFI en petits quarrés qui soient égaux à la base *bcdu* de l'unité de mesure A. Soit auſſi portée la hauteur *ab* de cette unité, sur la hauteur HB du prisme droit; & soient imaginés, par tous les points de diviſion de cette hauteur HB, des sections telles que *orqs*, qui soient toutes paralleles & égales à la base HGFI. Ce prisme eſt ainſi partagé en tranches, qui ont pour

épaiſſeur la hauteur de l'unité A, & qui doivent chacune renfermer autant de petits cubes A, qu'il y a de petits quarrés dans la base. Ainſi, en répétant le nombre des cubes contenus dans une seule tranche, autant de fois qu'il y a de tranches; le résultat doit être, le nombre des cubes compris dans toute l'étendue du prisme, ou la solidité de ce corps. Mais le nombre des cubes d'une seule tranche eſt égal, à celui des petits quarrés qui sont formés sur la base du prisme, ou à la surface de cette base: & le nombre des tranches du prisme, eſt celui des parties égales de sa hauteur: par conséquent, on doit exprimer la solidité d'un prisme droit, en multipliant sa hauteur par la surface de sa base.

La solidité d'un prisme oblique eſt auſſi exprimée de la même maniere. Car un tel prisme peut toujours être comparé à un prisme droit, qui ayant même base & même hauteur, a néceſſairement une même solidité. La solidité d'un prisme quelconque eſt donc égale au produit de sa base par sa hauteur. Celle d'un cylindre, qui n'eſt qu'un prisme d'une infinité de faces, eſt donc auſſi égale au produit de la surface du cercle qui lui sert de base, multipliée par sa hauteur. Ainſi, celle d'une pyramide quelconque, qui eſt toujours le tiers d'un prisme de même base & de même hauteur, eſt égale au produit de la surface de sa base, multipliée par le tiers de sa hauteur: & il en eſt de même de la solidité d'un cône, qui eſt une pyramide d'une infinité de faces.

144. La solidité d'une pyramide qui eſt tronquée parallélement à sa base, & telle que *omncbd* (fig. 3), eſt la différence des solidités des deux pyramides *adbc* & *aomn*. L'une, eſt égale au produit de la surface *dbc*, multipliée par le tiers de *au*; & l'autre, à celui de la surface *omn*, multipliée par le tiers de *at*. Ces hauteurs *au* & *at* des deux pyramides, ne sont pas des lignes qui soient données immédiatement par la forme du tronc; mais leur longueur peut en être conclue facilement. Car on peut dire (128) $au:at::ad:ao::db:om$; & par conséquent $au-at$ ou $tu:db-om::at:om$, & $tu:db-$

om::*au*:*db*. La hauteur *at*, par exemple, eſt donc égale au quotient du produit de *om* (côté du tronc), multipliée par la hauteur de ce même tronc, & diviſé par la différence des deux côtés correſpondans *db* & *om* des deux bases paralleles. On trouveroit une expreſſion analogue de la valeur de *au*. Après cette recherche, ſi on multiplie, par le tiers des hauteurs reſpectives *at* & *au* ainſi exprimées, les ſurfaces des baſes du tronc, qui ſont repréſentées par *omn* & *dbc*; & ſi on prend la différence de ces deux produits, on trouve que la ſolidité du tronc ſuppoſé eſt repréſentée par

$$\tfrac{1}{3}ut\left(\frac{db.dbc-om.omn}{db-om}\right).$$

La ſolidité d'un cône qui eſt tronqué parallélement à ſa baſe, & tel que *kcdbl* (fig. 6), doit être calculée & exprimée de la même maniere. Cependant, au-lieu des côtés oppoſés & correſpondans de ſes baſes, ou de leurs circonférences, l'expreſſion de cette ſolidité doit renfermer les diametres de ces baſes, & le changement vient de ce que le rapport de ces diametres eſt celui des hauteurs des cônes.

Cherchons actuellement la ſolidité d'une ſphere. On peut imaginer qu'elle eſt compoſée d'une infinité de pyramides, dont le ſommet ſeroit à ſon centre, & qui auroient pour baſes des parties élémentaires de la ſurface de cette ſphere. Ces parties doivent être des eſpaces ſi petits, qu'ils puiſſent, (quoique pris ſur une ſurface courbe,) être regardés comme autant de figures planes. Telle ſeroit une de ces pyramides qui auroit pour baſe le petit trapeze *aczr* (fig. 43), & dont les arrêtes ſeroient des rayons menés des quatre points *a*, *c*, *z*, *r*, au centre C de la ſphere. La ſolidité de chacune de ces pyramides eſt égale au produit de la ſurface de ſa baſe, multipliée par le tiers de ſa hauteur qui eſt le rayon de la ſphere. Ainſi les pyramides dont une ſphere eſt imaginée être formée, ayant toutes une même hauteur; la ſomme de leurs ſolidités, ou la ſolidité de la ſphere eſt égale au produit du tiers du rayon multiplié par la ſomme des baſes de toutes ces pyra-

mides, ou par la surface entiere de cette sphere. D'ailleurs, on doit se rappeller que la surface de la sphere vaut quatre fois celle d'un de ses grands cercles : par conséquent on peut dire aussi que la solidité d'une sphere est égale au produit de la surface d'un de ses grands cercles, multipliée, ou par quatre fois le tiers du rayon, ou par les $\frac{2}{3}$ du diametre.

Si on considere un secteur sphérique, ou l'espace compris, par exemple, entre le cercle parallele *bu*P, & des rayons tels que *uc*, qui seroient menés du centre C aux divers points de la circonférence de ce cercle. La solidité d'un tel solide est égale, par les mêmes raisons, au produit du tiers du rayon, multiplié par la surface de la calotte sphérique N*bu*PN.

Enfin si on se propose de trouver la solidité d'un segment sphérique, ou d'un espace compris entre le parallele *bu*P, & le contour de la calotte sphérique N*bu*PN ; on doit remarquer qu'elle est égale à la différence des solidités du secteur sphérique N*bu*PN, & du cône qui a son sommet en C, & pour base le parallele *bu*P. Ainsi, comme on vient d'indiquer la maniere de mesurer la solidité d'un cône & celle d'un secteur, il est facile de parvenir à déterminer celle d'un segment sphérique.

Tout autre solide pouvant être considéré comme composé de pyramides ; le calcul de sa solidité n'exige aucun nouveau principe qui puisse lui servir de base. Ainsi, nous devons nous borner à faire quelques applications utiles des résultats des démonstrations précédentes.

145. Soit proposé de déterminer la solidité de la carene d'un vaisseau, ou de l'espace qu'occupe dans l'eau sa partie submergée, lorsqu'il est flottant & en repos. Imaginons cette carene partagée en tranches, par des sections horisontales, qui soient dirigées par les lignes *ab*, *dq*, *er*, *fi*, &c. (jusqu'à la quille) (fig. 27. G) ; & dont les distances soient telles que les arcs *ad*, *de*, *ef*, &c. puissent être considérés comme autant de lignes droites. Les parties du creux *bc*, qui sont *bq*, *qr*, *ri*, &c. doivent ainsi être aussi petites que les cir-

constances peuvent l'exiger ; & si on peut les supposer d'une certaine grandeur près de la flottaison, on pourroit les diminuer dans les régions inférieures de la carene, où la courbure de sa surface est plus considérable. La figure *bca* est celle d'une demi-section verticale nommée couple, & au plan de laquelle la longueur d'un vaisseau est perpendiculaire. Soit *abdc* (fig. 24. G) la surface de la moitié d'une de ces sections horisontales nommées lignes d'eau ; & soit son axe *acd* divisé en un si grand nombre de parties égales, que les arcs interceptés entre les perpendiculaires élevées aux extrémités de ces parties sur le même axe *ad*, puissent être regardés comme autant de lignes droites. Imaginons aussi des plans verticaux qui passent par ces ordonnées, & qui soient par conséquent dirigés de maniere que ces nouvelles sections verticales & les premieres qui sont horisontales soient perpendiculaires les unes aux autres : (les projections de ces diverses sections sont représentées (fig. 46. G :) alors la carene est nécessairement partagée en prismes droits & quadrangulaires, dont les bases ne sont pas paralleles, ou dont les arrêtes sont inégales. Parmi les arrêtes d'un de ces prismes, deux sont des ordonnées voisines, telles que *oq* & *ns*, d'une même ligne d'eau *abdc* ; tandis que les deux autres sont les ordonnées qui, dans une ligne d'eau immédiatement inférieure ou supérieure, correspondent à *oq* & *ns*. La ligne *qs* est un côté du parallélog. qui sert de base à ce prisme, & *bq* (fig. 27. G) est l'autre côté de cette base.

Représentons séparément un tel prisme per *acdefbgh* (fig. 45), & cherchons sa solidité. En la déterminant généralement, on en conclura ensuite celle des prismes qui composent une même tranche horisontale de la carene d'un vaisseau. Ce prisme supposé peut être partagé en deux prismes triangulaires, par un plan dirigé suivant les arrêtes *bd* & *gh* ; ainsi la recherche de sa solidité se reduit à celle de la solidité d'un prisme droit & triangulaire, tel que *kqpoln*, dont les arrêtes sont inégales. Si par le sommet de la plus courte de celles-ci, ou par le point *n*, on dirige un plan, parallélement à la base *qpo* à laquelle toutes les arrêtes sont perpen-

diculaires, le prisme proposé se trouve ainsi composé d'un prisme droit *iqpomn*, & d'une pyramide quadrangulaire *niklm*. On connoît la formule qui exprime la solidité du prisme droit. Quant à celle de la pyramide, elle est égale au produit de sa base *kiml* multipliée par le tiers de sa hauteur *ns*; mais la figure *kiml* est un trapeze dont les bases paralleles sont *lm* & *ki*, & dont la hauteur est *im*, puisque le prisme est droit : donc la solidité de cette pyramide est égale à $\frac{1}{2}im.\frac{1}{3}ns(ki+lm)$, ou à $\frac{1}{3}(ki+lm).im.\frac{1}{2}ns$. Le produit $(im.\frac{1}{2}ns)$ représente la surface du triangle *inm* ou *qpo*. Ainsi la solidité de cette pyramide est égale au produit de la base du prisme multipliée par le tiers de la somme des différences de la plus petite des arrétes aux deux autres arrêtes. La solidité totale du prisme droit, & qui a des arrêtes inégales, est donc exprimée par $\frac{1}{3}qpo(pn+qk+ol)$: donc celle du prisme droit & quadrangulaire, à arrêtes inégales, & qui est composé de deux prismes triangulaires dont les bases inférieures sont ici supposées égales, est $\frac{1}{3}cdh(2bd+2hg+ac+fe)$. On sait d'ailleurs que la surface d'un triangle, s'il est rectangle, tel que *chd* en *c* est exprimée par $(\frac{1}{2}cd.ch)$. La solidité du prisme supposé est donc égale à $\frac{1}{2}cd.ch(\frac{2}{3}bd+\frac{2}{3}hg+\frac{1}{3}ac+\frac{1}{3}fe)$: ou en décomposant ce produit en deux parties, elle est égale à $\frac{1}{2}cd.ch(\frac{2}{3}bd+\frac{1}{3}ac)+$ $\frac{1}{2}cd.ch(\frac{2}{3}gh+\frac{1}{3}fe)$.

Ces calculs faits séparément pour obtenir la solidité d'un tel prisme, peuvent aisement être appliqués à la recherche de la solidité de tous les prismes qui composent ensemble une tranche horisontale de la carene d'un vaisseau. On voit d'après la maniere de faire la décomposition de la carene, que les lignes telles que *cd* & *ch*, peuvent être supposées les mêmes pour chacun des prismes composans. On voit aussi, en descendant dans les détails, que si on considere l'un de ces prismes, qui a pour deux de ses arrêtes, les ordonnées voisines *oq* & *ns* (fig. 24. G); les deux tiers de *ns* doivent entrer dans le calcul de la solidité d'un tel prisme, tandis que le tiers de la même ordonnée *ns* doit se trouver dans l'expression de la solidité du prisme, qui est immédiatement adjacent au premier; parce que *ns*, est une arrête commune

à ces deux prifmes. C'eft pourquoi la ligne *ns* doit être comprife toute entiere dans la fomme des folidités de ces deux prifmes. En étendant ce raifonnement ou cette remarque, à tous les prifmes qui compofent une même tranche horifontale d'une carene; & en examinant les arrêtes qui font communes à plufieurs prifmes; on reconnoît que, dans la ligne d'eau *abdc*, il n'y a que les deux ordonnées correfpondantes aux extrémités de l'axe *ad*, qui n'appartiennent comme arrêtes, qu'à un feul prifme. La fomme des folidités des prifmes ne peut donc renfermer, que le tiers d'une de ces ordonnées extrêmes, & les $\frac{2}{3}$ de l'autre. En réfumant toutes ces réflexions, voici comment on peut exprimer la fomme des folidités de tous les prifmes qui compofent une tranche horifontale, ou la folidité de cette tranche. Il faut faire 1° une fomme de toutes les ordonnées entieres d'une des lignes d'eau qui terminent cette tranche, avec l'exception de ne prendre que le tiers de la premiere, & les deux tiers de la derniere. 2° Il faut faire auffi une pareille fomme des ordonnées de la feconde des lignes d'eau terminatrices. Enfuite on multiplie chacune de ces fommes, & par l'intervalle commun des ordonnées de chaque ligne d'eau, & par la moitié de la diftance des deux lignes d'eau, & on obtient ainfi la folidité de la tranche fuppofée.

Remarquons actuellement que la furface d'une ligne d'eau, telle que *abdc*, eft égale au produit de l'intervalle commun de fes ordonnées, multiplié par la fomme de toutes fes ordonnées entieres, moins la moitié de la 1re & de la derniere. Un tel produit ne differe de celui qui eft un des facteurs de la folidité de la tranche horifontale confidérée précédemment, que par les ordonnées extrêmes, dont la moitié fert à l'expreffion de la furface des lignes d'eau, & dont on ne prend que le tiers & les deux tiers, pour repréfenter la folidité de la tranche qu'elles terminent. Par conféquent, fi la fomme du tiers ou de la moitié de la 1re ordonnée & des deux tiers ou de la moitié de la derniere, ajoutent peu de grandeur à la fomme des ordonnées entieres de la même ligne d'eau, ce qui a toujours lieu lorfque les ordonnées font très-multipliées; alors on peut

négliger la différence des deux produits comparés. Dans un tel état de choses, on peut donc dire que la solidité d'une tranche horisontale de la carene d'un vaisseau, est égale au produit de l'épaisseur de cette tranche, multipliée par la moitié des surfaces des deux lignes d'eau qui la terminent. C'est enfin en calculant séparément & de la même maniere, la solidité de chacune des autres tranches de la carene, qu'on parvient, par leur somme, à déterminer le volume, ou de la carene entiere, ou de toute autre partie de cette carene, telle, par exemple, que l'exposant de la charge qui est toujours intéressant à connoître.

S'il étoit proposé de mesurer la solidité d'une tranche verticale, semblable à celle qui est représentée (fig. 1. G) par *RapnmgfQ*; on pourroit l'imaginer partagée en prismes horisontaux pareils aux précédens; mais on peut la supposer aussi composée de prismes verticaux, tels que *cbupgqtz*. Dans ce dernier cas, on démontreroit de la même maniere que la solidité de ce prisme particulier est égale à $\frac{1}{2}RQ.tq(\frac{2}{3}qg+\frac{1}{3}tz+\frac{1}{3}cp+\frac{2}{3}bu)$; & des calculs semblables conduiroient à conclure, que la solidité totale de cette tranche verticale est égale au produit de l'épaisseur RQ de cette tranche, multipliée par la moitié des surfaces des deux sections verticales *sqmQ* & *apnR* qui la terminent. C'est encore par ces nouvelles opérations qu'on peut, en accumulant les solidités d'un nombre plus ou moins grand de tranches verticales d'un vaisseau, déterminer le volume d'une portion plus ou moins considérable de sa carene ou de sa capacité.

Est-il proposé de déterminer la solidité d'un mât? Comme dans l'opération mécanique qui a pour but de donner une forme déterminée à ce solide, on se contente de lui assigner certains diametres placés à des distances égales sur sa longueur: imaginons dans ce mât à mesurer, autant de sections paralleles, qu'il y a de diametres ainsi désignés. Supposons aussi que la longueur du mât, soit perpendiculaire au plan de ces sections qui sont toutes circulaires. Alors on doit juger que les tranches solides qui sont comprises entr'elles, peuvent être considérées comme autant de cônes tronqués à bases

paralleles. La ſolidité de chacun, de ces troncs qui reſſemblent à k*cdbl* (figure. 6), eſt repréſentée par $\frac{1}{3}$zo $\left(\frac{cb.cdb\text{-}kl.kul}{cb\text{-}kl}\right)$. Enſuite en réuniſſant dans une même ſomme toutes les ſolidités partielles de ces divers cônes, on obtient la ſolidité totale d'un mât propoſé, & conformé ſuivant les regles de l'art. C'eſt par un ſemblable procédé, & en multipliant autant qu'il ſeroit néceſſaire, le nombre des ſections ou des tranches d'un arbre qui ſeroit ſeulement écorcé, ou d'un mât brut, qu'on peut déterminer la ſolidité d'un tel ſolide; & par conſéquent calculer la ſolidité des excédens, c'eſt-à-dire la différence d'un mât brut, au mât artificiel qu'il peut fournir.

La ſolidité d'une vergue peut être déterminée par la même méthode, ainſi que celle de tous les bois ronds qui préſentent des diametres variables, dans les divers points de leur longueur. Si une piece de bois eſt équarrie, ou de forme quadrangulaire, & telle que la piece repréſentée (fig. 62. G) par *ilpm*; ſi ſes arrêtes ne ſont pas paralleles; & ſi les groſſeurs changent progreſſivement d'une de ſes extrémités à l'autre; alors on imagine, pour calculer ſa ſolidité, qu'elle eſt décompoſée en pluſieurs tranches ſolides, qui, ſéparées par des ſections paralleles, ſont placées de maniere que les portions d'arrêtes qu'elles interceptent peuvent être regardées comme des lignes droites. Ces divers tronçons d'une même piece, ſont alors des troncs de pyramides quadrangulaires & la formule précédente sert à trouver la solidité de chacune des tranches composantes.

C'eſt ainſi qu'on peut calculer la ſolidité d'une longue piece, telle que *amnd*, ou *ghcb*, ou *dlki*, ou *ecub*, ou *ebacd*, ou *A&B*, &c. [fig.71, 64, 50, 58, 35 & 53.G]. C'eſt auſſi en conſidérant une barique partagée en tranches solides dont les bases sont paralleles au grand cercle qui paſſe par la bonde, ou aux deux fonds extrêmes; qu'on peut aisément calculer sa contenance ou sa capacité. Car toutes les ſections imaginées dans ce solide doivent sans doute être circulaires; ainſi, en

les supposant en nombre convenable, la barique à mesurer est partagée en cônes tronqués dont les bases sont paralleles. Les formules précédentes doivent servir à diriger les calculs de ces solidités partielles; & en réunissant tous les produits qui résultent de leur application, on obtient ainsi la solidité totale d'une barique quelconque. Cette application est d'ailleurs très facile puisqu'on peut mesurer les contours de chacune des sections supposées, & en conclure non-seulement leurs diametres intérieurs, mais aussi leurs surfaces qui sont des élémens de ces calculs. Dans la marine on peut donc par un tel procédé, satisfaire au besoin qu'on a de connoître les capacités des bariques de 2, de 3 & de 4, dont on fait usage, pour contenir les approvisionnemens en eau & en vin, qui sont nécessaires pour une campagne déterminée.

146. *Rapports des solidités des corps.* Les solidités de deux pyramides étant exprimées chacune par le produit de la base multipliée par le tiers de la hauteur; sont nécessairement dans le rapport de ces mêmes produits. Elles sont donc égales, si ces produits sont égaux: & cette égalité conduit à cette proportion, savoir que la base de la premiere pyramide, est à celle de la seconde, comme la hauteur de la seconde, est à celle de la premiere. Des pyramides égales en solidité ont donc des bases, dont les surfaces sont en raison inverse des hauteurs. Nous avons déjà vu que si les hauteurs de deux pyramides sont les mêmes, les solidités sont entr'elles comme leurs bases; & il est aussi vrai que leurs bases étant égales, les solidités sont dans le rapports des hauteurs: puisque les produits qui les représentent, ayant alors un facteur commun, n'ont d'autre rapport que celui des hauteurs des pyramides. On doit juger, par ces propositions, des rapports qui regnent entre les solidités comparées, ou des prismes, ou des cônes, ou des cylindres.

Si deux pyramides sont semblables, leurs solidités sont dans le rapport des cubes de leurs côtés ou de leurs lignes homologues. Supposons que la pyramide *rkiq* (fig. 39) soit semblable à *adbc* (fig. 5), Soit *ri* la hau-

teur de la premiere, & *au* celle de la seconde : alors on a la proportion fondamentale, $rkiq:adbc::kiq.ri:dbc.au$, qui est donnée par le rapport général des solidités de deux pyramides quelconques. Mais les bases kiq & abc sont supposées semblables : donc $kiq:dbc::ki^2:db^2$, ou comme $ri^2:au^2$, puisque les côtés homologues des pyramides semblables sont proportionnels. Cette derniere proportion est aisément changée en celle-ci, $kiq.ri:dbc.au::ri^3:au^3$; & par conséquent le dernier rapport de cette derniere proportion étant substitué au premier qui lui est égal, dans la proportion fondamentale, on doit faire celle-ci, $rkiq:adbc::ri^3:au^3$; c'est-à-dire que les solidités de deux pyramides semblables, sont dans le rapport des cubes de leurs hauteurs, ou comme les cubes de deux autres lignes homologues.

Si deux corps sont semblables, ils peuvent être partagés en un même nombre de pyramides semblables; & par conséquent, leurs solidités sont entr'elles comme les cubes des dimensions homologues de ces corps. Deux spheres doivent donc être aussi dans le rapport des cubes de leurs diametres.

147. De tels rapports peuvent être employés à calculer la mesure de la solidité d'un corps, (étant connue celle de certains corps qui lui sont semblables.) S'agit-il, par exemple, de déterminer la solidité d'une sphere qui a 6 pouces de diametre? on calcule celle d'une autre sphere dont on connoît, & le diametre qui est de 7 pieds; & la circonférence d'un de ses grands cercles, qui est de 22 pieds. Le quadruple de la surface de ce grand cercle, qui est égal à la surface de la sphere supposée, est représenté par le produit (22.7). La solidité de la même sphere est par conséquent exprimée en pieds cubes par $(22.7.\frac{7}{6})$. le rapport de cette solidité au cube du diametre de la sphere, est alors celui de 22 à 42, ou de 11 à 21 : par conséquent on peut dire que la solidité de la sphere proposée, est au cube de son diametre, comme 11:21. Cette solidité estimée en pouces cubes, est donc le quatrieme terme de cette proportion, $21:11::216^{ppp°}:x$; & comme elle en est le seul terme

inco. , les regles ordinaires servent à le calculer aisément.

Il nous reste à exposer comment, étant données les trois dimensions d'un corps, dont la figure est celle d'une pyramide, d'un cône, d'un prisme, d'un cylindre, d'une sphere, ou qui peut être décomposé en solides de cette forme; on peut calculer sa solidité exprimée, en petits cubes, tels que des toises, des pieds & des pouces cubes. Soit un corps, dont la solidité doit être exprimée par le produit des trois dimensions suivantes, 11 tois. 5 pieds 7 pouc., 9 tois. 4 pieds 5 pouc. & 2 tois. 4 pieds 8 pouc. On peut regarder cette solidité, comme étant celle d'un prisme droit, qui auroit pour hauteur 2 tois. 4 pieds 8 po., & pour base un parallélogramme rectangle, dont la longueur seroit 11 tois. 5 pi. 7 po. & la largeur 9 tois. 4 pieds 5 pouc. Il faut pour déterminer cette solidité, conformément aux regles indiquées, calculer le nombre de toises quarrées que peut contenir la base de ce prisme. Ce nombre servira à connoître celui des toises cubes qui entrent dans chaque tranche d'une toise de hauteur dont le prisme est formé dans sa totalité; & cette solidité partielle étant ensuite multipliée par le nombre des tranches, ou par la hauteur donnée du prisme, le résultat doit représenter la solidité totale d'un tel prisme. La surface de cette base est, comme on l'a vu (136), $116^{tt}\ 5^{ppi}\ 95^{ppo}$, & en la multipliant par une toise, le produit doit être la solidité d'une tranche prismatique, qui, a la base du prisme, & une toise de hauteur.

De tels calculs exigent quelques détails préalables. Il faut remarquer que le produit d'une toise quarrée, multipliée par une toise linéaire, est une toise cube, & représente la solidité d'un parallélipipede A (figur. 44), dont toutes les faces sont égales à une toise quarrée, & dont toutes les arrêtes ont la longueur d'une toise. Cette toise cube vaut aussi 216 pieds cubes Le produit d'une toise multipliée par un pied quarré, vaut six pieds cubes; & si elle est multipliée par un pouce quarré, le produit est de 72 pouces cubes, ou la 24e partie d'un pied cube; parce qu'un pied cube

vaut

vaut 1728 pouces cubes. Enfin un pied quarré étant multiplié par un pouce, le produit est de 144 pouces cubes.

Aprês ces détails, procédons à l'opération proposée. Le produit, de 116^{tt} 5^{ppi} 95^{ppo} multipliés par une toise, devient 116^{ttt} 33^{pppi} 1656^{pppo}, & ce nombre exprime celui des cubes contenus dans une tranche du prisme proposé, qui a pour base celle du prisme & une toise de hauteur. C'est ce solide qu'il faut répéter actuellement autant de fois que l'indique le nombre 2^{t} 4^{pi} 8^{po}, pour obtenir la solidité totale du prisme, ou du corps proposé.

Les choses étant reduites à cet état, tout consiste donc à répéter la solidité trouvée d'une des tranches, qui est alors le multiplicande, non seulement deux fois mais aussi $\frac{4}{6}^{e}$ de fois, & $\frac{8}{72}^{e}$ de fois, parce que dans le multiplicateur 2^{t} 4^{pi} 8^{po}, il n'y a que ce nombre d'unités & de parties d'unité. Le produit doit être cherché par les regles ordinaires de la multiplication des nombres complexes, & par parties aliquotes. Les détails de l'opération sont présentés dans les produits partiels qui sont indiqués ici, & le résultat ou la solidité cherchée est de 322^{ttt} 142^{pppi} 568^{pppo}.

116^{ttt}	33^{pppi}	1656^{pppo}
2^{t}	4^{pi}	8^{po}
232^{ttt}	66^{pppi}	
	1	1584^{pppo}
58	16	1692
19	77	1140
9	146	1434
3	48	1630
322^{ttt}	142^{pppi}	568^{pppo}

On peut proposer, étant donnée la solidité d'un prisme, par exemple, de déterminer quelle doit être sa base, en supposant sa hauteur connue. Soit cette solidité de 322^{ttt} 142^{pppi} 568^{pppo}; & la hauteur supposée de 2^{t} 4^{pi} 8 ^{po}. On demande quelle est la base d'un tel prisme. Sans doute sa solidité peut être regardée comme le produit de la surface de cette base, multipliée par sa hauteur; & d'aprês cette considération, il sembleroit que tout se reduit à diviser la solidité donnée par la hauteur connue du prisme, pour obtenir au quotient

la base qui eſt demandée. Mais peut-on raisonnablement chercher combien de fois, dans un nombre de cubes, eſt contenue une ſimple ligne droite ? Une telle diviſion ne préſente à l'eſprit aucune idée; & dans la ſolidité d'un corps, il n'y a de contenu que des cubes. La queſtion doit donc être abordée d'une autre maniere.

La hauteur du priſme étant ſuppoſée de 2 tois. 4 pi. 8 pouces; imaginons un ſecond priſme qui ait auſſi cette même hauteur, ſur une baſe dont la ſurface ſoit d'une toiſe quarrée. Sa ſolidité eſt de 2^{ttt} 168^{pppi}; & elle doit être à celle du priſme propoſé, dans le rapport de leurs baſes reſpectives; puiſque les priſmes de même hauteur ont des ſolidités qui ſont entr'elles comme leurs baſes. Il réſulte de cette comparaiſon, que pour trouver la baſe demandée, on doit diviſer la ſolidité donnée par celle du ſecond priſme ſuppoſé, ou 322^{ttt} 142^{pppi} 568^{pppo} par 2^{ttt} 168^{pppi}. De-là on conclut la regle générale, qu'étant propoſé de chercher la baſe d'un priſme dont la hauteur & la ſolidité ſont données, il faut avant de faire l'opération, multiplier une toiſe quarrée (ſi la toiſe eſt l'unité de meſure) par la longueur de la dimenſion donnée, & diviſer enſuite par ce ſolide ſuppoſé, la ſolidité du priſme propoſé. Cette opération d'ailleurs doit être faite ſuivant les regles connues de la diviſion des nombres complexes; & le quotient eſt alors le nombre des toiſes, pieds & pouc. quarrés dont la baſe de ce priſme eſt compoſée.

148. *Trigonométrie ſpherique.* Si nous avons reconnu une certaine utilité à ſavoir meſurer, & la ſurface d'une ſphere, & ſa ſolidité, ainſi qu'à connoître la forme des ſections qui paſſent par ſon centre, ou par divers points d'un de ſes diametres. Actuellement un tel ſolide doit attirer encore plus particuliérement notre attention. En effet remarquons qu'une ſphere eſt une image de la fig. de la terre; que les routes des vaiſſeaux qui parcourent la ſurface des mers, ſont des lignes courbes tracées arbitrairement ſur ſon contour; que la poſition de tous les points de ces routes doit être connue dans tous les

inſtans aux navigateurs; que toutes les parties de l'étendue des mers doivent être deſſinées ſur des plans, pour ſervir de guides aux hommes de mer dans leurs campagnes; que les aſtres, ainſi que tous les objets qui ſont hors & loin de nous, nous paroiſſent toujours placés à la circonférence d'une vaſte ſphere dont nous nous imaginons occuper le centre; que les diſtances des aſtres n'ont pour nous d'autres meſures que celles des angles ſous leſquels nous les appercevons, ou les arcs compris entre les rayons viſuels, qui de notre œil ſont menés aux objets dont la grandeur nous importe à connoître; enfin que les routes mêmes d'un vaiſſeau, ſont indiquées dans la ſphere céleſte par le changement apparent de la poſition relative des aſtres à l'égard de l'obſervateur marin, qui ſe tranſporte d'un point de la ſurface du globe, ſur tout autre point de cette ſurface. Des rapports de cette importance doivent donc nous porter à conſidérer, avec autant d'étendue que d'intérêt, les arcs de cercle qui peuvent être tracés ſur la ſurface d'un globe; à analiſer leurs combinaiſons, lorſqu'ils forment des angles ou des triangles; & à ſavoir calculer la grandeur de ces arcs, pour réſoudre facilement des queſtions qui intéreſſent le ſalut & la fortune des navigateurs. D'ailleurs, les applications des principes & des conſéquences que nous allons préſenter, juſtifieront leur néceſſité, ainſi que l'obligation impoſée à tout homme de mer, de s'occuper de cette nouvelle partie de la géométrie.

Soit la ſphere NOSE (fig. 43): *od*E eſt un de ſes grands cercles, dont le plan eſt *od*CE, & dont le centre eſt celui C de la ſphere. Si par ce point C, on imagine une ligne NS qui ſoit perpendiculaire au plan *od*EC; cette ligne eſt auſſi perpendiculaire à toutes les lignes menées par ſon pied dans ce plan. Elle l'eſt donc ſur C*o*, *cd*, &c. Si par les lignes N*c* & *dc*, on fait paſſer un arc N*d*; cet arc appartient à un grand cercle, parce que le centre C eſt dans ſon plan; & il eſt d'ailleurs de 90 dégrés, puiſqu'il eſt la meſure de l'angle N*Cd*. Les arcs NO, NE ſont auſſi de 90 dégrés. De même les arcs de grand-cercle menés de l'extrémité S de

NCS, à divers points de la circonférence *od*E, sont de 90 degrés; & ces points N & S de la sphere, qui sont ainsi éloignés de 90 degrés de tous les points de la circonférence du grand cercle *od*E, sont nommés les poles de ce cercle. Remarquons que tout grand cercle d'une sphere a des poles, & qu'un point quelconque de la surface d'une sphere peut être regardé comme le pole d'un grand cercle. On peut dire aussi d'un point, qu'il est le pole d'un cercle supposé, lorsqu'il est éloigné de 90 degrés de deux seuls points de la circonférence de ce cercle. Car en menant du centre de la sphere des rayons à ces trois points, celui qui passe par le pole présumé, est perpendiculaire aux deux autres, qui sont menés dans le plan du cercle supposé. La proposition inverse est également vraie, c'est-à-dire que si deux cercles sont perpendiculaires à un troisieme, ils passent par le pole de celui-ci, & ils indiquent sa position par celle d'un de leurs points d'intersection. C'est par une raison semblable qu'on démontre que si un arc est perpendiculaire au plan d'un cercle, & s'il est de 90 degrés, son extrémité est nécessairement le pole de ce cercle.

Désormais lorsqu'il sera question d'arcs de grand cercle, ils seront indiqués par le seul nom d'arcs; & on donnera le nom de paralleles à ceux qui appartiennent à de petits cercles de la sphere.

Lorsque deux arcs N*c* & N*h* se rencontrent en un point N, ils font un angle nommé sphérique; & l'arc N*h* prolongé, ne peut rencontrer l'arc N*c* dans un autre point S, qu'à une distance de 180 degrés du point N. Car les deux grands cercles de la sphere auxquels appartiennent ces arcs, ont nécessairement pour intersection commune un diam. NS de cette sphere. D'ailleurs l'inclinaison de l'arc N*h* à l'égard de l'arc N*c*, est la même que celle des plans respectifs dans lesquels ils sont placés. C'est pourquoi le plan de l'arc N*c* étant N*c*C, & celui de N*h* étant N*h*C, l'ang. sphérique *c*N*h*, est égal à l'angle des deux plans désignés. La mesure de cet angle est donc celle d'un angle formé par deux lignes droites, menées dans chaque plan perpendiculairement

à un même point de la ſection commune NC de ces deux plans. Si en un point R de cette ſection, on éleve deux perpendiculaires, l'une R*a* dans le plan de N*c*, & l'autre R*r* dans le plan de N*h*; l'arc parallele *ar* qui eſt la meſure de l'angle rectiligne *a*R*r*, eſt auſſi celle de l'angle plan, & par conſéquent de l'angle ſphérique N*h*. Mais le rayon de cet arc n'eſt pas celui de la ſphere; & en variant la grandeur de ce rayon, on varie la longueur de l'arc qui ſert de meſure à l'angle ſphérique. Une meſure uniforme a donc été jugée néceſſaire pour eſtimer la grandeur de tout angle ſphérique, & on eſt convenu d'employer toujours un arc de grand cercle pour une telle évaluation. C'eſt pourquoi faut-il meſurer un angle ſphérique tel que *c*N*h*; on prolonge les plans de ſes côtés juſqu'au centre de la ſphere; on éleve du centre de celle-ci, & dans chacun de ces plans, deux lig. C*o* & C*d* qui ſoient perpendiculaires à la ſection commune NC. L'arc *od*, qui eſt alors la meſure de l'angle des deux perpendiculaires, eſt celle de l'angle ſphérique *cnh*. Cet arc *od* appartient évidemment à un grand cercle; & les côtés N*o* & N*d* de l'angle *cNh*, ſont alors devenus néceſſairement de 90 dégr. Car la ligne NC étant perpendiculaire aux deux lignes *o*C & *d*C, & par conſéquent au plan du cercle *od*E; le point N eſt le pole de ce cercle, & les arcs menés, de ce pole, aux points *o* & *d*, ſont de 90 dégrés. La meſure d'un angle ſphérique eſt donc l'arc de grand cercle, qui eſt compris entre les côtés de cet angle, & qui eſt placé à 90 dégrés du ſommet.

La convention de prendre les arcs de grand cercle, pour meſurer les angles ſphériques, n'empêche pas que les arcs, tels que *ar*, *bu*, *cz*, ne ſoient auſſi, comme *od*, les meſures du même angle ſphérique *c*N*h*. Il eſt ſeulement à remarquer que ſi ces arcs paralleles, qui ſont décrits avec des rayons plus petits que celui de la ſphere, n'ont pas autant de longueur que l'arc *od*; ils ſont tous compoſés d'autant de degrés que cet arc de grand cercle.

Ajoutons enfin que tout ce qui a été dit ſur les angles plans, eſt entiérement applicable aux angles ſphé-

riques; c'est pourquoi nous ne ferons pas ici une répétition superflue des rapports des divers angles sphériques.

149. Lorsque trois arcs décrits sur la surface d'une sphere, viennent à se rencontrer; ils forment un triangle sphérique. Soit N*ch* un tel triangle. ses trois côtés ne peuvent jamais valoir ensemble deux fois 180 dég. Car en supposant les côtés N*c* & N*h* prolongés jusqu'à ce qu'ils se rencontrent de nouveau : alors la somme de N*co*S & N*hd*S est de 360 dégrés. Mais le côté *ch* est évidemment plus petit que la somme des deux arcs réunis *hd*S & *co*S : par conséquent ce même côté ajouté aux deux autres N*c* & N*h*, ne peut concourir à former une somme de 360 dégrés. Quant aux limites de la valeur des trois angles d'un tel triangle, elles ne peuvent être déterminées qu'après la démonstration suivante.

Soit un triangle spherique *def* (fig. 46) décrit sur une sphere; & soient tracés trois nouveaux arcs *bc*, *ac*, *ab*, dont les poles soient les sommets *d*, *e* & *f*. Il résulte de cette construction, non seulement que les parties du triangle *abo* sont les supplémens des parties qui leur correspondent dans le triangle *def* & réciproquement, mais aussi que les sommets *a*, *b* & *c* des angles du second triangle, sont les poles des côtés du premier. Car 1° le point *a*, par exemple, comme appartenant à l'arc *ab*, est éloigné de *f* de 90 dégrés, & il l'est également de *e*, comme étant un point de l'arc *ac* : ce point *a* est donc le pole de *ef*. On démontreroit de même que les arcs *df* & *de*, ont pour poles les sommets *b* & *c* des angles opposés du second triangle. 2° Soit comparé l'angle *f* avec le côté *ab*. La mesure de l'angle *f* est l'arc *no* compris entre ses côtés *nf* & *of*, qui sont de 90 dégrés : or les arcs *ao* & *bn* sont chacun de 90 dégrés, puisque les points *a* & *b* sont les poles des arcs *of* & *nf* : donc la somme des arcs *oa* & *nb*, ou des arcs *ab* & *no*, vaut 180 dégr.; c'est-à-dire que *no*, ou l'angle *f*, est le supplément du côté opposé *ab*. La démonstration seroit la même pour le rapport de tout autre angle *d* & *e*, à l'égard des côtés opposés *bc* & *ac*. 3° Le côté *ef*, par exemple, est le supplément de

l'angle *a ;* car celui-ci a pour meſure l'arc *or ;* & les arcs réunis *of* & *er*, ou *or* & *ef*, valent 180 dégrés ; parce que les points *f* & *e* ſont les poles des arcs *ab*, *ac* : par conſéquent le côté *ef* eſt le ſupplément de l'angle *a* qui lui eſt oppoſé. Les autres angles *b* & *c* ont pour ſupplémens, par les mêmes raiſons, les côtés *df* & *de*. Le triangle ſphérique *abc* eſt donc juſtement nommé le ſupplémentaire de *def* ; & l'utilité de ce triangle ſupplémentaire étant très-étendue, nous devons ajouter qu'il n'eſt aucun triangle ſphérique qui n'ait ſon triangle ſuplémentaire.

Une conſéquence immédiate de cette propoſition, eſt que les trois angles d'un triangle ſphérique ayant toujours pour ſupplémens les trois côtés d'un autre triangle ſphérique, ne peuvent, ſans ceux-ci, valoir 3 fois 180 dégrés ; puiſque c'eſt en les réuniſſant enſemble, que leur ſomme s'éleve à 540 dégrés. D'ailleurs la valeur de cette derniere ſomme, & les limites de celle des trois côtés d'un triangle ſphérique, démontrent que toujours la ſomme des trois angles d'un triangle ſphérique, eſt ſupérieure à 180 dégr.

On voit donc qu'on ne peut aſſigner ici, comme pour les triangles rectilignes, la valeur préciſe des trois angles d'un triangle ſphérique, & qu'on peut ſeulement fixer les limites de leur ſomme. D'ailleurs on diſtingue ſous le nom de rectangles, des triangles qui ont un angle droit, quoiqu'ils puiſſent en avoir deux & même trois. Les triangles de cette claſſe, non ſeulement ſont, comme tous les triangles en général, comparables avec un triangle ſupplémentaire ; mais auſſi avec deux autres triang. ſphériques, dont les parties ſont, ou égales, ou complémens à celles du premier ; & qui, par cette raiſon, ſont nommés ſes triangles complémentaires.

Soit *acb* (fig. 47) un triangle ſphérique dont l'angle *b* eſt droit. Si on ſuppoſe que les deux côtés *ac* & *cb* d'un de ſes angles obliques, ſoient prolongés au-delà du ſommet de cet angle, juſqu'à valoir 90 dégrés ; & que les extrémités *e* & *d* ſoient réunies par un troiſieme arc *de* ; les parties du triangle *dce* ainſi formé, ſont, ou égales, ou complémens aux parties du triangle *abc*.

En effet, l'arc *bd* étant de 90 dégrés, & de plus perpendiculaire au côté *ba*, le point *d* doit être le pole de *ba*. Si on remarque aussi que le point *a* est éloigné de *e* de 90 dégrés, autant qu'il l'est de *d*, le point *a* doit être reconnu pour le pole de *de*. Comparons actuellement les parties diverses des deux triangles *dce* & *acb*, aprés avoir préalablement prolongé les arcs *de* & *ab*, jusqu'à leur rencontre au point *f*. L'angle *e* est droit comme l'angle *a*. Les angles *acb* & *dce* sont aussi égaux, comme opposés au sommet; l'angle *cde* est complément de l'arc *ab*, parce que sa mesure *bf* forme avec *ab* un arc *af* de 90 degrés. De même *de* est le complément de *ef*, qui est la mesure de l'ang. *a*. D'ailleurs les côtés *dc* & *ce* ont été faits les complémens des côtés *ac* & *cb*: par conséquent les parties du triangle *abc* sont ou égales, ou complémens à celles du triangle *def*.

On imagine aisément la construction semblable d'un autre triangle *rka*; & sans répéter la démonstration précédente, on doit voir, par les mêmes raisons, que ce triangle, comme le premier *dce*, doit être complémentaire du triangle *acb* rectangle en *b*.

Si on compare des triangles sphériques, il doit paroître démontré qu'ils sont égaux, dans les mêmes cas d'égalité des triangles rectilignes. Car dans les démonstrations relatives à ceux-ci, on a fait voir uniquement qu'en posant ces triangles l'un sur l'autre, les sommets de leurs ang. se confondent parfaitement. C'est pourquoi comme il y a une courbure égale & uniforme dans les arcs de grand cercle d'une sphere, dont chacun d'ailleurs est, sur ce solide, la distance la plus courte de deux points de cette surface; comme une ligne droite est la distance la plus courte de deux points placés sur un plan; il ne doit pas être douteux, que, dans les mêmes suppositions, deux triangles sphériques superposés, doivent aussi se convenir & se confondre complettement. Deux triangl. sphériques sont d'ailleurs égaux dans un cas qui leur est particulier; & c'est lorsque leurs angles sont égaux chacun à chacun. Car alors les deux triangles, qui sont supplémentaires des triangles comparés, doivent avoir leurs trois côtés égaux. Ils sont donc parfai-

tement égaux, & l'égalité de leurs angles entraîne celle des côtés des deux triangles comparés : ce qui fait voir que ceux-ci étant supposés avoir leurs ang. égaux, ont nécessairement des côtés qui sont égaux.

Si dans un triangle (fig. 46), deux côtés, tels que *de* & *df*, sont égaux, les angles *e* & *f* qui leur sont opposés, sont aussi égaux. En effet, soient pris sur ces côtés, des arcs égaux *di* & *du*; & soient menés deux arcs *ei* & *fu*; alors les deux triangles *dei* & *udf*, qui ont un angle commun, compris entre deux côtés égaux, sont nécessairement égaux. *uf* est donc un arc de même grandeur que *ei*; & il en résulte l'égalité des deux triangles *uef* & *ife*, qui ont alors leurs trois côtés égaux chacun à chacun. Par conséquent enfin, les angles *def* & *dfe* du même triangle *def*, sont égaux, comme opposés à des côtés égaux. La proposition inverse seroit démontrée de la même maniere, en faisant usage du triangle supplémentaire. Car alors deux côtés de ce dernier triangle seroient égaux ; & la question se reduiroit à démontrer, comme on vient de le faire, l'égalité des angles qui sont opposés à ces côtés. On peut donc dire en général, que dans un triangle quelconque, les angles égaux sont opposés à des côtés égaux, & réciproquement.

Le plus grand angle d'un triangle spherique est aussi opposé au plus grand côté. Soit l'angle *def* plus grand que l'angle *edf*; & soit mené dans ce triangle, par le point *e*, un arc *ei*, qui, avec *ed*, fasse un ang. *dei* égal à l'angle *edi*. Alors les arcs *ei* & *id* doivent être égaux, comme opposés à des angles égaux dans le triangle *dei*; mais les arcs réunis *ei* & *if* forment une somme plus grande que la valeur de *ef*: donc le côté *df* opposé à l'angle *def*, est plus grand que le côté *ef*, qui est opposé à un angle plus petit que *def*.

Dans un tri. rectangle, il est des moyens qui servent à reconnoître les cas où les angles, ainsi que les côtés, sont plus grands ou plus petits que 90 degr. & afin d'abreger le discours, nous dirons désormais que 2 arcs sont de même espece, lorsque nous voudrons annoncer que tous deux sont, ou plus grands ou plus petits que 90 deg., &

qu'ils ſont de différente eſpece, lorſque l'un eſt plus grand, tandis que l'autre eſt plus petit que 90 dégr.

Les angles obliques d'un triangle rectangle ſphérique, ſont toujours de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés. Si *bc*, par exemple (fig. 47), dans le triangle *abc*, eſt plus petit que 90 dégrés; l'angle *a* qui lui eſt oppoſé eſt de même eſpece. Car ſoit mené l'arc *da*, il forme avec *ab* un angle droit, puiſque le point *d* eſt le pole de *ab*; & l'angle *dab* eſt évidemment plus grand que *cab*: donc le côté *cb*, & l'angle *a* qui lui eſt oppoſé dans le même triang., ſont de même eſpece. Dans un triangle *ref*, qui eſt rectangle en *f*, ſi *fr* eſt plus grand que 90 dég., l'angle *ref* qui lui eſt oppoſé, eſt de même eſpece que ce côté. Car le point *a* étant le pole de *def*, l'angle *aef*, qui eſt de 90 dégr. eſt évidemment plus petit que *ref*: par conſéquent, celui-ci eſt plus grand que 90 dégr. Enfin, on peut aſſurer en général, que dans un trian. rectangle quelconque, les angles obliques ſont de même eſpece que les côtés qui leur ſont oppoſés.

Dans les triangles de cette claſſe, la valeur de l'hypothenuſe eſt ſouvent incertaine; mais on décide aiſément de qu'elle eſpece elle peut être, en conſidérant ſi les deux côtés de l'angle droit du même triang. ſont de même ou de différente eſpece. Lorſque ces 2 côtés ſont moindres que 90 dégrés, l'hypothénuſe eſt de la même eſpece, ou plus petite auſſi que 90 dégrés. Car ſoit mené l'arc *da* qui eſt de 90 dégrés, pour lui comparer *ae*. Les angles *adc* & *acb* ſont de même eſpece que *ab*, comme étant oppoſés à ce côté dans deux triangles rectangles *acb* & *adb*; ainſi l'angle *adc* étant plus petit que l'angle *acd*, qui eſt le ſupplément de *acb*, l'arc *ac* doit être plus petit que l'arc *ad*. l'hypothenuſe du triangle *acb*, eſt donc plus petite que 90 dég lorſque les deux côtés de l'angle droit de ce triang., ſont eux-mêmes plus petits que 90 dég.

Si dans un triangle rectangle *rfu*, dont l'angle *f* eſt de 90 dég, les deux côtés *rf* & *uf* ſont tous deux plus grands que 90 dégrés, l'hypothenuſe *ur* doit être plus petite que 90 dégrés. Car en ſuppoſant la conſtruction

connue de la figure 47, les angles *ura* & *uaf* ſont de même eſpece que le côté *ef*, auquel ils ſont oppoſés; l'un dans le triangle *urf*, & l'autre dans le triangle *uaf*. L'angle *ura* eſt donc plus grand que *uar*; & ainſi *ur* eſt inférieur à *ua*, dont la valeur eſt de 90 dégrés. En général l'hypothénuſe d'un triangle ſphérique rectangle eſt donc toujours plus petite que 90 dégrés, lorſque les deux côtés de l'angle droit ſont de même eſpece. Elle eſt au contraire plus grande que 90 dég. lorſque ces deux côtes ſont d'eſpece différente. Car dans un triangle rectangle *ref*, dont le côté *rf* eſt plus grand, & le côté *ef* plus petit que 90 dégres, l'angle *erf* eſt, ainſi que l'angle *eaf* du triangle *eaf*, plus petit que 90 dégrés, comme étant oppoſés à *ef*: par conſéquent l'angle *ear* eſt plus grand que *era*; & le côté *ae* de 90 dégrés, eſt plus petit, que le côté *er* du triangle *era*; c'eſt-à-dire que l'hypothenuſe d'un triang. rectan. ſurpaſſe 90 dégres, lorſque les deux autres côtés du même triangle ſont de différente eſpece.

C'eſt pourquoi, ſoit ſuppoſé abaiſſé du ſommet d'un angle *e*, dans un triangle *def* (fig. 46) un arc *ei*, qui ſoit perpendiculaire ſur le côté oppoſé *df*: cet arc *ei* peut être placé dans l'intérieur, ou en dehors de ce triangle. Il tombe en dedans de l'angle *e*, lorſque les deux autres angles ſont de même eſpece; parce qu'appartenans l'un au triangle rectangle *dei*, & l'autre au triangle rectangle *ife*, ils doivent tous deux être alors de même eſpece que l'arc *ei*, & par conſéquent de même eſpece entr'eux. Mais lorſque l'arc perpendiculaire *ei* tombe en déhors du triangle *def*, les deux angles obliques *d* & *f* doivent être de différente eſpece; car dans ce cas, l'arc *ei* eſt oppoſé, dans un triangle rectangle, à l'un de ces deux angles; & dans un ſecond triangle rectangle, au ſupplément de l'autre angle; ainſi les deux angles obliques *d* & *f* ne peuvent jamais être de même eſpece. C'eſt avec ces remarques qu'on décide ſurement de la poſition de l'arc qui eſt abaiſſé perpendiculairement du ſommet d'un des angles d'un triangle quelconque ſphérique, ſur le côté qui lui eſt oppoſé.

150. Soit *dbc* un triangle ſphérique, dont les côtés ſont dans les plans *dac*, *dab* & *bac* [fig. 48], (le point *a* étant le centre de la ſphere). Soit abaiſſée du point *d*, une ligne droite *di*, qui ſoit perpendiculaire ſur le plan oppoſé *abc*; & du pied *i* de cette ligne, ſoient menées, dans le plan *bac*, les lignes *io* & *iq* perpendiculaires ſur les rayons *ac* & *ab*, qui paſſent par les extrémités des côtés *dc* & *db*. Soit réuni enſuite le point *d* aux points *o* & *q*, par les lignes *do* & *dq*, qui ſont néceſſairement perpendiculaires, l'une ſur *ac*, & l'autre ſur *ab* (124) : la ligne *do* eſt par conſéquent le ſinus de l'arc *dc*; & *dq* eſt le ſinus de *db*. D'ailleurs, les lignes *do* & *oi* étant perpendiculaires au même point, ſur la ſection commune *ac* des deux plans *adc* & *acb*, forment un angle *doi*, qui eſt égal à l'angle ſphérique *dcb*; & par une raiſon ſemblable, l'angle rectil. *dqi* eſt égal à l'angle ſphérique *dbc*.

Conſidérons actuellement les deux triangles rectilign. *dio* & *diq*, qui ſont l'un & l'autre rectangles en *i*. On peut faire, dans le trian. *doi*, cette proportion, *i*:*ſin.doi* ou *ſin.dcb*::*do* ou *ſin.dc*:*di*; & dans le triangle *diq*, celle-ci, 1:*ſin.dqi* ou *ſin.dbc*::*dq* ou *ſin.db*::*di*. Ces deux analogies préſentent les mêmes extrêmes; ainſi l'égalité des produits de leurs moyens conduit à cette nouvelle proportion, *ſin.c*:*ſin.b*::*ſin.db*:*ſin.dc*; c'eſt-à-dire, que les ſinus des angles d'un triangle ſphérique ſont entre eux, comme les ſinus des côtés qui leur ſont oppoſés.

151. Si un triangle ſphérique eſt rectangle, comme *abc* l'eſt en *b* (fig. 47), l'application de ce principe général donne cette analogie particuliere; le rayon eſt au ſinus de l'hypothénuſe, comme le ſinus d'un des ang. obliques, eſt au ſinus du côté qui lui eſt oppoſé. Telle eſt l'analogie fondamentale & diſtinctive des triangles de cette claſſe.

Comme on peut dire auſſi, par les mêmes raiſons, dans le triangle *acb*, *ſin.c*:*ſin.ab*::*ſin.a*:*ſin.bc*; & dans le triangle complémentaire *dec*, *ſin.c*:1::*ſin.de* ou *coſ.a*:*ſin.dc* ou *coſ.cb*; on conclut de ces deux proportions, (diviſées l'une par l'autre, ou termes par termes), cette analogie particuliere, 1:*ſin.ab*::*tang.a*:*tang.bc*, (en écri-

vant la tangente d'un arc, au lieu du ſinus de cet arc diviſé par ſon coſinus). Il eſt donc démontré en général, que dans tout triangle ſphérique rectangle, on peut faire cette proportion; le rayon eſt au ſinus d'un des côtés de l'angle droit, comme la tangente de l'angle oblique adjacent à ce côté, eſt à la tangente du côté qui eſt opposé à ce même angle. Telle eſt la ſeconde analogie fondamentale, qui, avec la premiere, eſt ſuffiſante pour reſoudre toutes les queſtions relatives aux triang. ſphériques rectangles; (en faiſant cependant uſage au beſoin de l'un ou l'autre des deux triangles complémentaires).

Le ſecond principe général eſt que, dans un triangle ſphérique quelconque, ſi on abaiſſe du ſommet d'un des angles, un arc perpendiculaire ſur le côté opposé, les ſinus des ſegmens de ce dernier côté, ſont entr'eux comme les cotangentes des arcs qui leur ſont adjacens. Soit *def* un tel triangle [fig. 46], & *ei* un arc perpendiculaire ſur *df*. On peut faire, dans les triangles rectangles *dei* & *eif*, les proportions ſuivantes, 1:*ſin.di*::*tang.d*:*tang.ei*, & 1:*ſin.if*::*tang.f*:*tang.ei*. Ces proportions ont les mêmes extrêmes; ainſi on peut en conclure que *ſin.di*:*ſin.if*::*tang.f*:*tang.d*, ou ::*cot.d*:*cot.f*; parceque les tangentes de deux arcs ſont en raiſon inverſe de leurs cotangentes (118). Les ſinus des ſegmens, dans un tel triangle, ſont donc dans le rapport des cotangentes des angles qui leur ſont adjacens.

Le troiſieme principe général eſt que, dans tout trian. où un arc eſt abaiſſé, du ſommet d'un de ſes angles, perpendiculairement ſur le côté opposé, les coſinus des deux ſegmens ſont dans le rapport des coſinus des côtés qui leur ſont adjacens. Car ſi, dans le triangle *dec* (fig. 47), qui eſt complémentaire de *abc*, on fait cette proportion, 1:*ſin.cd*::*ſin.d*:*ſin.ce*, qui donne celle-ci, pour le triangle *abc*, 1:*coſ.cb*::*coſ.ab*:*coſ.ac*, on peut dire, dans le triangle *dei* [fig. 46], qui eſt rectangle en *i*, & qui fait partie du trian. *def*, 1:*coſ.ei*::*coſ.di*:*coſ.de*. Le triangle *eif* étant auſſi rectangle en *i*, on peut faire auſſi pareille proportion, 1:*coſ.ei*::*coſ.if*:*coſ.ef*. Ces deux dernieres proportions ont un rapport

commun ; & on en conclut celle-ci, *cos.di:cos.if::cos.de:cos.ef* ; qui est, le troisieme principe général annoncé.

Enfin le quatrieme principe général est que, dans un triangle, si on abaisse du sommet d'un des angles, un arc perpendiculaire sur le côté opposé ; la tangente de la somme des segmens, est à celle de la moitié des deux autres côtés, comme la tangente de la demi-différence de ces mêmes côtés, est à celle de la demi-différence des deux segmens. Car conformément au troisieme principe, on peut dire *cos.ed:cos.ef::cos.di:cos.if* ; & par conséquent, *cos.ed+cos.ef:cos.ed-cos.ef::cos.id+cos.if:cos.id-cos.if*. On a vu (121) que la somme des sinus de deux arcs, est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme de ces arcs, est à celle de leur demi-différence. Ainsi, appliquons cette proposition aux complémens des arcs ; remarquons que la différence de deux arcs est égale à celle de leurs complémens; alors (en substituant, à la place du rapport de la somme des cosinus de deux arcs à leur différence, le rapport indiqué dans la proposition citée) on peut faire la proportion suivante, $cotang.\frac{1}{2}(ed+ef):tang.\frac{1}{2}(ef-ed)::cot.\frac{1}{2}(di+if):tang.\frac{1}{2}(if-id)$. Si les moyens de cette proportion sont changés de place; & si au rapport des cotangentes de deux arcs, on substitue celui inverse de leurs tangentes, on arrive enfin à la proportion suivante, qui est le quatrieme principe général, $tang.\frac{1}{2}(di+if):tang.\frac{1}{2}(ed+ef)::tang.\frac{1}{1}(ef-ed):tang.\frac{1}{3}(if-id)$.

Tels sont tous les principes généraux qui sont nécessaires & suffisans pour la résolution des triangles sphériques quelconques, & on les applique, suivant les questions, soit aux triangles donnés, soit aux triangles qu'on nomme supplémentaires & complémentaires.

152. Dans chaque question de trigonométrie sphérique qui est proposée, il est toujours un choix à faire, parmi ces principes généraux, de celui qui peut conduire immédiatement à la solution demandée ; & ce choix est toujours rendu facile par quelques remarques que nous allons présenter.

1°. Si la question proposée porte uniquement sur

des angles & ſur les côtés qui leur ſont oppoſés dans un même triangle; il n'y a aucun doute qu'on doit employer, pour la reſoudre, le premier principe général; & c'eſt le ſeul cas où il ne devient pas néceſſaire de mener, d'un des angles, un arc perpendiculaire ſur le côté qui lui eſt oppoſé : car dans tout autre cas, un tel arc devient néceſſaire à la ſolution.

2°. Des deux analogies qui ont été indiquées pour ſervir & ſuffire à la réſolution de tous les triangles rectangles, & qui dérivent du premier principe général, l'une ſuppoſe l'hypothénuſe connue ou cherchée, & la ſeconde n'a aucun rapport avec elle. Ainſi les queſtions propoſées appellent pour les reſoudre, l'application de la premiere analogie, lorſqu'elles font mention de l'hypothenuſe; & dans le cas contraire, leur ſolution dépend de la ſeconde analogie.

3°. Le quatrieme principe général n'eſt jamais employé, qu'autant qu'on connoît la grandeur, ou de chacun des trois côtés d'un triangle, ou de ſes trois angles. Dans le premier cas, on mene un arc perpendiculaire, du ſommet d'un angle qui n'eſt ni connu ni cherché, ſur le côté qui lui eſt oppoſé; & dans le 2.e, cette même opération regarde le triang. ſupplémentaire, dont les trois côtés ſont alors donnés. Ce principe ſert à déterminer la ſomme ou la différence des deux ſegmens; & enſuite, à l'aide de la quantité calculée, on cherche la valeur demandée d'un des angles du même triangle.

4°. Si dans une queſtion, il s'agit d'angles & de côtés qui ne leur ſont pas oppoſés, (dans un triangle obliquangle;) alors il faut mener, comme on l'a dit precédemment, un arc perpendiculaire. On cherche enſuite un des ſegmens, par une des analogies des tri. rectangles, formés dans le triangle propoſé, ou dans ſon ſupplémentaire. Après cette détermination, on calcule la partie demandée du triangle propoſé; & l'état ſeul de la queſtion ſert alors à juger s'il faut employer ou le principe qui eſt relatif aux ſegmens & aux côtés correſpondans; ou celui qui préſente les rapports des ſegmens & des angles qui leur ſont adjacens

5°. Lorſque la réſolution d'un triangle obliquangle exige l'application de l'un des trois derniers principes généraux ; il y a une proportion qui devient néceſſaire pour trouver une des parties des triangles rectangles qui ſont formés dans le triangle propoſé. Cette proportion applicable dans tous les cas, eſt que le rayon eſt au coſinus d'un des angles obliques d'un triangle rectangle, comme la tangente de l'hypothénuſe eſt à celle du côté de l'angle droit, adjacent à ce même angle. Elle eſt fondée ſur ce que, dans le triangle *dec*, qui eſt complémentaire de *abc* rectangle en *b* [fig. 47], on peut dire 1:*ſin. de*::*tang.d*:*tang.ec*. Ainſi on peut dire, dans le triangle *abc*, 1::*coſ.a*::*tang.ca*:*tang.ab*; & cette proportion eſt celle qui a été indiquée pour déterminer, (dans un tri. rectangle qui fait partie d'un triangle obliquangle), ou l'un des ſegmens, ou l'un des angles obliques.

153. Indiquons actuellement comment doivent être faites les applications des principes précédens.

Etant donnés, dans un triang. rectang. *abc* (fig. 47), l'hypothenuſe *ca* & le côté *cb*; ſi on demande l'angle qui eſt compris entre ces côtés, on peut le trouver par cette analogie, 1:*coſ.c*::*tang.ca*:*tang.cb*. C'eſt auſſi par une ſemblable proportion qu'on peut calculer, & la valeur d'un côté d'un angle oblique (lorſque cet angle, ainſi que l'hypothenuſe ſont connus); & celle de l'hypothenuſe (étant donnés un angle oblique & un de ſes côtes).

Si, les deux côtés de l'angle droit d'un triangle *abc* étant connus, on demande l'hypothenuſe *ac*; dans ce cas, les analogies ne ſont applicables qu'à un triangle complémentaire, tel que *dec*, où ſont donnés l'angle *d* & l'hypothenuſe *dc*. On fait alors la premiere analogie, puiſqu'il eſt queſtion de l'hypothenuſe *dc*; & on en conclut, que dans le triangle *abd*, on doit faire cette proportion, 1:*coſ.cb*::*coſ.ab*:*coſ.ac*.

Ces exemples ſuffiſent pour indiquer l'uſage, & des analogies fondamentales, & des triangles complémentaires, qui ſervent à la réſolution des triangles ſphériques rectang. Nous n'en ajouterons pas d'autres, parce que en traitant de l'aſtronomie de l'homme de mer, nous aurons

aurons plusieurs occasions de resoudre avec détail des triangles de cette classe.

Dans un triangle obliquangle *def* (fig. 46), si les angles *e* & *f* sont connus, ainsi que le côté *df*, & qu'on demande le côté *de*; l'application du premier principe est clairement indiquée, & on doit faire cette proportion, *sin.e:sin.df::sin.f:sin.de*. Elle sert à déterminer immédiatement l'arc *de*, puisque le terme *sin.de* est seul inconnu dans cette analogie.

Si on connoissoit l'angle *d*, ainsi que le côté *df* & l'angle *f*, on ne trouveroit la valeur de l'angle *e*, qu'en ayant recours au triangle supplémentaire *abc*, dans lequel on meneroit l'arc *cz* perpendiculairement à *ba*. Dans ce dernier triangle, on connoîtroit alors *ab*, *bc* & l'angle *b*, & on calculeroit, dans le triangle partiel *zcb*, la valeur du segment *bz*, en faisant cette proportion, 1:*cos.b::tang.cb:tang.bz* (152). Cet arc *bz* étant ensuite retranché du côté *ba* qui est connu, leur différence seroit le segment *za*; & alors l'arc *ac* cherché, seroit calculé par le moyen du troisieme principe général, qui est que *cos.bz:cos.za.::cos bc:cos.ac*. Le seul terme inconnu de cette analogie seroit *cos.ac*; & le supplément de *ac*, qui devient aisé à connoître, seroit l'angle *e* demandé.

Si dans le triangle *def*, le côté *fe* étoit cherché, au lieu de l'angle *e*, en supposant toujours les mêmes choses connues; alors, dans le triangle supplémentaire, on calculeroit, comme auparavant, les segmens *bz* & *za*, & comme il s'agiroit de ces segmens, & des angles qui leur sont adjacens, il faudroit appliquer le second principe général. On diroit donc, *sin.bz:sin.za::cot.b:cot.a*. Le terme *cotang.a* seroit alors calculé à l'aide de cette proportion, & le supplément de *a* seroit le côté *ef* demandé.

Si les trois côtés d'un triangle étoient connus, & si on demandoit la valeur d'un des angles, il faudroit employer le quatrieme principe, qui n'a d'application que dans ce seul cas. Il feroit connoître la demi-somme ou la demi-différence des deux segmens, tels que *di* & *if*, dans le triangle *def* (en supposant toujours que du som-

met de l'angle e, qui n'eſt pas cherché, on eut mené un arc ei perpendiculaire ſur df). La moitié de cette différence étant retranchée de la demi-ſomme des ſegmens, le reſte ſeroit la valeur du petit ſegment di; & alors, dans le triangle rectangle dei, ſi l'angle d du triangle edf étoit demandé, on feroit, pour le déterminer, cette proportion, $1 : cos.d :: tang.ed : tang.di$.

Nous bornerons ici les indications des applications des principes généraux de la trigonométrie ſphérique; parce que, comme nous l'avons dit relativement aux triangles rectangles, il y aura dans l'aſtronomie de l'homme de mer, des exemples développés de ces mêmes applications. Cependant avant d'abandonner cette matiere, je crois devoir faire connoître la proportion unique qui eſt fournie par l'algebre, pour ſervir à déterminer un angle d'un triangle ſphérique dont les trois côtés ſont connus.

Soit def ce triangle. Nommons $ef, b; de, c; df, p; di, y$, & l'angle cherché edf, d. Puiſque le triangle die eſt rectangle en i, on peut dire, $1 : cos.d :: tang.c : tang.y$; & le troiſieme principe dicte cette analogie, $cos.y : cos.(p-y) :: cos.c : cos.b$, ou $cos.y : cos.p\ cos.y + sin.p\ sin.y :: cos.c : cos.b$. Si on diviſe par $cos\,y$ les termes du premier rapport de cette derniere analogie, on a $1 : cos.p + sin.p\ tang.y :: cos.c : cos.b$; donc $cos.b - cos.p\ cos.c = sin.p\ cos.c\ tang.y$; & comme par la premiere proportion on a l'équation $cos.d\ tang.c = tang.y$, ou $cos.d\ sin\,p\ sin.c = sin.p\ cos.c\ tang.y$; il réſulte du parallele des deux équations précédentes, que $cos.b - cos.p\ cos.c = cos.d\ sin.p\ sin.c$. Rappellons ici que $cos\,d = 1 - 2 sin.\tfrac{1}{2}d^2$ (118), & alors on doit avoir $sin.p\ sin.c - 2 sin.p..sin.c.sin.\tfrac{1}{2}d^2 = cos.b - cos.p.cos.c$, ou $cos.(p-c) - cos.b = 2 sin.p.sin.c.sin.\tfrac{1}{2}d^2$. Il reſte à ſavoir actuellement comment on peut exprimer la différence des coſinus des deux arcs $(p-c)$ & b. Soient, la ſomme de ces deux arcs $(p-c+b) = 2m$, & leur différence $(b-p+c) = 2x$; alors $m+x = b$, & $m-x = p-c$; mais $cos.(m-x) - cos.(m+x) = cos.m\ cos.x + sin.m\ sin.x - cos.m\ cos.x + sin.m\ sin.x = 2 sin.m\ sin.x = 2 sin.\tfrac{1}{2}(p-c+b)\ sin.\tfrac{1}{2}(b-p+c)$: donc en revenant à l'équation qui réſulte des analogies précédentes, & en y ſubſtituant, à la place

de $cos.(p-c)-cos.b$, la quantité qui est égale à cette différence, on obtient l'équation finale $sin p \, sin.c \, sin \frac{1}{2}d^2 = sin \frac{1}{2}(p-c+b) sin. \frac{1}{2}(b-p+c)$. On peut donc toujours faire la proportion suivante, propre à faire trouver l'angle d; $sin.p \, sin.c : sin. \frac{1}{2}(p-c+b) :: sin \frac{1}{2}(b-p+c) : sin. \frac{1}{2}d^2$. Cette analogie unique, dont on peut calculer aisément le 4.e terme par le moyen des logarith., n'exige pas, comme on voit, la connoissance des segmens d'un trian. sphérique, pour arriver à la valeur d'un des angles, dans le cas où les trois côtés sont connus.

154. Les idées que nous avons donné, & d'une sphere, & des cercles qu'on peut décrire sur sa surface, & des angles ou des triangles qu'on peut y former, doivent être actuellement dirigées & appliquées à l'art de la navigation; c'est-àdire, à cet art qui a pour principal objet de déterminer, dans tous les instans, la position du lieu où peut être parvenu un vaisseau, sur l'étendue des mers, après une route connue.

Avant d'entrer dans ces développemens intéressans, examinons comment il est possible de désigner la situation d'un point dans l'espace, lorsqu'il fait partie, ou d'une simple ligne droite, ou d'une surface plane, ou enfin d'un solide.

Tous les points d'une ligne droite sont inégalement éloignés de l'une de ses extrémités. Ainsi en connoissant la distance d'un de ces points à cette extrémité, on sait où il doit être placé, sur la longueur de cette ligne.

Soit un point *o* sur le plan DABC (fig. 51); & soient menées, par le point A choisi sur ce plan, deux lignes DA & AB, qui soient perpendiculaires l'une à l'autre, & qui aient des directions connues, afin qu'elles puissent servir de comparaison pour tous les points du plan supposé. La position d'un point *o* quelconque est toujours déterminée, lorsqu'on connoît sa distance aux 2 lignes fixes AD & AB. Car soit menée par *o* une ligne *cox*, qui soit parallele à AB. Il n'est dans le plan DABC, que les seuls points de *ex*, qui soient placés à une distance *e*A de la ligne AB; & comme ceux-ci sont tous à des distances inégales de AD, il s'ensuit qu'il n'est

qu'un point, non ſeulement ſur *eox*, mais auſſi ſur toute l'étendue du plan, qui puiſſe être en même tems, à telle diſtance donnée *eo* de la ligne AD, & à telle diſtance *ou* de la ligne AB. La poſition d'un point ſur un plan, ou ſur une ſurface plane quelconque, eſt donc toujours déterminée par ſes diſtances à deux lignes fixes, qui ſont menées dans ce plan perpendiculairement l'une à l'autre.

S'il s'agit de déterminer la poſition d'un point dans l'eſpace, il ne ſuffit pas de le comparer à deux lignes; il faut connoître ſes diſtances à trois lignes, qui perpendiculaires entr'elles, ſoient menées ſuivant des directions connues, par un point choiſi dans l'eſpace. Soit C (fig. 44) le point dont il faut déterminer le lieu, & ſoit *i* le point fixe qui ſert de terme de comparaiſon. Imaginons que par ce point, on ait fait paſſer les plans IDEF, IDBH, IHGF, qui ſont ſuppoſés perpendiculaires entr'eux, & dans des ſituations connues. Si par le point C on fait paſſer un plan CBDE, qui ſoit parallele au plan IG, on peut dire alors que de tous les points du ſolide ſuppoſé, il n'y a que ceux du premier de ces plans, qui ſoient à la diſtance CG du ſecond de ces plans (en ſuppoſant GC perpendiculaire au plan IG). D'ailleurs le point C eſt le ſeul de tous les points du plan DC qui ſoit en même tems aux diſtances BC & CE des deux lignes perpendiculaires BD & DE, ou des deux plans IB & IE: donc il n'y a dans l'eſpace qu'un ſeul point C, qui ſoit à des diſtances données des trois plans perpendiculaires ſuppoſés, ou des trois lignes DI, IF & IH, qui ſont perpendiculaires les unes aux autres.

De-là il s'enſuit que dans un ſolide, la poſition d'un point quelconque eſt toujours déterminée, lorſqu'on connoît ſes diſtances à trois plans qui ſont perpendiculaires entr'eux, & placés dans des ſituations connues.

Si on conſidére un point qui appartient à la ſurface d'une ſphere dont le rayon eſt donné, la poſition de ce point peut être déterminée plus ſimplement; c'eſt-à-dire, par ſes diſtances à deux ſeuls plans fixes. Car ſoit un point *r* (fig. 43) de la ſurface d'une telle ſphere, &

ſoient imaginés trois grands cercles dont les plans N*p*S, N*o*S & *od*E ſoient perpendiculaires entr'eux. Suppoſons auſſi, que par le point *r*, on faſſe paſſer un autre grand cercle N*rds* perpendiculaire à *od*E; & que de ce point on abaiſſe des perpendiculaires ſur les trois plans qui viennent d'être indiqués: la connoiſſance des diſtances *re* & *rn*, du point *r* aux deux plans *od*E & N*o*S, ſuffit pour ſavoir quelle eſt la diſtance du même point *r* au plan N*p*S. En effet, le rayon de cette ſphere étant donné, il concourt avec la diſtance *re*, qui eſt le ſinus de l'arc *dc*, à déterminer *ec*, qui eſt le coſinus du même arc. La ligne *e*C=*r*R, eſt le rayon du parallele, qui paſſe par le point *r*, & dont *ar* eſt un arc; alors dans le triangle *rn*R rectangle en *n*, les côtés *r*R & *rn*, qui ſont connus, ſervent à trouver la valeur de *n*R, ou de la diſtance du point *r* au plan N*p*S. Dans une ſphere il ſuffit donc de connoître les diſtances d'un des points de ſa ſurface à deux plans, qui ſont perpendiculaires entr'eux, pour juger de la poſition de ce point.

On peut appliquer complettement ces réſultats au globe de la terre, parce que ſa forme eſt à peu près ſphérique, & parce que la grandeur de ſon rayon a été conclue de la meſure de pluſieurs degrés de ſes grands cercles. Remarquons d'ailleurs que la ligne, ou la diſtance *re*, eſt le ſinus de l'arc *rd*; & que ſa grandeur étant donnée, ainſi que celle du rayon de la terre, on peut en conclure aiſément le nombre des degrés de l'arc *rd*. On conclut auſſi des mêmes données, le coſinus de cet arc *rd*, ou le rayon du parallele qui paſſe par le point *r*. De même étant connue la ligne *rn*, qui eſt le ſinus de l'arc *ar*, dont le rayon eſt R*r*, on peut trouver auſſi le nombre des degrés de l'arc *ra*. Donc réciproquement, étant donnés le nombre des degrés de l'arc *rd*, & celui des degrés de l'arc *ra*, ou de l'arc *od* (parce que ces deux arcs ſont compoſés d'un même nombre de degrés), la poſition du point *r* ſur la ſurface de la terre, doit toujours être déterminée définitivement.

Ce réſultat eſt même confirmé par les réflexions ſuivantes. Imaginons que par le point *r*, on ait fait paſſer un petit cercle parallele au grand cercle *od*E. Tous les

points de la circonférence de ce parallele, ſont les ſeuls de la ſurface de la demi-ſphere N*od*E, qui ayent, à l'égard de la circonférence *od*E, une diſtance *rd* (comptée en dégrés, ſur la circonférence d'un grand cercle perpendiculaire à *od*E). D'ailleurs, ſur le contour de ce parallele dont *ar* fait partie, tous les arcs qui ſont placés entre le point *a* & chacun des autres points de cette circonference, ont une grandeur qui n'eſt pas la même pour deux de ces points quelconques. Donc il n'eſt qu'un ſeul point du contour de ce parallele, qui ſoit, en même tems, à tel nombre de dégrés de diſtance du plan *od*E, & à tel autre nombre de dégrés de diſtance du plan N*o*S. Ainſi en général la poſition d'un point *r* ſur la ſurface de la terre, eſt toujours déterminée par le nombre des dégrés des arcs *rd* & *od*, comme on l'avoit démontré précédemment.

C'eſt en conſidérant les objets ſous ce point de vue qu'il a fallu faire le choix de deux grands cercles dont les plans perpendiculaires l'un à l'autre, ſeroient deſtinés à ſervir de termes fixes de comparaiſon, pour établir la poſition reſpective de tous les points de la ſurface de la terre. Comme on a reconnu par des obſervations particulieres, que la terre tourne ſur elle-même une fois en 24 heures; ſoit NS le diametre autour duquel cette rotation naturelle s'exécute. Ses extrémités N & S ſont les poles d'un grand cercle *od*E, auquel cet axe eſt perpendiculaire. Par cette raiſon, ces points ont reçu le nom de poles de la terre; & le grand cercle *od*E, ſous le nom d'équateur, eſt celui qui a été choiſi par toutes les nations, pour être un des plans de comparaiſon.

L'autre plan de convention eſt bien celui d'un de ces grands cercles, qui, ſous le nom de méridiens, ſont perpendiculaires à l'équateur, & paſſent par les poles de la terre; mais toutes les nations ne ſe ſont pas également accordées dans le choix d'un même méridien. Les Anglais, par exemple, ont adopté le méridien qui paſſe par Londres; & les Français celui de Paris, après avoir abandonné celui de l'île de Fer. Ainſi, pour avoir égard à toutes les convenances, nous donnerons déſor-

mais à ce cercle de comparaiſon, le nom de premier méridien. Ceci ſuppoſe, comme on a dû le remarquer, qu'il n'eſt aucun point de la ſurface de la terre qui n'ait ſon méridien particulier; & on s'aſſure de cette vérité, en reconnoiſſant que par un pole de la terre, & par un point quelconque de ſa ſurface, on peut toujours faire paſſer un grand cercle, qui néceſſairement eſt perpendiculaire à l'équateur, & qui par conſéquent eſt un méridien. On doit auſſi ajouter que, par un point quelconque *r*, on ne peut faire paſſer qu'un ſeul petit cercle, dont le plan ſoit parallele à l'équateur; & par conſéquent, un point quelconque de la terre a non ſeulement ſon méridien, mais auſſi ſon parallele particulier.

Le méridien du point *r* eſt N*rd*S; & le nombre des dégrés de l'arc *rd*, ou de l'arc du méridien qui eſt compris entre ce point *r* & l'équateur, eſt nommé la latitude de *r*. On donne auſſi le nom de longitude de *r* à l'arc *od*, ou à l'arc de l'équateur qui eſt compris entre le méri. N*rd*S & le premier méri. ſuppoſé *NoS*. C'eſt pourquoi la poſition d'un lieu ſur la terre eſt toujours déterminée, (conſéquemment à ces dénominations,) par ſa latitude & par ſa longitude. Cependant elle ne ſeroit pas indiquée avec aſſez de préciſion, ſi on ſe contentoit de la faire connoître par le ſeul nombre des dégrés, ou de l'arc *rd*, ou de l'arc *od*. En effet l'équateur partage la terre en deux hemiſpheres égaux, dont l'un eſt diſtingué par le titre de boréal, parce qu'il contient le pole nord dans ſon étendue; tandis que l'autre reçoit le titre d'auſtral, à cauſe du pole ſud qui eſt ſur ſa ſurface. Ainſi il eſt néceſſairement un point dans l'hémiſphere auſtral qui eſt autant éloigné de l'équateur, que le point *r* de l'hémiſphere boréal. Il faut donc, quand on annonce la latitude d'un lieu, déſigner dans quel hemiſphere il eſt placé; & c'eſt en donnant le titre de boréale ou d'auſtrale à ſa latitude, que l'indication devient ſuffiſante.

Nous remarquerons auſſi que la longitude des lieux de la terre, (qui ſouvent eſt comptée, à partir du premier méridien, depuis o juſqu'à 360 dégrés, dans le

ſens du mouvement journalier de la terre, ou de l'oueſt à l'eſt,) eſt comptée quelquefois, à partir du premier méridien, & de chaque côté de ce plan, depuis o juſqu'à 180 dégrés. D'après ce dernier arrangement, on eſt convenu de donner le titre d'occidentale à la longitude des lieux qui ſont dans l'oueſt du plan du premier méridien. Cette longitude eſt comptée depuis o juſqu'à 180 dégrés, dans le ſens de l'eſt à l'oueſt; & on nomme orientale la longitude des lieux qui ſont dans l'eſt du premier méridien. La poſition d'un lieu ſur la ſurface de la terre eſt donc exactement indiquée par ſa latitude & ſa longitude, en déſignant d'ailleurs ſi ſa latitude eſt Nord ou Sud, & ſi ſa longitude eſt Eſt ou Oueſt.

C'eſt donc auſſi par ſa longitude & par ſa latitude, que le lieu d'un vaiſſeau peut être déterminé ſur la ſurface des mers; & ces élémens ſont les objets continuels de l'attention des navigateurs, lorſqu'ils parcourent les mers avec des vents favorables ou contraires. Cependant il ne leur ſuffit pas d'établir ſur des baſes certaines la poſition de chaque point de la route de leur vaiſſeau, ils ont auſſi beſoin de comparer ſans ceſſe le point où ils ſont tranſportés, à celui qui eſt le but, ou de leur voyage, ou d'une relâche néceſſaire, ou d'une reconnoiſſance utile. Il faut donc aux hommes de mer un tableau exact, ou une image parfaite de la ſurface des mers, pour y rapporter le lieu de leur vaiſſeau, leurs diſtances à divers points, la ſituation de leur route, & ſur-tout pour faire des comparaiſons importantes, qui ſervent à donner à leur marche ſucceſſive, les directions qui peuvent être convenables, ſoit aux circonſtances, ſoit aux projets qu'ils ſe propoſent d'exécuter.

Un ſimple globe en carton, & parfaitement ſemblable à la terre, ne peut ſatisfaire à ces vues, ſoit parce que ſon rayon ne peut être aſſez conſidérable, ſoit parcequ'on ne pourroit y repréſenter, par des lignes d'une étendue ſenſible, ni les routes ordinaires des vaiſſeaux, ni leurs changemens, ſouvent très-petits, ſoit en latitude, ſoit en longitude. D'ailleurs ces routes & ces changemens ſont autant de lignes courbes parcourues ſur la

ſurface des mers; & par conſéquent leur forme les rend peu ſuſceptibles d'être meſurées avec préciſion ſur un globe, ainſi que d'y être tracées ſous leur véritable direction.

Ces difficultés ont donc éloigné l'uſage des globes, dans l'art de la navigation; mais le beſoin de diriger ainſi que de faciliter les opérations de cet art, a obligé de recourir à de nouveaux moyens; & des conſidérations particulieres ont fait connoître que des cartes planes, ou des repréſentations de la ſurface de la terre, qui ſeroient faites ſur des plans, ſuivant certaines conditions, rempliroient parfaitement les vues des navigateurs.

155. *Cartes marines.* Quoique les poſitions des différens points de la terre ſoient déterminées définitivement par leurs longitudes & leurs latitudes; il ne ſuffit pas que des cartes, pour être propres à la navigation, préſentent tous les lieux de la terre, ou tous les points de l'étendue des mers, ſuivant leurs longitudes & leurs latitudes. Il faut auſſi que les diſtances reſpectives de ces mêmes lieux, & telles qu'elles peuvent être parcourues par un vaiſſeau, y ſoient repreſentées, & dans leur vraie ſituation, & ſous une forme qui les rende auſſi faciles à meſurer qu'à tracer, ſuivant les directions qu'elles peuvent avoir. Des lignes droites ſatisferoient à cette derniere condition, s'il n'étoit queſtion que de meſurer ces diſtances; mais il eſt encor néceſſaire que celles-ci ſoient décrites ſuivant leur poſitions reſpectives: ainſi examinons s'il eſt poſſible de trouver l'un & l'autre avantage, en repréſentant ces diſtances par des lignes droites.

Soit comparé le point *c* au point *a* (fig. 102. G) de la ſurface des mers. Le chemin le plus court qui les ſépare eſt, ſans doute, un arc de grand cercle, compris entre ces deux points: mais tel neſt pas le véritable chemin *cea* que parcourt un navigateur, pour ſe rendre du point *c* au point *a*. Obligé de diriger ſa marche à l'aide de la bouſſole, ſa route *cea* eſt toujours telle, que chacun de ſes élémens, ſemblable à *en*, fait un même angle avec tous les méridiens *bd*, *bt*, *bz*, *bq*, &c. qu'elle croiſe dans ſon cours. Cette route, que

nous nommons avec les marins la diſtance des deux points *a* & *c*, & qui eſt parcouru par un vaiſſeau, pour ſe rendre de l'un à l'autre de ces points, eſt donc celle qui doit être repréſentée convenablement ſur une carte marine; Et elle ne peut l'être par une ligne droite, qu'autant que les méridiens de la terre y ſont eux-mêmes repréſentés par d'autres lignes droites qui ſoient paralleles entr'elles.

Examinons par conſéquent ſur quelle baſe ſolide on peut conſtruire des cartes qui (ſous la forme qu'on vient d'indiquer comme néceſſaire) aſſurent aux opérations des navigateurs, autant d'exactitude, qu'elles promettent de commodité.

Soit un eſpace *oqfd* (fig. 43) compris ſur la ſurface de la terre, entre les deux méridiens *dfs*, *oqs*, & les deux arcs paralleles *qf* & *od*. Soit auſſi propoſé de le repréſenter convenablement ſur un plan, en donnant à ſes méridiens la forme de lignes droites paralleles. A cet effet, imaginons que les points de l'eſpace *oqfd* ſoient placés ſur une ſurface ſemblable à celle d'un de ces fuſeaux dont on recouvre un globe de carton, qu'on peut détacher de ce globe & étendre ſur un plan; ou plutôt ſuppoſons que l'arc *oq* d'un des méri. extrêmes de cet eſpace, conſidéré comme un fil qui enveloppe le globe dans cette partie, ſoit étendu en ligne droite, ſans ceſſer d'être perpendiculaire ſur le plan de l'équateur, & ſans ceſſer auſſi de porter l'empreinte des lieux qui ſont ſitués ſur le contour *oq* de cet arc du méridien du globe. En faiſant un ſemblable développement du méridien extrême *df*, ces deux arcs *oq* & *df* deviennent, dans toute leur étendue, les lignes droites *og* & *dy*, qui ſont tangentes au globe en *o* & en *d*. Les points *q* & *f* de la terre ſont alors, par cette opération, tranſportés en *g* & en *y*; & en étendant l'application des mêmes idées aux divers méridiens intermédiaires; tous les points de l'eſpace *odfq* doivent ſe trouver placés ſur l'eſpace *ogyd*. Toutes les portions de ces méri. ſont donc après leur développement, autant de lignes droites perpendiculaires à l'équateur, comme on l'a dit précédemment: ainſi l'eſpace *ogyd* doit appartenir néceſſairement à la ſurface extérieure d'un cylindre droit, parce que

les lignes *og*, *dy*, & les intermédiaires ſont autant de perpendiculaires qui ſont élevées ſur le plan *od*E par chaque point de l'arc *od*. Le côté de ce cylindre a la longueur de *oq*, & ſa baſe entiere feroit un grand cercle de la ſphere, ou l'équateur, ſi tous les méridiens de la terre éprouvoient le changement que nous avons ſuppoſé dans ceux qui correſpondent au ſeul eſpace *odfq*.

Conſidérons actuellement dans cet eſpace *ogyd*, la ſituation reſpective qui réſulte de cette opération, pour tous les points qui ſur la terre ſont répandus dans *odfq*. Leur véritable poſition eſt altérée. Il eſt vrai que la longueur de l'arc du méridien qui ſépare de l'équateur chaque point du globe, eſt exactement égale à celle de la ligne droite, qui, ſur le contour extérieur du cylindre, marque ſa diſtance à *od*: Mais on voit évidemment que l'arc parallele qui, ſur la terre, eſt compris entre chaque point & un méridien extrème *oqs*, n'eſt pas repréſenté ſur le contour du même cylindre, par un arc qui lui ſoit égal en longueur. C'eſt ainſi que l'arc *fq* du globe eſt repréſenté, ſur un tel cylindre, par un arc *gy*, qui eſt plus grand que *fq*, puiſqu'il eſt égal à *od*. Les diſtances reſpectives de divers points ſur la terre ne peuvent donc pas être les mêmes ſur la ſurface du cylindre ſuppoſé; c'eſt pourquoi, en repréſentant des arcs de méri., tels que *oq* & *of*, par des lignes droites qui ſoient paralleles & égales en longueur à ces arcs; c'eſt-àdire en ſatisfaiſant à une des conditions fondamentales de la forme propre à des cartes marines; l'autre condition eſt bien éloignée d'être remplie.

Il ne paroît donc pas encore poſſible de conſtruire de cette maniere, des cartes convenables d'une grande portion de la ſurface de la terre. Mais imaginons que cet eſpace *odfq* ſoit partagé en petites ſurfaces partielles, telles que *ekfq*, dont l'étendue *kf* dans le ſens du méridien, ſoit ſi petite, qu'on puiſſe régarder l'arc *fk* comme une ligne droite. Alors la différence des arcs paralleles *fq* & *ke* ne peut être qu'inſenſible, & ces arcs peuvent, par conſéquent, être regardés comme égaux. Si d'ailleurs les arcs *eq* & *kf* des méridiens extrêmes de cet eſpace partiel, ainſi que ceux des méri-

diens intermédiaires, ſont ſuppoſés, comme précédemment, être étendus en lignes droites, qui ſont perpendiculaires à l'équateur; l'eſpace $fkeq$ peut dès-lors être conſidéré comme une partie de la ſurface extérieure d'un petit cylindre droit & particulier, qui auroit pour hauteur la longueur de kf, & pour baſe entiere un petit cercle parallele, dont fq eſt un arc.

Suppoſons actuellement qu'on ſe propoſe de tracer, ſur la ſurface extérieure d'un plus grand cylindre droit, dont la baſe ſeroit un cercle égal à l'équateur, une figure parfaitement ſemblable à celle qui réſulte du développement de $ekfq$, & qui eſt tracée ſur un cylindre droit, dont la baſe, comme nous l'avons dit, n'eſt qu'un petit cercle parallele dont fq eſt un arc. On y parvient en rendant proportionnels les côtés des deux figures ſuppoſées : il faut donc que leurs hauteurs ſoient proportionnelles aux circonferences de leurs baſes, ou que la hauteur de la figure tracée ſur le contour du grand cylindre, ſoit à eq, hauteur de celle qui eſt tracée ſur le petit cylindre, comme la longueur de od ſur le premier, eſt à celle de qf ſur le ſecond. Cela ſignifie en d'autres termes, que l'étendue en latitude d'un eſpace partiel $eqfk$ de la ſurface du globe, doit être repréſentée ſur le contour du grand cylindre, par une ligne qui ſoit à la longueur de kf, dans le rapport des arcs od & qf, qui ſont d'un même nombre de degrés. Rappelons-nous d'ailleurs que le rapport des arcs od & qf, eſt celui du rayon du globe au coſinus de l'arc oq, qui eſt le coſinus de la latitude du point q, ou le rapport de la ſécante de la latitude du point q au rayon. Ainſi la hauteur x de la figure tracée ſur le grand cylindre, doit être déterminée par cette proportion, $x : eq :: séc.$ *latitude du point* $q : 1$. L'arc eq a été ſuppoſé aſſez petit pour être conſidéré comme une ligne droite. C'eſt pourquoi attribuons-lui la grandeur d'une minute d'un dégré de grand cercle, ou la 21600ᵉ partie de la circonférence de l'équateur. Nommons m cette longueur d'une minute de dégré de grand cercle ſur la ſphere, & M la ligne qui la repréſente ſur le cylindre circonſcrit, (ſous le nom de minute de latitude croiſſante). On doit

alors faire cette proportion, $M:m::sec.oq:1$, ou $M=m.sec.oq$. Cette formule peut donc faire trouver la valeur de M, ou de chaque minute de latitude croiſſante, qui repréſente l'étendue d'une minute *eq* du méridien du globe, ſur la ſurface extérieure du cylindre ſuppoſé.

Si on étend ce raiſonnement & ſes réſultats à toutes les portions de l'arc *oq* du méridien, & à tous les eſpaces partiels dont *oqfd* eſt compoſé; on doit juger qu'on peut, ſans erreur ſenſible, marquer ſur la ſurface extérieure du cylindre déjà indiqué, des petits eſpaces, qui, placés à la ſuite les uns des autres, repréſentent des parties de la ſurface de la terre. Ces parties, telles que *eqfk*, ont chacune l'étendue d'une minute en latitude, & leur nombre eſt le même que celui des minutes de l'arc *oq*. L'enſemble de ces ſurfaces partielles, qui ſeroient ainſi tracées ſur le contour extérieur de la portion *odst* du cylindre indiqué, repréſenteroit alors la ſurface entiere *oqfd*. Remarquons actuellement que le développement d'un cylindre droit & entier, tel que ſeroit *onpm* (fig. 4), eſt un parallélogramme *da bc* (fig. 2) qui a pour hauteur le côté du cylindre, & pour baſe la longueur de la circonférence de la baſe même du cylindre. C'eſt pourquoi le développement de cette portion cylindrique *otsd* [fig. 43], eſt donc auſſi un parallélo. recta., qui a pour baſe la longueur de *od*, & pour hauteur la ligne *to*. Cette derniere ligne eſt la ſomme de toutes les minutes de latitude croiſſante, qui repréſentent les minutes de l'arc *oq*: ou elle eſt égale au produit de l'étendue d'une minute de grand cercle, multipliée par la ſomme des ſécantes des latitudes de tous les points de l'arc *oq* du méridien.

Un parallélogramme ainſi conſtruit, & ſur lequel ſont placés, ſuivant les indications indiquées, tous les points de l'eſpace ſphérique *oqfd*, porte avec raiſon le nom de carte marine, ou de carte reduite. Car les méridiens y ſont repréſentés par des lignes droites paralleles, comme l'exigent les beſoins des navigateurs; & par conſéquent, les routes des vaiſſeaux, ou les diſtances reſpectives des lieux de la terre y ſont repréſentés par autant de lignes droites menées d'un de ces lieux à un autre.

Après avoir exposé comment une portion de la surface du globe peut être représentée convenablement sur un plan, il est à-propos de détailler comment, étant données les latitudes & les longitudes de tous les points embrassés par une mer particuliere, on peut construire la carte reduite de cette mer.

Soit une partie *aczr* (fig. 43) de la surface de la terre, qui est telle, que son étendue *ac* en latitude, est de 30 dégrés, & son étendue *od* en longitude de 25 dégrés, (en supposant d'ailleurs que le point extrême *r* soit placé par 60 dégrés de latitude nord & 2 dégrés de longitude ouest). Si on propose de faire de cet espace une carte reduite, on mene (fig. 49) une ligne DC, qui représente la longueur de l'arc *od* (fig. 43), ou qui soit d'autant de parties égales, qu'il y a de minutes dans cet arc. On éleve ensuite, sur cette ligne, & à ses deux extrémités D & C, les perpendiculaires CB & DA, pour représenter les deux portions *ca* & *zr* des méridiens extrêmes de l'espace proposé; & ces lignes doivent être composées d'autant de parties, qu'on compte de minutes dans l'arc *ac*. Chacune de ces parties inégales, qui est faite pour représenter l'étendue d'une minute du méridien du globe, doit être déterminée séparément par la formule précédente. Chacune peut l'être aussi par une construction géomé. Car soit (fig. 28) représentée par *ac*, la longueur qu'on a donné, sur la ligne DC de la carte, à l'étendue d'une minute de grand cercle. Soit menée ensuite par le point C, une ligne C*i*, qui fasse avec *ca* un angle égal à la latitude du lieu qu'occupe une certaine minute du méridien sur le globe; & soit élevée au point *a* une perpendiculaire *ai* sur *ac*: l'hypothénuse *ci* de ce triangle rectangle ainsi construit, est l'étendue que doit avoir sur la carte la minute supposée du méridien du globe. Car dans ce triangle, on peut dire, $ac:ci::cof.lat.:1::1:fec.lat.$ Mais on a vu plus hautque $m:M::1:fec.lat.$: donc *ac* étant supposé représenter l'étendue d'une minute de l'équateur, *ci* doit être celle de la minute de latitude croissante qui correspond à la minute supposée du méridien du globe.

On voit qu'en faisant autant de triangles séparés qu'il y a de minutes dans l'arc *ac* du globe, on trouveroit successivement l'étendue de toutes les minutes de latitude croissante, ou de toutes les parties du méridien de la carte, qui correspondent à l'espace *aczr* du globe. On peut aisément s'appercevoir que cette étendue augmente à mesure que la latitude de chaque partie du méridien est plus considérable; & c'est ce changement de grandeur qui a fait donner aux minutes du méridien de la carte, le nom de minutes de latitude croissante.

La valeur particuliere de chaque minute du méridien de la carte étant déterminée par le calcul ou par la construction indiquée, on porte ces longueurs, à la suite les unes des autres, sur la ligne CB, & on acheve le parallélogramme rectangle ABCD, qui devient ainsi le cadre préparé de la carte demandée. On marque alors, à côté du point C, (qui représente le point *z* du globe) le nombre 30, pour indiquer que sa latitude est de 30 dégrés. Au-dessous de ce point, on écrit le nombre 2, parce que sa longitude est de 2 degrés. Les divisions inégales du méridien, sont aussi numérotées depuis 30 jusqu'à 60 degrés; & les divisions égales, de CD qui représente une portion de l'équateurdu globe, portent aussi des numéros, depuis 2 jusqu'à 27 degrés. Après ces préliminaires, il est facile de placer sur la surface de cette carte, tel point quelconque qui appartient à l'espace *aczr* du globe, lorsqu'on connoit sa latitude & sa longitude. Car soit proposé d'y placer un lieu qui est supposé avoir 42 dégrés de latitude N, & 20 dégrés de longitude O. On mene par la division numérotée 42, sur le méridien BC, une ligne droite parallele à l'équateur DC. Cette ligne est nécessairement le parallele du lieu proposé. Ensuite on mene par la division de l'équateur CD, qui est numérotée 20, une ligne qui est perpendiculaire à la premiere, & qui représente le méridien du lieu. Alors l'intersection des deux lignes ainsi tracées, est le point de cette carte où doit être placé le lieu proposé. puisque ce point a sur cette carte, & la lati- & la longitude qui ont été indiquées. Tous les autres

lieux de l'espace terrestre *aczr* sont établis sur la carte par un semblable procédé; & on réunit par de petites lig. convenables, ceux qui, par exemple, doivent former ensemble le contour d'une côte.

On trace aussi de cette maniere la forme, soit des mers, soit des golphes, soit des bayes, soit des îles, &c.; & on parvient à faire une carte d'une partie plus ou moins étendue de la surface de la terre.

Sans doute tous les lieux de la terre ainsi placés sur une carte reduite, ont les mêmes différences en latitude & en longitude, qui regnent entr'eux sur le globe; mais il reste encore à démontrer, d'après la construction de ces cartes, que les distances des lieux qui y sont dessinées, non seulement représentent parfaitement celles de ces mêmes lieux sur le globe; mais aussi qu'elles y ont des directions propres à indiquer l'air de vent que doit suivre un vaisseau, pour se rendre d'un de ces points à un autre.

Soient deux points *a* & *c* (fig. 102. G) de la surface de l'océan; & imaginons, pour nous conformer à la méthode des hommes de mer, une courbe *cea*, qui, menée de l'un à l'autre de ces points, représente la route directe d'un vaisseau. Cette courbe est telle, que tous ses élémens *ne* font avec les méridiens qu'elle croise dans son cours, des angles *nem*, qui sont tous d'une même grandeur. Cette route *cea* est ce que nous avons nommé, avec les marins, la distance des points *c* & *a*. Soit partagée cette courbe en une infinité de petits élémens, tels que *ne*; & qu'on peut considérer comme autant de petites lignes droites. Soient aussi menés par leurs extrémités, & des méridiens, & des paralleles. L'arc du méridien *bt*, qui correspond à l'un des élémens *ne*, est *me*; & l'arc *mn* est celui du parallele qui correspond au même élément. Nommons *r* l'angle *nem* de cet élément avec son méridien *bt* (angle qui porte la dénomination de rhumb de vent). Alors dans le triangle *enm*, qu'on doit regarder comme rectiligne, & qui est rectangle en *m*, on peut faire cette proportion, $1 : cos. r :: ne : em$. Si pour chaque autre élément de la route *aec*, on construit un triangle, tel que *enm*, ces triangles

gles doivent être tous ſemblables; puiſque tous ayant un ang. droit, ont auſſi un même ang. *r*. On peut donc dire qu'entre chaque élément de la route d'un vaiſſeau, & la partie du méri. qui lui correſpond, il y a un même rapport, qui eſt celui du rayon au coſinus du rhumb de vent. On peut donc faire une ſuite infinie de rapports égaux; & d'une telle ſuite, on doit conclure que la ſomme de tous les élémens de la route, ou la diſtance entiere *cea* de deux points donnés ſur le globe, eſt à la ſomme des parties du méridien qui correſpondent à ces divers élémens, ou a la différence des latitudes de ces deux points, comme 1:*coſin.r*. Soient nommées, C la diſtance *cea* de ces points, & D la différence de leur latitudes exprimées en parties du méridien du globe; on doit faire cette proportion, C:D::1:*coſ.r*.

Dans la carte reduite, telle que ABCD (fig. 49), ſoit menée une ligne *os*, pour réunir les points *s* & *o*, qui repréſentent les lieux *c* & *a* du globe (fig. 102. G). Si par l'un de ces points S, on fait paſſer un parallele *y*S, & par l'autre un méridien *oy*, alors on forme ſur la carte un triangle rectangle *o*S*y*. L'hypothénuſe eſt la diſtance indiquée des lieux donnés, & l'angle *yo*S eſt le rhumb de vent déſigné, d'après lequel la route doit être faite par un vaiſſeau, pour arriver du point *c* au point *a*. Remarquons auſſi, que le côté *oy* de l'angle droit eſt une partie du méridien de la carte, qui eſt la différence des latitudes croiſſantes des deux lieux *a* & *c*; & qu'il vaut autant de fois 20 lieues marines, qu'il repréſente de degrés du globe, ou qu'on compte de degrés ſur la terre, dans la différence des latitudes terreſtres des points ſuppoſés. Le côté *y*S du même angle droit vaut auſſi autant de fois 20 lieues, qu'il y a de degrés dans la différence en longitude de *a* & *c*.

Il faut vérifier actuellement ſi l'ang. *yo*S de la carte, ou le rhumb de vent qu'elle indique, eſt le même que l'angle *nem* des élémens de la route *ca* ſur le globe. Imaginons la diſtance *o*S partagée en autant de petits élémens, qu'on en compte dans la route *cea* qui eſt ſur le globe. Suppoſons auſſi des méridiens & des pa-

ralleles qui paſſent par les extrémités de ces élémens; & conſiderons entre les triang. ainſi formés, le triang. *uri* qui correſpond au triangle *nme* (fig. 102. G. & 49). Ces deux triangles ſont ſemblables, car ils ont chacun un angle droit; & on ſait d'ailleurs, par la conſtruction des cartes, qu'on peut faire ces proportions, *ur*:*me*:: 1:*coſ.lat.*; & *ri*:*mn*::1*coſ.lat.*; donc *ur*:*me*::*ri*:*mn*; donc les triangles *uri* & *nme* ſont ſemblabes, comme ayant un angle égal compris entre deux côtés proportionnels. l'angle du rhumb de vent *nem* de la route ſur le globe, eſt donc égal à l'angle *rui* ou *yos*, qui eſt indiqué ſur la carte. Cette carte préſente donc l'air de vent convenable ſur lequel doit être dirigé un vaiſſeau, pour ſe rendre ſans détour d'un point du globe à un autre point. La diſtance de ce point, ou le chemin de ce vaiſſeau, n'y eſt pas moins tracé avec exactitude. Car dans le triangle *oys*, on peut faire cette proportion, *oS*:*oy*::1: *coſ.r*; mais les calculs faits immédiatement pour la route réelle *cea* tracée ſur le globe, ont donné pour réſultat la proportion C:D::1:*coſ.r*; donc en comparant ces deux proportions, on en conclut que *oS*:*oy*::C:D. Or, comme on l'a dit plus haut, la ligne *oy* vaut autant de fois un tiers de lieue, que D contient de fois l'étendue d'une minute de dégré du globe : par conſéquent *oS* doit valoir autant de fois un tiers de lieue, que la route *cea* contient de fois l'étendue d'une minute de dégré du globe.

La ligne *oS* repréſente donc parfaitement ſur la carte la longueur de la route *cea*, qui ſépare deux points donnés C & *a* ſur la ſurface du globe. Il faut ſeulement pour faire une juſte évaluation de cette ligne *oS* en lieues marines, meſurer ſa longueur d'après une baſe convenable; & l'échelle qu'il faut employer eſt évidemment la partie du méridien de la carte, qui eſt la différence des latitudes croiſſantes des deux points propoſés. Car la ligne *oS*, étant dans la proportion précédente un terme homologue à la ligne *oy*, doit être meſurée ſur une échelle qui eſt commune à ces deux lignes. La ligne *oy* contient autant de tiers de lieue, qu'elle repréſente de minutes du méridien du globe; par conſéquent autant de

fois la longueur de *oS* contient la ligne *oy*, autant elle vaut de fois le nombre des lieues que *oy* représente. Il faut donc, pour mesurer *oS*, donner à un compas une ouverture qui égale *oy*, & la porter sur la route *os*, autant de fois & de parties de fois, qu'elle peut y être contenue, pour en conclure la distance des lieux supposés, ou le nombre des lieues de distance.

En rassemblant toutes les considérations précédentes, il est donc bien démontré que les cartes reduites sont telles qu'elles doivent être desirées par les hommes de mer. Car elles leur présentent, avec toute la vérité nécessaire, non seulement les longitudes & les latitudes des divers points des mers, mais aussi la grandeur réelle du chemin qu'un vaisseau doit parcourir, ainsi que la direction que sa marche doit recevoir, pour parvenir par une route convenable, d'un point du globe à tout autre point de sa surface.

Si nous sommes entrés dans des détails si étendus, c'est qu'étant essentiels, ils ne se trouvent dans aucun ouvrage connu, & qu'ils sont nécessaires pour convaincre ceux qui exercent la navigation, non seulement que les opérations qui leur sont indiquées donnent des résultats exacts, mais aussi que les cartes reduites exigent de la part des hommes qui en font usage, une connoissance approfondie de leur construction, afin d'éviter des méprises toujours dangereuses à commettre. D'ailleurs les développemens précédens sont utiles, non seulement pour l'intelligence des cartes marines, mais aussi pour la réduction des routes des vaisseaux; c'est-à-dire pour la recherche du lieu où se trouve placé sur le globe, un vaisseau qui a fait une route dont la longueur & la direction ont été mesurées. C'est cette derniere question qui nous reste à aborder, & les réflexions précédentes sont propres à faciliter, ainsi qu'à éclaircir sa solution.

156. *Réduction des routes des vaisseaux.* Si un vaisseau a fait une route *cea*, dont la longueur a été estimée à l'aide du lok, & dont la direction a été déterminée par le moyen de la boussole (en ayant d'ailleurs égard, soit à la dérive, soit à la variation de l'aiguille

aimantée); on demande quel eſt le point de la mer, où il eſt arrivé. La poſition de ce point ſur le globe, dépend de ſa latitude & de ſa longitude; & comme celle du point de départ ou du point initial de la route eſt ſuppoſée connue, il ne reſte, pour déterminer la premiere, qu'à trouver le chemin fait par le vaiſſeau, ſoit en latitude, ſoit en longitude. Au point c du départ, la latitude du vaiſſeau étoit cd, & tranſporté au point a, ſa latitude eſt devenue aq. Ainſi il a varié en latitude de toute la différence des arcs aq & cd.

Le chemin du vaiſſeau en latitude eſt compoſé, comme on l'a dit précédemment, de tous les chemins partiels, tels que me, qui correſpondent aux élémens de la route cea. De même le chemin qu'il a fait en longi. eſt l'aſſemblage de tous les petits chemins, tels que zt, qui, ſur l'équateur, correſpondent aux mêmes élémens de la route. Déjà nous avons vu qu'on peut calculer tous les petits chemins en latitude, par cette proportion, $1:cof.r::C:D$ (où r exprime le rhumb de vent, C la longueur de la route, & D le chemin du vaiſſeau en latitude), & les logarithmes rendent prompte & facile l'opération qui tend à déterminer le quatrieme terme de cette proportion, dont les trois autres ſont ſuppoſés donnés. Ils ſervent ainſi à faire connoître le chemin en latitude qui correſpond à la route entiere du vaiſſeau. Si l'uſage du calcul par logarithmes, promet des réſultats ſûrs & précis, la néceſſité de rendre commodes & preſque mécaniques ces dernieres opérations, qui reviennent ſi fréquemment dans la pratique de l'art de la navigation, invite auſſi à faire uſage de quelque nouveau moyen. En conſéquence, nous allons faire voir comment on peut déterminer, par une opération graphique, ou par une conſtruction géométrique, le chemin en latitude, qui d'ailleurs eſt donné par le calcul direct qu'on vient d'indiquer.

La proportion $1:cof.r::C:D$ peut convenir à un triangle rectiligne rectan. qui ſeroit formé convenablement. En effet, ſoit menée, par un point e (fig. 50), une ligne méridienne ea. Si on fait paſſer, par le même point e une ligne ec, qui faſſe avec ea un angle égal au

rhumb de vent obſervé à bord d'un vaiſſeau, & dont la longueur *ec* ſoit d'autant de parties égales, qu'on compte de lieues dans la route meſurée du vaiſſeau; & ſi enfin, par l'extémité *c* de *ec*, on abaïſſe une perpendiculaire *cd* ſur la ligne nord & ſud *ed*; le chemin en latitude doit être repréſenté par cette ligne *ed*. Car dans le trian. rectangle qui eſt ainſi conſtruit, on peut dire, 1:*coſ.e*::*ec*:*ed*, ou 1:*coſ.r*::C:*ed*. Ce quatrieme terme *ed* doit donc être le même que celui de la proportion fondamentale 1:*coſ.r*::C:D, qui a les trois premiers termes communs avec la proportion tirée de ce triangle; & il s'enſuit que *ed* doit être la différence cherchée en lati. On connoît la long.de cette ligne en lieues, par le nombre des parties égales qu'elle contient (en ſuppoſant que ces parties ont la longueur de celles qui compoſent la route *ecd*; & on la reduit en dégrés, en diviſant par 20 le nombre de lieues qu'elle peut valoir. Car, comme on l'a dit ailleurs, l'étendue d'un dégré du méridien eſt de 20 lieues marines. Ce chemin en latitude fait par le vaiſſeau qui a ſuivi la route *cea* (fig. 102. G), eſt la quantité dont il s'eſt éloigné de l'équateur *qd*. Il ſe feroit avancé vers ce cercle de la même quantité, ſi ſa marche eut été dirigée de *a* & *c*. Ainſi la différence trouvée en latitude, eſtimée en dégrés & parties de dégrés, doit être ajoutée ou ôtée, ſuivant les circonſtan- à la latitude de départ, afin que leur ſomme, ou leur différence devienne la latitude du point d'arrivée du vaiſſeau; c'eſt-à-dire, du point extrême de ſa route. On voit que la conſtruction du triangle *dec*, & la meſure de ſes côtés ſont des opérations mécaniques qui peuvent être exécutées avec la regle & le compas.

Le chemin en longitude qui correſpond à la route *cea* ſuppoſée d'un vaiſſeau, eſt *dq*; & il y a deux moyens pour en déterminer la grandeur. L'un eſt d'un uſage très-général & très-commode, quoiqu'il ſoit quelquefois un peu inexact; & l'autre, dont les réſultats ſont plus précis, demande plus de lumieres dans les calculateurs. La route *cea* étant toujous ſuppoſée diviſée en une infinité de parties égales, le petit arc parallele *nm*, qui correſpond à un de ſes élémens *ne*, eſt la quantité

dont le vaiſſeau s'avance de l'eſt vers l'oueſt, ou de l'oueſt vers l'eſt, lorſqu'il eſt transporté de *e* en *n*. C'eſt pourquoi on donne à *mn* le nom de chemin parallele, ou de chemin eſt & oueſt. Tous les petits chemins, tels que *nm*, qui correſpondent aux élémens de *cea*, étant calculés & réunis enſemble, doivent donc exprimer par leur ſomme, combien le vaiſſeau, par ſa route entiere, s'eſt avancé dans le ſens des paralleles; & c'eſt une telle ſomme qu'il faut déterminer, pour en conclure enſuite le chemin total *dq* du vaiſſeau en longitude. Dans le triangle *nme*, qu'on a déjà décrit ailleurs, on peut faire cette proportion, 1:*ſin.r*::*ne*:*mn*. Pareille proportion peut être faite pour chaque élément de la route; & comme chacune préſente le même rapport de 1:*ſin.r*, tous les rapports qui les compoſent ſont égaux. De la ſuite de ces rapports, on peut donc conclure cette proportion : la longueur de la route *cea*, eſt à la ſomme de tous les chemins partiels *mn*, ou au chemin parallele entier, comme 1:*ſin.r*. Nommons P ce chemin eſt & oueſt; & on doit dire 1:*ſin.r*::C:P. C'eſt par une telle proportion qu'on peut calculer la valeur de P, puiſque la grandeur de la route d'un vaiſſeau & ſa direction ſont ſuppoſées données. Ce chemin P eſt alors repréſenté par *cd* (fig. 50), dans le triangle rectangle *cde*, dont on a déjà indiqué la conſtruction. Car on peut y faire cette proportion, 1:*ſin.e* ou *ſin..r*::*ec* ou C:*cd* ou P. Le chemin eſt & oueſt fait par un vaiſſeau, peut donc être trouvé, ou par le calcul, ou mécaniquement. Ce chemin n'eſt pas, comme on peut le voir, la quantité *dq*, dont le vaiſſeau s'eſt réellement avancé en longitude; mais il eſt un aſſemblage d'une infinité de petits chemins qui ont été courus ſur divers paralleles, & qui doivent ſervir à faire juger du changement *dq* en longitude. Ces paralleles, qui ſont ſitués entre les points *c* & *a*, de départ & d'arrivée, varient en grandeur comme en rayon, ſelon leur diſtance à l'équateur *qd*; & pour parvenir au réſultat cherché, voici comme on a raiſonné. On a regardé la diminution des circonférences de ces paralleles comme graduelle & proportionnelle à leur éloignement de l'équateur. On a ſuppoſé

en conſéquence que la ſomme des petits chemins paralleles, ou que le chemin *cd* (fig. 50) eſt la longueur d'un arc parallele *fg* (fig. 102. G), dont la latitude *fq* tient le milieu entre la latitude *cd* du départ, & celle *aq* du point d'arrivée.

En imaginant ainſi aſſez gratuitement (& ſans égard à la rigueur qu'on doit mettre dans les démonſtrations) une égalité parfaite entre la ligne *cd* & la longueur de l'arc *fg*, on a rendu facile la recherche de l'arc *qd*, qui eſt du même nombre de dégrés que *fg*, & qui eſt le chemin dont le vaiſſeau s'eſt avancé en longitude par ſa route *cea*. En effet les longueurs des arcs *qd* & *fg* ſont entr'elles comme les rayons de ces paralleles, ou comme le rayon eſt au coſinus de la latitude *fq* du moyen parallele *fg*. Le chemin L en longitude peut donc alors être determiné par cette proportion L:P::1:*coſ.mp* (en indiquant par *mp* le moyen parallele *fg*); c'eſt-à-dire que le chemin du vaiſſeau, eſt toujours au chemin qu'il a fait eſt & oueſt, ou dans le ſens des paralleles, comme le rayon eſt au coſinus de la latitude du moyen parallele. Le terme cherché de cette proportion peut auſſi être trouvé mécaniquement & par une opération graphique. Car ſi on trace (fig. 32) une ligne *en*, qui repréſente le chemin trouvé eſt & oueſt, & qui ſoit égale à *cd* (fig. 50); ſi par le point extrême *e*, on fait paſſer une ligne *ec*, qui faſſe avec la premiere un angle égal à la latitude du moyen parallele; & ſi enfin, par l'autre extrémité *n*, on éleve une perpendiculaire; on forme un triangle *cne* qui eſt rectangle en *n*, & dont l'hypothénuſe *ec* repréſente le chemin cherché en longitude. Car une des proportions qu'on peut faire dans ce triangle eſt celle-ci, *coſ.e* ou *coſ.mp*:1::*ne* ou P:*ec* ou L; par conſéquent les parties égales dont *en* eſt composée, repréſentant la grandeur d'une lieue, le nombre de fois que la longueur d'une de ces parties eſt contenue dans la ligne *ec*, doit être celui des lieues faites en longitude. Ce chemin *ec* eſt enſuite eſtimé en degrés, à raiſon de 20 lieues par degré; & enfin on parvient à déterminer la longitude du point d'arrivée du vaiſſeau, en ajoutant ou en ôtant ce chemin à la lon-

gitude du point de départ. Celle-ci eſt diminuée du chemin fait en longitude, lorſque la route a porté le vaiſſeau dans l'oueſt ; & elle doit en être augmentée, ſi le vaiſſeau a couru dans l'eſt de ſon point de départ, (en ſuppoſant que la longitude ſoit comptée de l'oueſt à l'eſt, depuis o juſqu'à 360 dégrés).

Nous avons remarqué qu'il y a peu de juſteſſe dans la ſuppoſition précédente, ſavoir que l'arc de parallele dont la latitude tient le milieu entre celles des points de départ & d'arrivée, a une longueur égale au chemin eſt & oueſt, puiſque les arcs paralleles compris entre les méridiens *bd* & *bq* (fig. 102. G), depuis *a* juſqu'en *c*, n'ont pas des longueurs qui décroiſſent en progreſſion arithmétique. Les erreurs que cette ſuppoſition peut entraîner rendent donc néceſſaire la recherche d'une méthode rigoureuſe, qu'il eſt convenable d'employer pour déterminer le changement d'un vaiſſeau en longitude, lorſqu'il fait une route *cea*.

En parcourant un élément *ne* de cette route, un vaiſſeau s'avance réellement de la quantité *mn* dans le ſens des paralleles, & il change de la quantité *zt* en longitude. Dans le triangle *men* on peut faire la proportion 1:*me*::*tang.r*:*nm*. Enſuite ſi on compare l'arc *nm* avec ſon correſpondant *zt*, qui ſur l'équateur eſt du même nombre de dégrés, on peut faire auſſi cette proportion 1:*ſec.mt*::*mn*:*zt* (on met ici ſecante de *mt*, parce que cet arc *mt* eſt la latitude de l'élément infiniment petit *ne* de la route *cea*). Les produits des termes de ces 2 proportions, multipliés par ordre, forment la proportion ſuivante (après les réductions néceſſaires) 1:*me.ſec.mt*::*tang.r*:*zt*. Mais le produit particulier *me.ſec.mt.*, eſt, comme on l'a vu (155), la partie de latitude croiſſante, ou du méridien de la carte reduite, qui correſpond à l'élément *ne*: donc ſi on repréſente par *l* cette partie du méridien, que nous nommerons avec les Anglois partie méridionale, on peut transformer la derniere proportion en celle-ci, 1:*tang.r*::*l*:*zt*. Appliquons le même raiſonnement à chaque élément de la route entiere *cea*, il conduit à autant de proportions qui préſentent toutes le rapport commun de 1:*tang*.r. On peut

donc dire, que la ſomme de toutes les parties méridionales qui correſpondent à la route entiere d'un vaiſſeau, eſt au chemin total de ce vaiſſeau en longitude, comme le rayon eſt à la tangente du rhumb de vent. C'eſt par cette proportion qu'on détermine auſſi directement qu'exactement le chemin en longitude d'un vaiſſeau qui a fait une route connue, & dont on a calculé ou meſuré le chemin en latitude.

Remarquons que cette ſomme des parties méridionales qui correſpondent à la route entiere, n'eſt autre choſe que la difference des latitudes croiſſantes du point de départ & de celui d'arrivée. Ainſi en nommant *d* cette différence, & en conſervant les dénominations précédentes, le chemin *z* en longitude eſt donné par cette proportion, $1 : tang. r :: d : L$; c'eſt-à-dire que le rayon eſt à la tangente du rhumb de vent, comme la différence des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée, eſt au chemin en longitude.

C'eſt pour faciliter la ſolution de ces queſtions dont les hommes de mer s'occupent journellement, qu'on a calculé les latitudes croiſſantes des divers points d'un méridien du globe, & on en a formé des tables commodes, en ſe ſervant de la proportion ou de la formule indiquée précédemment (155). Ces latitudes ſont eſtimées en minutes d'un dégré de grand cercle du globe & on les emploie auſſi fréquemment qu'utilement, ſoit pour la réduction des routes des vaiſſeaux, ſoit pour la conſtruction des cartes marines.

La quantité L, aprés avoir été calculée, eſt reduite en dégrés. On l'ajoute enſuite, comme on l'a dit, à la longitude du point de départ du vaiſſeau pour obtenir la longitude du point de ſon arrivée, ſi la route l'a porté dans l'eſt du point de départ; comme on l'en retranche au contraire, ſi le vaiſſeau s'eſt avancé dans l'oueſt.

Le réſultat auquel on parvient par le calcul du 4.e terme de la proportion $1 : tang. r :: d : L$, peut encore être obtenu par une opération graphique. On fait un triangle rectangle *aeb* (fig. 50), tel que l'un de ſes angles *e* ſoit égal au rhumb de vent, & que celui de ſes côtés

ae, qui eſt adjacent à cet angle *e*, ſoit égal à la différence des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée. Alors le chemin en longitude eſt repréſenté par le côté *ab*. Car dans ce trian. on peut dire, 1:*tang.e* ou *tang.* r::*ae* ou *d*:*ab*; & par conſéquent *ab* doit repréſenter le chemin du vaiſſeau en longitude.

Si on examine attentivement la conſtruction d'un tel triangle, on doit remarquer que le côté *ae* eſt exactement égal à la partie du méridien de la carte reduite, qui correſpond à la route du vaiſſeau. C'eſt pourquoi les opérations graphiques qui conduiſent à trouver le chemin d'un vaiſſeau en longitude, peuvent aiſément être faites ſur la carte elle même. Il eſt même à-propos de faire voir comment, en réuniſſant cette opération à celles qui tendent à indiquer le chemin d'un vaiſſeau en latitude, on peut parvenir à aſſigner immédiatement ſur une carte marine, le lieu de l'arrivée du vaiſſeau. Tout conſiſte alors à former ſur cette carte deux triangles, tels que *edc* & *eab*, en meſurant les longueurs de leurs côtés avec des échelles convenables.

On commence par déterminer le chemin qui eſt fait par le vaiſſeau en latitude, parce que ce chemin doit ſervir à trouver le changement du même vaiſſeau en longi. Dans ces vues, on mene ſur la carte par le point *e* du départ du vaiſſeau, 2 lignes, l'une *ed* nord & ſud, ou parallele au méri., & l'autre *ec* parallele à l'air de vent de la route. Enſuite on porte ſur cette derniere la longueur d'une minute, (ou de la partie de l'équateur qui, ſur la carte, repréſente l'étendue d'une minute, c'eſt-à-dire d'un tiers de lieue) autant de fois qu'il y a de tiers de lieues dans la longueur meſurée de la route. La grandeur de l'hypothenuſe *ec* étant ainſi fixée, on acheve le triangle *edc*, en menant, par le point *c*, une perpendiculaire à la ligne N & S *de*. Le côté *ed* de ce triangle repréſente, comme on le ſait, le chemin du vaiſſeau en latitude; & on juge du nombre de lieues, ou du nombre de dégrés qu'il peut valoir, en prenant avec un compas ſa long., & en la portant ſur l'équateur. C'eſt ce cercle qui doit alors ſervir d'échelle, parce

qu'il eſt celle ſur laquelle a été meſurée l'hypothenuſe *ce* du même triangle.

Le chemin du vaiſſeau en latitude étant ainſi déterminé & eſtimé en degrés ; on connoît alors ſur le méridien de la carte, la partie qui repréſente la différence des latitudes croiſſantes du point de départ & du point d'arrivée du vaiſſeau. Ainſi pour parvenir à connoître le changement du vaiſſeau en longi., on porte la long. de la partie meridionale trouvée ſur le côté *ed* prolongé, & on fait la ligne *ea* égale à cette différence des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée. L'angle *e* reſte toujours égal au rhumb de vent, comme il l'étoit précédemment; & on acheve le triangle *abe*, qui doit être rectangle en *a*, en élévant en ce dernier point ſur *ae* la perpendiculaire *ab*. Cette derniere ligne *ab* repréſente le changement du vaiſſeau en longitude, omme on l'a démontré; & par conſéquent le point *b* eſt, ſur la carte reduite, le lieu réel de l'arrivée du vaiſſeau. Car entre ce point & le point *e* du départ, il y a la différence *ea* en latitude, telle qu'elle réſulte des calculs; & comme la différence des longitudes de ces deux points eſt réellement *ab*, il s'enſuit que le point *b* doit être celui de l'arrivée du vaiſſeau.

Au reſte on peut avoir aiſément la meſure de la grandeur de *ab* en lieues ou en dégrés ; mais l'échelle qui doit être employée n'eſt plus l'équateur, comme pour la meſure du chemin en latitude. Cette ligne *ab*, pour être meſurée convenablement, doit être portée ſur la partie du méridien de la carte qui correſpond à la route *eb* ; parce que c'eſt ſur cette échelle qu'eſt déterminée la longueur de la ligne *ae* qui appartient au même triangle.

157. La commodité & l'exactitude de ces opérations graphiques, ainſi que la néceſſité de préſenter aux hommes de mer peu éclairés, quelques moyens mécaniques de déterminer les poſitions ſucceſſives des vaiſſeaux dont ils dirigent la marche, ont fait imaginer le quartier de réduction. Cet inſtrument qui eſt propre à faire connoître aiſément, & ſans beſoin de théorie, les changemens d'un vaiſſeau, ſoit en latitude, ſoit en

longitude, a la forme d'un parallélogramme rectangle ABCD (fig. 51). Les deux côtés AB & AD, dont la longueur eſt indéfinie, ſont diviſés chacun en parties égales & de même grandeur; c'eſt-à-dire que ces parties, telles que AS & Az, ſont de même longueur. Enſuite des lignes paralleles à ces côtés & menées par leurs points de diviſion, partagent le quartier en petits quarrés égaux; & enfin des quarts de cercle concentriques, tels que Sz, qui ſont tracés du point A comme centre, par chaque point de de diviſion des côtés AB & AD, ſervent à diviſer en parties qui ſont égales à SA ou Az, toutes les lignes telles que A*o*, A*i*, &c. qui peuvent être menées du centre A ſur ce quartier. C'eſt avec un ſemblable inſtrument qu'on peut aiſément conſtruire les triangles *dec* & *acb* (figur. 50), ainſi que le triangle *enc* (fig. 32); triangles qui précédemment ont été préſentés comme propres à faire connoître les chemins en latitude & en longitude d'un vaiſſeau.

En faiſant uſage de cet inſtrument, on regarde toujours le côté AD, comme repréſentant la ligne N & S, & AB la ligne Eſt & oueſt. Enſuite un fil mobile, qui n'eſt fixé que par une de ſes extrémités au centre A, ſert à indiquer un air de vent quelconque, ou à former avec AD, (à l'aide d'un quart de cercle *em* qui eſt diviſé en dégrés) tout angle que la route d'un vaiſſeau eſt ſuppoſée faire avec les méridiens du globe, ou tout angle égal au rhumb de vent. Lorſqu'un tel fil eſt tendu ſur une direction quelconque *ao* dans le plan de ce quartier, toutes les parties de ſa longueur qui correſpondent aux divers intervalles des quarts de cercle, tels que *sz*, qui ſont tracés ſur ce quartier, ſont autant de parties égales.

S'agit-il, étant données la longueur, ainſi que la direction de la route d'un vaiſſeau, de déterminer, par le quartier de réduction, les changemens de ce vaiſſeau, ſoit en latitude, ſoit en longitude? On tend le fil ſur une ligne A*o*, de maniere que l'angle DA*o* ſoit égal au rhumb de vent. On compte ſur la longueur du fil, à l'aide des cercles concentriques, autant de parties égales qu'il y a de fois dans la route ſuppoſée, ou une, ou 2,

ou 4 lieues. Et la longueur de A*o* étant ainſi fixée, on mene, pour achever le triangle *eo*A, une ligne *ea* eſt & oueſt, par l'extrémité *o* de la route A*o*. Ce triangle parfaitement reſſemblant au triangle *edc* (fig. 50), eſt ainſi conſtruit ſur le quartier avec la plus grande facilité; & ſes côtés, ainſi que ſes angles, ſont meſurés auſſitôt que formés. Dans ce triangle il faut donc regarder le côté *e*A comme repréſentant le chemin du vaiſſeau en latitude; & le nombre des lieues dont il eſt compoſé, eſt indiqué par le nombre des parties égales qu'on peut compter ſur la longueur de *e*A. (remarquons que le côté *eo* indique auſſi, par le nombre de ſes parties égales, la grandeur du chemin Eſt & oueſt). On peut donc toujours (quelle que puiſſe être la route d'un vaiſſeau), déterminer promptement & commodément, à l'aide de ce quartier, le chemin fait en latitude, & par conſéquent la latitude du point d'arrivée (156).

Le quartier eſt auſſi employé avec la même facilité & le même ſuccès dans la recherche du chemin d'un vaiſſeau en longitude. Si on fait uſage de la méthode du moyen parallele; le triangle précédent fait connoître le côté *co*, ou le chemin Eſt & oueſt qui devient néceſſaire pour cette détermination. Alors on prend ſur AB une partie A*u* qui eſt égale à *eo*, ou qui eſt d'autant de parties égales qu'on en compte dans *eo*. On tend le fil ſur une direction A*i* telle, qu'il faſſe avec AB un angle égal à la latitude du moyen parallele. Enſuite par le point *u*, on mene une ligne nord & ſud *ui*; & le triangle ainſi conſtruit indique, par la longueur de ſon hypothenuſe *ai*, le chemin total du vaiſſeau en longitude. Car ce triangle reſſemble parfaitement au triangle *cen* (fig. 32), qui conſtruit, comme on l'a dit précédemment, préſente dans ſon hypothénuſe *ce*, le chemin d'un vaiſſeau en longitude. Ce chemin eſt enſuite employé, comme on le fait, à trouver la longitude du point d'arrivée.

Si on veut faire uſage de la méthode plus exacte des latitudes croiſſantes, pour déterminer le changement d'un vaiſſeau en longitude, le quartier peut encor ſervir

à parvenir au résultat cherché. On prend dans les tables la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. Elle y est exprimée en parties égales qui sont chacune de la valeur d'une minute du méridien, ou de l'équateur du globe. Ainsi on suppose que chaque partie AS de la ligne AD du quartier vaut un certain nombre de ces minutes, & on fait A*e*, par exemple, égale à la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée. On tend le fil sur l'air de vent indiqué, & on mene par *e* une ligne est & ouest, dont la longueur, ou le nombre des parties égales qu'elle contient indique le chemin du vaisseau en longitude, exprimé en minutes de l'équateur.

Le quartier de réduction est donc un instrument utile & commode. Mais quoique dans la spéculation il paroisse remplir toutes les vues des hommes de mer, on n'en peut conseiller l'usage qu'à ceux qui, par une instruction trop négligée, ou par défaut de connoissances suffisantes, ne peuvent calculer les termes des proportions qui sont relatives à la réduction des routes. Car les résultats de ces opérations mécaniques ne peuvent jamais avoir la précision, à laquelle on doit tout sacrifier pour la sûreté de la navigation. C'est pourquoi nous nous bornerons ici à présenter les seules applications du calcul à la réduction des routes d'un vaisseau; parce que d'ailleurs, cette méthode plus lumineuse & plus sûre convient seule aux personnes qui auront lu ce traité.

Les exemples que nous croyons devoir donner embrassent la résolution de cinq problêmes variés. Ils nous paroissent suffire pour tous les cas ordinaires de la navigation, & ils ne doivent laisser aucun doute sur les procédés à suivre pour resoudre toute autre question de ce genre.

La premiere de ces questions est celle qui, tous les jours à midi, occupe tout homme de mer chargé de diriger la marche d'un vaisseau. Elle a pour objet de trouver la position instantannée de ce vaisseau, après une route de 24 heures, dont on a mesuré, & la longueur, & la direction.

Lorsque le chemin d'un vaisseau en latitude a pu être

déterminé avec exactitude, alors les navigateurs employent ce chemin, au lieu du rhumb de vent, ou au lieu de la route mesurée, suivant que l'un de ces élémens mérite moins de confiance que l'autre, pour en conclure le changement du vaisseau en longitude. Quelquefois aussi, & moins fréquemment, le chemin en longitude peut être connu indépendamment des mesures de la route, & alors on en fait usage pour parvenir à trouver la latitude du point d'arrivée, ainsi que les défauts des mesures, soit du rhumb de vent, soit de la longueur de la route. Enfin il faut souvent déterminer, & la longueur de la route, & la direction que doit suivre un vaisseau, pour aller d'un lieu à un autre; & on y parvient par la connoissance des longitudes & des latitudes de ces lieux.

Telles sont les questions les plus ordinaires & les plus intéressantes qui sont à resoudre dans le pilotage d'un vaisseau. Nous commencerons leur examen par celui de la derniere, parce que tout homme de mer, qui se propose de conduire un vaisseau d'un port dans un autre, doit savoir d'abord, & la distance des deux ports, & l'air de vent sur lequel le vaisseau doit être dirigé.

Exemple 1er. Un vaisseau doit faire voile du Cap Lezard pour l'île des Barbades; & on demande la route qu'il doit tenir, ainsi que la distance qu'il doit parcourir.

Le Cap Lezard est supposé avoir 49° 57′ de latitude nord, & 5° 14′ de longitude à l'ouest du méridien de Londres. L'île des Barbades a 12° 58′ lat. N, & 58° 50′ de long. O. La méthode des latitudes croissantes, comme la plus directe, va nous servir à resoudre cette question; & nous y ajouterons ensuite l'usage de la méthode du moyen parallele. D'ailleurs nous présenterons ici le type de ces calculs.

Si on examine quelles sont les parties qui sont connues dans les triangles *dec* & *acb* (fig. 50), on voit que deux côtés du dernier sont donnés. L'un est *ac*, qui est égal à la différence des latitudes croissantes des lieux indiqués, & qui exprimé en parties méridionales,

vaut 2685′. L'autre eſt *ab* de 3216′, parce qu'il repréſente la différence des longitudes des mêmes lieux comparés. Dans ce triangle, on doit chercher l'angle *aeb*, qui eſt le rhumb de vent, & on le trouve par cette proportion, 2685:3216::1:*tang.aeb*. Ce quatrieme terme calculé par logarithmes, comme on le voit dans le tableau ci-joint, eſt la tangente de 50° 9′; c'eſt-à-dire que l'air de vent ſur lequel le vaiſſeau doit être dirigé, eſt le SO. 5° 9′ O.

	Latitude.	*Parties mérid.*	*Longitude.*
Cap Léſard	49° 57′ N.	3470′	5° 14′
Iſle des Barbades	12° 58′ N.	785′	58° 50′
Différence	2219′	2685′	3216′

Log.	3216′	3,5073160	Log.	2219′	3,3461573
	Ray.	10,		Ray.	10
	C. A. 2685′	6,5710567		c.a.coſ. 50° 9′	0,1932911
Log. rhu. v.	50° 9′	10,0783717	Log. route	3463′	3,5394484
Log.	3216′	3,5073160	Log.	2219′	3,3461573
	coſ. 31° 27′ ½	9,9309592		Ray.	10
	C. A. 2219	6,6538427		c.a.coſ. 51° 2′	0,2014144
Log. rh. v.	51° 2	10,0921179	Log. route	3528,4	3,5475717

Cet angle eſt enſuite employé à trouver la longueur *ec* de la route demandée, dans le triangle *dec*, où on connoît d'ailleurs le côté *de*, qui vaut 2219 minutes de degré, ou 2219 nœuds. (Nous employons préférablement des nœuds au-lieu de lieues, pour eſtimer les diſtances, parce que chaque nœud équivaut, ſoit à un tiers de lieue, ſoit à une minute de degré de grand cercle, &

cet

cet usage nous paroît faciliter les réductions). On fait dans ce triangle cette proportion, *cos.dec:ed::1:ec* ou *cos.*50° 9′:2219′::1:*ec*; & on trouve que le chemin cherché *ec* est de 3463 nœuds, ou de $1154\frac{1}{3}$ lieues. Un vaisseau qui fait voile directement du Cap Lezard pour l'île des Barbades, doit donc courir au SO. 5° 9′ O, & le chemin qu'il doit faire est de $1154\frac{1}{3}$ lieues.

Cherchons les mêmes choses demandées par la méthode du moyen parallele. La latitude du parallele qui tient le milieu entre ceux de départ & d'arrivée est 31° $27\frac{1}{2}$′; ainsi dans le triangle *cne* (fig. 32), cet arc mesure la grandeur de l'angle *cen*. D'ailleurs l'hypothenuse *ce* vaut 3216′, qui forment la différence des lontudes des deux lieux proposés: ainsi on peut calculer le chemin *en* Est & ouest, parce qu'il devient nécessaire pour déterminer (fig. 50) la longueur de la route, ainsi que le rhumb de vent. Dans le triangle *enc* (fig. 32) on fait cette proporrion, *1:ce::cos.e:en*, 1:3216′:*cos.* 31° $27\frac{1}{2}$′:*en*. Dans le triangle *cde* (fig. 50) on fait ensuite cette proportion 1:*tang.e::ed:dc*, ou 1:*tang. rh. de vent*::2219′:*dc* (fig. 50), ou *en* (fig. 32). On conclut de ces deux proportions, qui ont les mêmes extrêmes, que 2219:3216::*cos.*31° $27\frac{1}{2}$′:*tang.e*. Le calcul du quatrieme terme fait connoître que le rhumb de vent doit valoir 51° 2′, au lieu de 50° 9′, qui étoit sa valeur résultante de la méthode précédente.

La proportion qui doit enfin servir à déterminer la longueur de la route, est faite dans le triangle *cde*, & on doit dire *cos.* 51° 2′:2219::1:*ce*. On trouve ainsi que le chemin à parcourir par le vaisseau, pour se rendre du Cap Lezard aux Barbades, est de 3528,4 nœuds, ou de 1176,1 lieues. La méthode directe indique cette route de 1154,3 lieues, & la différence (21,8 lieues) démontre évidemment que les résultats de la méthode du moyen parallele sont quelquefois mêlés d'erreurs. Cependant les causes de ces erreurs n'ont pas une influence très-sensible dans la réduction des routes journalieres d'un vaisseau, qui sont toujours peu considérables, & sur-tout lorsque ces routes sont placées entre l'équateur & le parallele de 60°. Car au-delà de cette

derniere latitude, l'influence est plus marquée, & elle est assez considérable pour n'être jamais négligée.

Exemple 2[e]. Un vaisseau part d'un lieu qui a 42° 30′ de latitude nord, & 18° 30′ de longitude ouest. Il fait voile au SO$\frac{1}{4}$S; & lorsqu'il a parcouru 591 nœuds ou tiers de lieue, on demande quelles sont les laittude & longitude du point où il est arrivé.

Dans le triangle *cde* (fig. 50) on connoît le côté *ec*, qui est de 591 nœuds, & l'angle *dec* dont la valeur est de 33° 45′. ainsi on doit trouver *ed*, ou le chemin en latitude, par cette proportion, 1:*ec*::*cos*.*e*:*ed*, ou 1: 591::*cos*.33°45′:*ed*; & il est de 491,4 nœuds ou minutes, ou enfin de 8°11′,4. Ce chemin en latitude doit être retranché de la latitude du point d'arrivée, puisque le vaisseau par sa route tend à s'approcher de l'équateur. La latitude du point d'arrivée du vaisseau est donc de 34° 19′ N.

	Latitude.	*Parties mérid.*	*Longitude.*
Point de départ	42° 30′ N	2822′	18° 31′
Point d'arrivée	34 19 N	2194′	25° 31′
Différence	8° 11′4	628′	6° 59,6

Log.	cos. 33°45′	9,9198464	Log.	628	2,7979596
	Ray.	10		T. 33°45	9,8248926
	C. A. 591	2,7715875		C. A. rayon	0,
Log. ch. en lat.	491,4	2,6914339	L. ch. long.	419,62	2,6228522

C'est au triangle *aeb* qu'il faut ensuite avoir recours pour déterminer le chemin du vaisseau en longitude, & on doit faire cette proportion, 1:*tang*.*e*::*ae*:*ab*. La différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée est, suivant les tables, de 628′; ainsi on doit dire 1:*tang*.33°45′::628:*ab*; & le chemin cherché en longi-

tude est de 419',62, ou de 6° 59',62. (la méthode du moyen parallele auroit donné à-peu-près la même solution de la question proposée). Ce changement en longitude doit ensuite être ajouté à la longitude occidentale du lieu du départ, puisque le vaisseau s'est avancé dans l'ouest de ce même lieu; & la longitude du point d'arrivée doit être dans ce cas de 25° 31' O.

Ces deux exemples détailles suffisent seuls pour indiquer la forme des calculs & l'usage des logarithmes. Ainsi dans les exemples suivans nous nous bornerons à désigner les opérations qui conduisent à des résultats cherchés, & nous laisserons le soin des détails ou de l'exécution aux jeunes marins qui doivent s'exercer à ce travail.

Exemple 3e. Un vaisseau a fait voile d'un port qui est par 37° de latit. N, & 10° 25' long. O. Il a couru 100 lieues ou 300 nœuds entre le nord & l'ouest, & il est arrivé sur le parallelequi a 41° de latitude nord; on demande quelle est la longitude du point ou il est arrivé, & quel est l'air de vent qui l'eût conduit directement au point d'arrivée.

Comme la différence des latitudes de départ & d'arrivée est connue, ainsi que la longueur de la route; alors dans le triangle *edc*, on peut calculer le rhumb de vent, ou l'angle *dec*, par cette proportion, (*ce* ou 300 nœuds : *de* ou 240' :: 1 : *cos. dec*), & on trouve que le rhumb de vent *e* est de 36° 52' si le vaisseau eut donc été dirigé sur l'air de vent NO 9° 8' N, il seroit arrivé, après une route de 100 lieues, sur le parallele indiqué. Le chemin en longitude qu'il a dû faire est représenté par *ab* dans le triangle *abe*, & on le calcule par cette proportion, 1:*tang.e* ou *tang.* 36° 52':: *ae* ou 309' (différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée) : *ab*. Ce chemin est donc de 231,7', & la longitude du point d'arrivé doit être de 14° 16' O. La méthode du moyen parallele auroit placé le vaisseau par 14° 17' long. O.

Exemple 4e. Un vaisseau fait voile du Cap Lezard, il porte au S 39° O, & il arrive par 45° 31' de latitude

nord, on demande ſa longitude d'arrivee, ainſi que la route directe.

Le Cap Lezard eſt par 49°57′ N, 5° 14′ O. Le chemin que le vaiſſeau a fait en latitude, eſt donc de 266 nœuds. Comme le rhumb de vent eſt de 39°, on connoît donc, dans le triangle *dec*, & l'angle *e*, & le côté *ed* qui eſt de 266 nœuds. (on pourroit avec ces données calculer le changement *ab* en longitude, dans le triangle *abe*, ſans avoir beſoin de connoître la longueur de la route, parce que dans ce triangle on connoît, & le rhumb de vent *e*, & la différence 396′ des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée, qui eſt la valeur du côté *ae*; cependant il eſt bon de préſenter les proportions qui donnent l'un & l'autre). Dans le triangle *dec*, on fait la proportion (*de* ou 266′:*ec*::*coſ.e* ou *coſ.* 39°:1) Elle ſert à trouver que la route du vaiſſeau ſuppoſée directe, eſt de 342,3 nœuds, ou de 114,1 lieues. Enſuite dans le triangle *abe*, la proportion [1:*tang.e* ou *tang.* 39°::*ae* ou 396′::*ab*] fait voir que *ab*, ou le chemin du vaiſſeau en longitude, eſt de 321 minutes ou de 5° 21′ O; par conſéquent la longitude du point d'arrivée du vaiſſeau, qui eſt la ſomme de ce changement en longitude, & de la longitude du départ, doit être de 10° 35′ O.

Exemple 5ᵉ. Un vaiſſeau a fait voile du Cap Lezard en portant au SO¼O, & il eſt arrivé par la longitude de 57° 26′, on demande le chemin qu'il a fait en latitude.

La différence des longitudes du Cap Lezard, & du point d'arrivée eſt de 3132′, & l'air de vent eſt de 56° 15′; ainſi dans le triangle *aeb*, on connoît l'angle *e* & le côté oppoſé *ab*. On peut donc y trouver la différence *ae* des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée, par cette proportion, *tang.e* ou *tang.*56°15′:1:: *ab* ou 3132:*ae*. Le calcul donné 2093′ pour la valeur du côté *ae*, ou pour la différence des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée. Cette différence étant retranchée de la latitude croiſſante du Cap Lezard, ou de 3470′, le reſte, qui eſt 1377′, doit être la latitude croiſſante du point d'arrivée. Ainſi cherchant dans la

table de ces latitudes l'arc du méridien qui correſpond à 1377′, on trouve que cet arc, ou la latitude du point d'arrivée, eſt de 22° 22′. Le vaiſſeau, ſuivant l'état de la queſtion, eſt donc arrivé ſur un point du globe qui a 22° 22′ de latitude nord.

Si on ſe propoſoit de trouver auſſi la longueur de la route directe qui eſt compriſe entre le point de départ & celui d'arrivée, on feroit dans le triangle *dec* cette proportion, *coſ.* 56° 15′:1::*de* ou 1655′:*ce*. Le réſultat du calcul de ce dernier terme ſeroit que la diſtance des deux points eſt de 2979 nœuds, ou de 903 lieues.

Lorſqu'un vaiſſeau a fait ſucceſſivement pluſieurs routes; lorſque parti du point *i*, par exemple (fig. 85. G), il a été obligé d'abord de faire la route *im*; enſuite après être arrivé au point *m*, s'il a dû courir ſur *mn*, & ainſi de ſuite, en variant toujours ſa direction, ainſi que ſa viteſſe; on demande le point où il eſt arrivé, en ſuppoſant qu'on connoiſſe, & la longueur de ſes routes partielles, & leurs directions particulieres.

La poſition du point où il eſt arrivé après tous ces détours, eſt déterminée en cherchant ſéparément, & comme on l'a dit précédemment, les chemins, ſoit en longitude, ſoit en latitude, qui correſpondent à chaque route partielle. Après avoir obtenu tous ces réſultats diſtincts des diverſes opérations qui y conduiſent, on doit ajouter les chemins faits en latitude dans un même ſens, & en retrancher ceux qui ſont courus en ſens contraire. On fait une ſemblable opération ſur les chemins partiels en longitude, & on parvient ainſi à trouver la différence réelle des latitudes du point de départ & d'arrivée; comme auſſi la différence des longitudes qui réſultent de l'enſemble de toutes les diverſes routes faites par le vaiſſeau.

On doit remarquer qu'on s'expoſeroit à des erreurs ſi après des routes multipliées, longues & variées, on adoptoit, pour déterminer la longitude du point d'arrivée, la méthode qui conſiſte à chercher tous les chemins paralleles, ou qui ſont faits dans le ſens des paralleles; à prendre leurs ſomme ou leur différence, ſuivant leurs directions de l'oueſt vers l'eſt, ou de l'eſt

vers l'ouest; & à les reduire ainsi à un seul chemin est ou ouest, pour en conclure, en choisissant un moyen parallele, l'arc de l'équateur qui correspond à l'ensemble de toutes les routes. Ces erreurs, & les circonstances où elles sont plus à craindre, ont été indiquées précédemment.

Nous terminerons cette matiere en observant que, si ayant déterminé les changemens réels d'un vaisseau, soit en longitude, soit en latitude, après des routes variées qu'on nomme composées, on veut calculer la route directe, ainsi que l'air de vent, qui, du point du départ, peuvent mener au point d'arrivée qu'on a déterminé; cette recherche n'exige pas d'autres calculs que ceux qui sont indiqués dans les exemples précédens. Les mêmes connoissances suffisent aussi à un navigateur qui, après plusieurs courses différentes, ou après un très-grand nombre de bordées, cherche à connoître de nouveau, & la distance qui le sépare du lieu qu'il se propose d'atteindre, & l'air de vent qu'il doit tenir pour y arriver.

158. *Sans* doute les objets les plus importans de la surveillance d'un navigateur, lorsqu'il est en mer, sont la marche du vaisseau qu'il dirige, & tous les objets accessoires dont la connoissance peut contribuer à lui faire porter un jugement certain sur la véritable longueur & sur la direction de sa route. Mais son attention doit s'étendre plus loin. Il doit encore, autant qu'il est possible, ne négliger aucune occasion, soit pour assurer la position incertaine, ou des îles, ou des rochers, ou des terres qui s'offrent à sa vue, soit pour déterminer celle des points intéressans du globe, qu'il pourroit découvrir dans le cours de ses voyages.

De tels services importent à la perfection des cartes marines; ilsne tendent qu'à éclairer la marche des vaisseaux, & les navigateurs se doivent reciproquement de tels soins. L'humanité fait une obligation de cette prévoyance, & sur-tout à ceux que leurs lumieres étendues rendent plus capables de réussir dans ces recherches.

C'est pour aider à remplir ces vues utiles que nous allons présenter les réflexions suivantes.

Supposons qu'un navigateur transporté au point C de la mer, apperçoive au loin le point P (fig. 34), qui appartient à une île dont le nom est connu; mais dont la position est douteuse. Il doit chercher, pour faire disparoître toute incertitude, à relever P successivement, sur la vraie ligne nord & sud du monde, ainsi que sur la vraie ligne est & ouest. Dans ces deux situations respectives, le point P & le vaisseau paroissent d'abord placés sur un même méridien, & ensuite sur un même parallele. Ainsi la position du vaisseau sur le globe étant exactement connue aux momens de chaque relevement, la longitude du point P se trouve indiquée par celle du vaisseau, lorsqu'ils sont l'un & l'autre sur la même ligne nord & sud; & sa latitude est donnée par celle que peut avoir le vaisseau, lorsque celui-ci est dans l'est ou dans l'ouest du point P relevé.

Les circonstances ne permettent pas toujours qu'un vaisseau puisse se placer dans de semblables situations respectives; alors le lieu dont on se propose de déterminer la position, doit être relevé deux fois à bord du vaisseau, pendant que celui-ci s'avance sur une direction constante, & avec une vitesse uniforme. L'intervalle de tems qui sépare les époques des deux relevemens, doit même être tel, que le vaisseau puisse, pendant sa durée, parcourir un assez grande distance, dont on doit d'ailleurs observer avec la plus scrupuleuse exactitude, & la longueur & la direction.

Supposons, par exemple, qu'un vaisseau suive la route *ucb* (fig. 34), & qu'arrivé au point *c*, à la vue de la pointe de terre *d*, un observateur se propose de déterminer la longitude & la latitude du cap *d*, connoissant d'ailleurs la position réelle du vaisseau sur le globe. Il doit relever, des points *c* & *b* de sa route, le point *d* supposé. Soit *gcz* la véritable direction du méridien qui passe par le point *c*. Si du point *d*, on abaisse sur cette ligne une perpendiculaire *dz*, alors on forme un triangle *dcz*, qui est absolument pareil à celui

edc (fig. 50), dont on a indiqué la construction pour servir à la réduction des routes des vaisseaux. (fig. 34) Car la ligne *cz* est une ligne nord & sud, & *cd* est l'air de vent, ou la ligne qu'un vaisseau doit suivre pour se rendre de *c* en *d*. L'angle *dcz* est donc le rhumb de vent, & *cd* est la longueur de la route qui conduit de *c* en *d*. La différence des latitudes des deux points *c* & *d* doit donc être *cz*, comme *dz* doit être la différence de leurs longitudes, comptée sur le parallele qui passe par le point *d*. Dans le triangle *cdz*, si on veut déterminer les côtés *cz* & *dz* (qu'on doit calculer pour en conclure la longitude & la latitude du point *d*), il faut chercher auparavant à connoître deux autres parties de ce triangle, telles que *cd* & l'angle *dcz*; c'est pourquoi il faut observer successivement, des points *b* & *c* de la route du vaisseau, l'air de vent de la boussole sur lequel paroît être placé le point *d*, & mesurer avec soin le chemin *bc*, qui est couru par le vaisseau dans l'intervalle des relevemens. Alors si on corrige, de la variation de l'aimant, le premier relevement fait au point *c*, on détermine l'angle *dcz*. Ensuite on conclut l'angle *dcb*, & de ce premier relevement, & de la direction observée de la route du vaisseau; enfin l'angle *dbc* est aussi désigné, soit par le rhumb de vent *zcb*, soit par l'angle corrigé du second relevement fait au point *b*. On connoît d'ailleurs le chemin *bc* qui sépare les deux points des relevemens, ainsi on peut, dans le triangle *dbc*, déterminer la distance *cd*, qui doit servir à calculer, dans le triangle *dcz*, la différence des longitudes & latitudes des points *c* & *d*.

Le côté *dc* du triangle *dcb* est donné par la proportion suivante, $sin.bdc:bc::sin.dbc:dc$. Si dans le triangle *dcz*, dans lequel on connoît l'angle *dcz*, il s'agit de chercher la valeur de *cz*, qui est la différence des latitudes des points *c* & *d*, on fait la proportion, $1:cos.dcz::dc:cz$, & on calcule le terme *cz*.

Cette différence des latitudes est ensuite réduite en degrés; & en l'ajoutant à la latitude du vaisseau placé au point *c*, si celui-ci est moins éloigné de l'équateur que le point *d*, ou en la retranchant de cette

latitude, si celle du point *c* est la plus petite, cette somme ou ce reste est la latitude cherchée du point *d*. S'agit-il aussi de déterminer la valeur de *dz*, qui est la différence des longitudes des points *d* & *c*, mesurées sur le parallele du point *d*, on trouve cette ligne en faisant, dans le même triangle *dcz*, la proportion suivante, 1:*sin.dcz*::*dc*:*cz*. Cette quantité *dz* est la somme d'une infinité de petits arcs appartenans aux paralleles qui, sur le globe, sont compris entre *c* & *d* (156). Ainsi on peut regarder la longueur de cette ligne comme celle d'un arc parallele dont la latitude tiendroit le milieu entre les latitudes des points *c* & *d*. Nommons *pm* la latitude de ce moyen parallele, & L l'arc de l'équateur qui correspond à la ligne *dz*. On a cette proportion *cos.mp*:1::*dz*:L. Multiplions cette derniere par la proportion précédente, terme par terme, & nous parviendrons à celle-ci, *cos.mp*:*sin.dcz*::*dc*:L, dont le terme L, qui est la différence en longitude, est le seul qui soit inconnu. Cette quantité L qui est la différence des longitudes du point *d*, & du vaisseau placé au point *c*, doit être ajoutée à celle du vaisseau, si celui-ci est dans l'ouest du point *d*; ou elle doit en être retranchée dans le cas contraire. Ces opérations font connoître la longitude du point *d*.

Voici un exemple. Un vaisseau courant au N 3° ouest (corrigé), arrive par 17° 34′ 50″ N, & 65° 25′ 13″ O. Alors un observateur releve l'île de Saba, à l'ouest 30° 30′ Nord (corrigé). Ensuite le vaisseau ayant parcouru, sur la même direction, un chemin que des mesures exactes font connoître de 9 milles $\frac{1}{3}$, ou de 580″, l'observateur releve de nouveau le même point de l'île de Saba, à l'ouest 33° 30′ Sud. On demande, d'après ces observations, quelles doivent être la latitude & la longitude de l'île.

La distance du vaisseau à Saba, au moment du 1.er relevement, est donnée par cette proportion, *sin.bdc* ou *sin.*64° 0′:*sin.dbc* ou *sin.*58° 30′::*bc* ou 580′:*dc*. La valeur calculée de *dc* est de 550″. Cette distance sert à déterminer la différence *cz* des latitudes du vaisseau

& de l'île, en faisant la proportion suivante, 1:*cosin.* 30° 30′::*dc* ou 550″:*cz*; & cette différence est de 279″ ou de 4′ 39″. La latitude de l'île est donc de 17° 39′ 29″, puisque du vaisseau, on a relevé l'île de Saba, dans la partie du nord.

La latitude du moyen parallele est donc de 17° 37′; ainsi on peut déterminer la différence des longitudes du vaisseau & de l'île Saba, par cette proportion, *cos.* 17° 37′:*cos.* 30° 30′::*dc* ou 550″. La différence cherchée, qu'on trouve par le calcul, est de 497″ ou de 8′ 17″. Cette quantité doit être ajoutée à la longitude occidentale du vaisseau, puisque l'île a été relevée dans l'ouest du point *c*, & par conséquent la longitude de l'île est de 65° 33′ 30″ O.

On doit remarquer, par les réflexions précédentes, que si la latitude d'un point de la terre étoit bien connue, il suffiroit d'un seul relevement, pour assurer sa position, & pour conclure sa longitude par celle d'un vaisseau. Car alors, dans le triangle *dcz*, on connoîtroit, outre l'angle droit *z*, l'angle *dcz* & le côté *cz*; ainsi on pourroit calculer la différence des longitudes des points *c* & *d*, en faisant la proportion indiquée précédemment.

De même, si la longitude d'un lieu dont on desireroit fixer la place sur une carte étoit connue, un seul relevement suffiroit aussi pour trouver sa latitude, par celle du vaisseau d'observation. Dans ces déterminations, on doit donner la plus grande attention, soit à la mesure de la route du vaisseau dans l'intervalle des relevemens, soit au calcul de sa position, soit à l'observation, & des relevemens, & de la dérive, & de la variation de l'aimant. On doit sur-tout mesurer avec exactitude les angles qui ont été indiqués; parce qu'en examinant les proportions qui servent à déterminer, & la distance des deux lieux comparés, & leur différence en latitude, ainsi qu'en longitude; On doit voir que les résultats dépendent particulièrement de la grandeur précise de ces angles. D'ailleurs, il faut savoir que ces angles doivent toujours être à-peu-près, & autant

que les circonstances le permettent, d'une grandeur qui tienne le milieu entre 0° & 90°, parce qu'alors les résultats des opérations indiquées, méritent une confiance proportionnée à leur importance.

Fin de la Géométrie.

LA SCIENCE
DE
DE L'HOMME DE MER.
SECTION TROISIEME.

ASTRONOMIE.

159. Un navigateur, au milieu des mers qu'il parcourt, & transporté hors de la vue de toute terre, n'a plus d'autre spectacle que le ciel & la surface uniforme de l'eau dont l'étendue paroît être sans limites. Tous les jours il s'avance dans l'espace; & sur son horison, qui semble ne jamais changer, il n'apperçoit que des lames plus ou moins élevées, & des astres qui semblent se mouvoir autour de lui, dans des cercles plus ou moins vastes. Pendant sa marche lente ou rapide, il ne découvre dans tout ce qui l'entoure sur l'océan, aucun objet fixe qui puisse l'aider à juger de la vitesse avec laquelle il s'éloigne des lieux qu'il vient de quitter; & il ne peut apprécier, ni le degré de cette vitesse ni sa direction, que d'une maniere très-incertaine, à l'aide des moyens mécaniques dont nous avons déjà parlé.

Dans cet état de doute, de perplexité & d'inquiétude, le ciel seul lui offre, dans les étoiles, des termes

fixes convenables ; & ces aſtres ſeuls peuvent l'avertir de ſes changemens de poſition ſur la ſurface des mers, parce que leur aſpect varie pour un obſervateur, à raiſon de ces mêmes changemens. La connoiſſance & les obſervations des aſtres ſont donc de la plus grande utilité aux navigateurs, pour conduire leurs vaiſſeaux à travers les mers, ſoit avec plus de ſureté, ſoit avec plus de lumieres.

Les aſtres conſultés par l'homme de mer, peuvent ſervir, il eſt vrai, à lui faire reconnoître ſa route, ſoit dans ſa longueur, ſoit dans ſa direction ; mais ce n'eſt jamais que lorſque cette route eſt faite : & les obſervations aſtronomiques ne l'avertiſſent de ſes erreurs qu'après qu'elles ont été commiſes. Le grand éloignement des étoiles & des autres aſtres, la lumiere du ſoleil qui les éclipſe, & les nuages qui ſouvent les voilent à la terre, ne permettent pas que les aſtres puiſſent indiquer à un navigateur, à toute heure & à tout moment, ni l'air de vent qu'il ſuit dans l'eſpace, ni la viteſſe actuelle de ſa courſe. Cependant il lui faut de tels indicateurs, dont il puiſſe faire uſage au moment du beſoin.

Ainſi les meſures aſtrono. ne ſont qu'un ſupplément devenu néceſſaire aux méſures mécaniques, qui ſont employées journellement à déterminer & la direction & la longueur de la route des vaiſſeaux. Les premieres ſont propres à marquer le degré de confiance qui eſt due aux 2.es, puiſqu'elles rendent leurs erreurs ſenſibles ; & ces deux eſpeces de meſures, loin de s'exclure mutuellement, ſont toutes deux de la plus grande néceſſité dans l'art de la navigation.

On doit donc en mer faire un uſage non-interrompu & de lok, & de ſabliers, & de bouſſole. On doit conclure, à l'aide de ces moyens, mais proviſoirement la poſition inſtantanée d'un vaiſſeau ; & enſuite il faut, à des intervalles de temps peu éloignés, conſulter les aſtres, pour donner à cette poſition trouvée une confiance entiere, ou pour la corriger de ſes erreurs toujours dangereuſes. Enfin ſi les inſtrumens mécaniques que nous venons de nommer ne peuvent donner que

des mesures conjecturales, & conduire à des résultats probables sur la longitude & la latitude d'un vaisseau qui a franchi un certain espace de mer; Des observations astronomiques, lorsqu'elles sont bien faites, sont propres à faire connoître avec exactitude & précision la véritable grandeur de ces mêmes quantités.

L'homme de mer doit donc regarder l'astronomie comme une branche essentielle des connoissances qui lui deviennent absolument nécessaires pour l'exercice de son art; & il doit s'en convaincre aisément par la considération des causes d'erreurs dont il ne cesse d'être environné. En effet transportons-nous au moment où, pendant la marche de son vaisseau, un navigateur cherche à mesurer sa vitesse. Il jette le lok à la mer; & il suppose que ce léger morceau de bois doit rester fixement dans le lieu où il est tombé. Cependant les eaux qui l'envelopent peuvent avoir un mouvement particulier & inconnu, qui est produit, ou par les vents qui ont regné précédemment, ou par quelques causes différentes & variées. Dans ce cas le lok est emporté dans l'espace, lorsqu'il est jugé & considéré comme immobile; & cette translation doit l'éloigner ou l'approcher.

Pendant qu'un tel effet peut avoir lieu, la ligne de lok, ou la corde qui tient au bateau de lok, abandonnée avec mesure, s'étend sur la trace de la route du vaisseau; & c'est elle qui doit marquer par sa longueur combien dans l'espace d'une demi-minute, le vaisseau s'éloigne du bateau de lok. Mais elle ne peut représenter la route de ce vaisseau, qu'autant qu'elle seroit élongée sur la surface d'une mer calme, & que ses nœuds conserveroient leur étendue primitive, malgré les variétés de la température; c'est-à-dire malgré la chaleur, la sécheresse & l'humidité dont elle éprouve les effets. Pendant une telle expérience, on voit aussi souvent des lames qui s'abaissent & s'élevent (fig. 5. G) sous divers points de cette ligne, & elles augmentent de nouveau le degré d'incertitdue attaché à ces mesures. D'ailleurs, tandis que le bateau de lok obéit à des courans superficiels qui peuvent exister, le vais-

ſeau enveloppé decourans plus profonds, & différens peut-être dans leur force & dans leurs directions, eſt entraîné par les uns & les autres, ſans que la ligne de lok puiſſe indiquer, ni les effets de ces cauſes, ni leurs directions. Le ſablier même qui eſt employé pour limiter la durée de l'expérience, n'eſt pas toujours une meſure exacte d'un intervalle de 30″ de tems; ainſi des erreurs conſidérables peuvent rendre douteuſe la meſure annoncée de la route d'un vaiſſeau, pendant la durée de 30″ de tems. Ordinairement on ne jette le lok qu'à chaque heure de la journée, à moins qu'il n'arrive des changemens notables dans l'état du vent, de la voilure ou de la mer. Enſuite du chemin fait par le vaiſſeau dans un ſi petit nombre d'inſtans, on en conclut l'eſpace qu'il doit parcourir pendant une heure entiere. Les erreurs indiquées & qui doivent être ſouvent juſtement ſoupçonnées, ſe répétent donc néceſſairement, & forment une maſſe qui augmente encore, ſi le vaiſſeau ne conſerve pas pendant la durée de chaque heure l'uniformité la plus parfaite dans ſa viteſſe; ſi ſes écarts ne ſont pas les mêmes & également multipliés; & enfin ſi le gouvernail eſt mis en action plus ou moins fréquemment.

La direction réelle de la route d'un vaiſſeau n'eſt pas annoncée avec plus de certitude par la bouſſole. Cet inſtrument n'eſt pas toujours exactement connu, c'eſt-à-dire que ſa déclinaiſon eſt ſouvent ignorée en partie par le déffaut d'obſervations directes; & enſuite la circonférence de la roſe préſente des diviſions ſi petites, qu'on ne peut eſtimer avec la préciſion néceſſaire l'angle que forme la direction de la quille avec les méri. que le vaiſſeau croiſe dans ſa route. Cet inſtrument d'ailleurs n'indique pas le véritable air de vent de la route, & il faut en faire une appréciation toujours incertaine; lorſqu'un vaiſſeau étant pouſſé obliquement par l'action du vent ſur ſes voiles, ne ſuit plus la direction de ſa quille; lorſque la forme de ſa carene, la ſituation de ſes voiles, leur nombre, leur grandeur, & la force du vent concourent à faire varier la dérive; lorſque des courans inconnus l'emportent dans des directions plus ou

moins obliques, & avec plus ou moins de violence; lorſqu'enfin des lames qui l'abordent ſous divers angles, & avec des maſſes plus ou moins grandes, viennent lui communiquer des mouvemens de rotation, qui néceſſitent l'application fréquente de la force du gouvernail.

Tant de motifs ne peuvent laiſſer aux navigateurs un eſpoir fondé de connoître avec préciſion la direction de la route d'un vaiſſeau. Sans doute l'obſervation du remoux (qui ne ſauroit être trop répétée) eſt très-utile pour obvier à quelques uns de ces inconvéniens; mais elle ne peut faire découvrir toutes les erreurs de direction; parce que les eaux que le vaiſſeau déplace dans ſa marche, & qui, après ſon paſſage, s'agitent pour revenir à l'équilibre, ſont elles-mêmes emportées dans l'eſpace par les courans généraux qui peuvent exiſter.

L'incertitude des meſures qu'on prend en mer, ſoit de la longueur, ſoit de la direction de la route d'un vaiſſeau, impoſe donc l'étroite obligation aux navigateurs, de recourir aux obſervations aſtronomiques, pour connoître d'une maniere plus ſûre la latitude & la longitude de ce vaiſſeau. Mais quelles doivent être ces obſervations? & comment peuvent-elles ſatisfaire complettement à l'attente & aux beſoins des marins? ces queſtions ne peuvent être abordées ſans prendre préalablement une connoiſſance ſuffiſante de l'aſtronomie? Il faut donc ſe former d'abord une idée juſte & complette de l'état réel du ciel, des mouvemens des aſtres, & de leurs ſituations reſpectives & changeantes. Il faut ſavoir comment ces aſtres ſont vus de la terre, comment ceux qui les obſervent à la ſurface du globe, doivent déterminer leur place réelle ou apparente dans la ſphere céleſte, meſurer leurs diſtances, & juger leur viteſſe. Enfin il faut diſtinguer parmi les grands phénomenes céleſtes, ceux dont l'obſervation peut avoir des rapports utiles à l'art de la navigation. Ces conſidérations générales indiquent donc trois parties bien diſtinctes dans l'aſtronomie de l'homme de mer, & nous allons les traiter ſucceſſivement, avec toute l'é-

tendue qui convient à l'importance de l'objet qui nous occupe.

160. *Etat réel du ciel.* Parmi tous les aſtres qui peuvent être vus de la terre, les uns ſont fixes, & les autres ſe meuvent dans l'eſpace. Conſidérés enſemble, ils forment notre univers, notre ſphere, dont le ſoleil eſt le centre conſtant. Les étoiles, qui dans le ciel ſont des aſtres immobiles, ſont placées à des diſtances immenſes de la terre; & les planetes, ainſi que les cometes, qui parcourent autour du ſoleil des orbites de diverſe grandeur, ſont bien moins éloignées de cet aſtre central & de notre globe. Les étoiles ſont innombrables, & les planetes ſont peu nombreuſes. Les premieres, dont les diametres inſenſibles échappent preſque à nos meſures, & qui ſont éparses dans les diverſes légions du ciel, ſont ſuppoſées former différens groupes nommés conſtellations, & ſervent à diviſer toute l'étendue du ciel en pluſieurs parties, pour mieux les faire diſtinguer & reconnoître. Dailleurs elles ſont claſſées (ſans égard à leur éloignement de la terre) ſuivant leur grandeur, ou ſuivant la lumiere, plus ou moins vive, dont elles frappent nos yeux; & le nom qu'on leur donne, dans chaque conſtellation, ne ſont le plus ſouvent que des lettres d'alphabet.

Les planetes ſont différenciées avec beaucoup plus de ſoin, & elles peuvent l'être ſous pluſieurs rapports, parce qu'on connoît l'inégalité de leurs groſſeurs, de leurs diſtances, de leur éclat. La lumiere qu'elles répandent ſert auſſi à les faire diſtinguer des étoiles & du ſoleil, qui ſont des aſtres lumineux par eux-mêmes, parce que ces corps opaques ne font que réfléchir la lumiere de ces derniers plus ou moins parfaitement.

Les planetes au nombre de ſept, portent chacune un nom particulier; & ſi on en fait l'énumération ſuivant l'ordre de leurs diſtances au ſoleil, elles ſont *Mercure*, *Venus*, *la Terre*, *Mars*, *Jupiter*, *Saturne* & *Herſchel*. Chacune décrit autour du ſoleil une orbite, qui, par ſa forme, s'éloigne plus ou moins de celle d'un cercle, ou qui eſt elliptique; & les durées de leurs révolutions ſont dans un rapport déterminé avec leurs diſtances

moyennes au ſoleil. Si on veut prendre une idée générale des ſituations des planetes à l'égard du ſoleil & des étoiles, ſuppoſons (fig. 52) le ſoleil en O, & imaginons que, Mercure en M, Venus en V, la terre en T, Mars en MA, Jupiter en J, Saturne en S, & Herſchel en H tournent autour du ſoleil dans des orbites plus ou moins vaſtes, & dont on s'eſt contenté d'indiquer une partie élémentaire. Des cometes C & *c* décrivent auſſi autour du même centre des orbites particulieres, mais qui ſont ſi grandes & ſi étendues, que ces corps ne deviennent viſibles pour la terre, que lorſqu'ils ſont dans les points les moins éloignés du ſoleil. Les plans de toutes ces orbites ne ſont pas les mêmes, & en prenant pour terme de comparaiſon l'orbite de la terre (qui porte le nom d'écliptique), les plans des autres orbites lui ſont différemment inclinées. Quelques-uns de ces plans ſont ſitués entr'eux comme le ſont les plans (fig. 53) *mei*, *ldh*, *kog* & *adcb* qui repréſente l'écliptique. Celui de tous qui avec ce dernier forme le plus grand angle, n'eſt pas incliné de plus de 9 degrés. D'ailleurs les orbites des planetes coupent celle de la terre en deux points oppoſés; & ces points, qui varient ſuivant les planetes, reçoivent le nom de nœuds. Voici le tableau des diametres des planetes, de leurs diſtances moyennes au ſoleil, des inclinaiſons de leurs orbites, & des durées de leurs révolutions ſydérales, ou rapportées aux étoiles.

Suit le Tableau.

Noms des planetes.	Diametres des planetes.	Distances moyennes au Soleil	Inclinaison des orbites sur l'écliptique.			Durée des revolutions sydérales.			
	Diametres de la Terre.	Dis. du Sol. à la Terre.	deg.	min.	sec.	jo.	he.	mi.	sec.
Mercure	0,3889	0,38709	7	0	0	87	23	15	37
Venus	0,9278	0,72333	3	23	20	224	16	49	12
la Terre	1,0000	1,00000	0	0	0	365	6	9	11
Mars	0,6333	1,52369	1	51	0	686	23	30	43
Jupiter	10,761	5,20097	1	19	10	4332	8	51	25
Saturne	9,539	9,53936	2	39	20	10761	14	36	42
Herschel	. . .	19,0818	0	46	12	30445	18	0	0
le Soleil	106,778	0,0000	.	.	.	. . .	.	.	.
la Lune	0,3141	. . .	5 5	0 18	0 0	27	7	43	4

Entre toutes les orbites qui viennent d'être indiquées, considérons particulièrement celle de la terre, parce que sous plusieurs rapports elle nous importe à connoître. La durée de sa révolution est l'intervalle de tems qui s'écoule, depuis le moment où la terre est placée dans un plan, qui perpendiculaire à celui de l'écliptique, passe par le soleil & une étoile, jusqu'au moment où elle revient à ce même plan. C'est cette durée qui est celle d'une année, & qui est divisée en douze parties égales, nommées mois; comme la circonférence de l'écliptique est partagée en douze portions, égales qui ont le nom de signes.

Ce mouvement avec lequel la terre parcourt son orbite autour du soleil, n'est pas le seul dont elle soit animée. Elle tourne aussi sur elle-même, un peu plus de 365 fois, pendant le cours de sa révolution à l'égard du soleil. La durée de cette rotation reçoit le nom de

jour; & ce dernier mouvement a été reconnu de la plus grande uniformité. Mais la vitesse orbiculaire de la terre est variable, & elle augmente à mesure que sa distance au soleil diminue. Il est d'ailleurs à remarquer que, malgré la combinaison de ces 2 mouvemens, l'axe de rotation de la terre conserve presque constamment une même position dans l'espace; il reste sans cesse parallele à lui-même, & toujours ses extrêmités répondent aux mêmes étoiles, à quelques dérangemens près, qui n'intéressent pas assez particulièrement la sureté des navigateurs, pour en rendre le développement nécessaire. C'est ainsi que le plan de l'équateur, auquel cet axe est perpendiculaire, conserve toujours, à l'égard de l'écliptique, une inclinaison qui ne change qu'insensiblement, & qui est actuellement de 23 degrés 28 minutes à-peu-près.

La terre n'est pas la seule planete qui tourne sur elle-même: car déjà on a reconnu que le Soleil, Venus, Mars, Jupiter ont aussi un mouvement semblable, qui est plus ou moins rapide.

Pendant que la terre fait sa révolution annuelle autour du soleil, elle est accompagnée par un astre secondaire, dont tous les mouvemens sont d'autant plus importans à connoître pour l'art de la navigation, qu'ils s'exécutent dans le ciel avec beaucoup de rapidité, & à peu de distance de la terre. La lune est cet astre, & elle tourne périodiquement autour de la terre, dans une orbite qu'elle parcourt (si on la compare aux étoiles) en 27 jours 7 heu. 43′ 4″. L'inclinaison variable de cette orbite sur l'écliptique, ainsi que le diametre de cet astre, sont indiqués dans le tableau précédent; & sa distance moyenne est 85464 lieues. La lune a, ainsi que la terre, un mouvement de rotation sur elle-même, & la durée de cette rotation est égale à celle de sa révolution dans son orbite. C'est ce rapport singulier qui explique clairement pourquoi, daus tous les points de son orbite, cet astre présente à la terre une face toujours la même. D'ailleurs sa vitesse orbiculaire ainsi que son diametre apparent, ne restent jamais d'une égale grandeur, parce que les distances de cet

aſtre à la terre, changent dans tous les points de ſon orbite.

Jupiter, dans ſa révolution autour du ſoleil, eſt auſſi accompagné de quatre lunes qu'on nomme ſatellites, & qui parcourent chacune une orbite dont cette planete principale eſt le centre. Le premier de ces ſatellites, dont tous les mouvemens peuvent être prédits avec beaucoup de préciſion, & dont les poſitions varient rapidement, puiſque la durée de ſa révolution eſt de 1 jour 18 heures 27 min. 33 ſec., doit ſur-tout être remarqué par les hommes de mer, parce que les obſervations qu'on peut en faire ſont faciles & utiles à la détermination des longitudes. Saturne eſt entouré de ſept ſatellites qui décrivent chacun une orbite particuliere dont il eſt le centre; & déjà on a découvert que la planete Herſchel a deux ſatellites.

Si on conſidere actuellement toutes les ſituations que les planetes principales & ſecondaires peuvent prendre, ſoit entr'elles, ſoit à l'égard des étoiles; par la variété de leurs mouvemens, qui dailleurs ſont tous dirigés d'occident en orient: on voit que leurs diſtances doivent changer à chaque moment de la durée. On voit que dans leurs courſes différentes, ces aſtres peuvent être amenés les uns vis-à-vis des autres, & que quelque fois ils peuvent ſe trouver ſur une meme ligne droite. Dans ce dernier cas, les uns ne ſont plus viſibles pour les autres; & pour ceux-ci, ils ſont cachés ou éclipſés par des planetes intermédiaires. C'eſt ainſi que certaines planetes peuvent intercepter la lumiere dont le ſoleil éclaire d'autres aſtres ſemblables. C'eſt ainſi que la lune paroît éclipſée, lorſque le corps de la terre, placé intermédiairement ſur la ligne qui réunit les centres du ſoleil & de la lune, enveloppe celle-ci de ſon ombre. C'eſt ainſi que le ſoleil eſt lui-même éclipſé, pour certains points de la terre, lorſque la lune vient ſe placer entre la terre & le ſoleil. Des étoiles peuvent auſſi être éclipſées par la lune, ſuivant les poſitions de cet aſtre; & enfin les ſatellites des planetes doivent paroître éclipſés toutes les fois qu'ils traverſent l'ombre qui eſt projettée dans l'eſpace par les corps opaques de ces aſtres.

Cette immobilité des étoiles, ces distances variables des planetes, ces éclipses, ces occultations sont les grands phénomenes qui méritent l'attention des hommes de mer, parce qu'ils sont comme autant de fanaux placés dans le ciel, pour éclairer la marche des vaisseaux. C'est pourquoi des almanachs nautiques, la connoissance des tems, des éphémerides célestes, annoncent d'avance tous les objets d'observations qui, pendant le cours d'une ou de plusieurs années, peuvent intéresser l'art de la navigation. Ainsi les travaux que ces prédictions exigent, & qui sont entrepris sur-tout pour le service des navigateurs, font à ceux-ci un devoir d'en faire, & d'apprendre à en faire des applications utiles. Remarquons que ces almanachs indiquent les phénomenes célestes tels qu'ils doivent être vus de la de la terre. Ainsi après avoir présenté une idée générale & suffisante de l'état réel du ciel, il faut examiner comment les astres sont vus de la terre, dans les diverses situations où ils peuvent être supposés, en ayant égard à la rapidité & à la direction de leurs mouvemens.

161 *Etat apparent du ciel vu de la terre.* Un habitant du globe, qui est placé sur un point de sa surface, & qui voit les corps célestes correspondre successivement à différens points de l'espace, doit imaginer, parce qu'il se croit dans le repos le plus absolu, que ces corps ont un mouvement qui leur est propre. Cette premiere idée est celle de tous les hommes qui observent le ciel pour la premiere fois; & une telle illusion ne permet pas de distinguer parmi ces astres, ceux qui fixement attachés à une même place, sans aucune vitesse absolue, n'ont qu'une vitesse relative & apparente, qui est l'effet de celle dont l'observateur lui-même est animé. C'est ainsi qu'emportés par la rotation de la terre sur son axe, & nous imaginant dans un repos parfait, nous nous persuadons que tous les astres visibles tournent autour de nous dans un sens qui est contraire à notre propre mouvement. Nous sommes tels que le batelier, qui, descendant une riviere, & oubliant sa vitesse particuliere, la transporte au rivage, ainsi qu'aux objets qui l'entourent, & les imagine emportés dans l'espace

aussi rapidement que le bateau qui l'entraîne dans un sens contraire.

Le spectacle du ciel porte donc tout habitant de la terre à croire que, non seulement les étoiles fixes, mais aussi les planetes & leurs satellites, ainsi que les cometes, se meuvent avec plus ou moins de vitesse, & sur des directions variées, dans les diverses régions du ciel.

En conséquence du mouvement annuel de la terre autour du soleil, l'observateur terrestre attribue aussi à tous les astres environnans, la vitesse avec laquelle il s'avance dans l'écliptique. Les mouvemens apparens des planetes, ainsi que de la lune, sont donc toujours composés des vitesses propres de ces astres & de vitesses relatives. Le soleil par conséquent semble faire autour de la terre des révolutions complettes; & il est devenu si naturel d'attribuer ce mouvement relatif au soleil, qu'on est convenu de considérer l'écliptique comme une orbite décrite annuellement par cet astre autour de la terre, afin que par ce moyen la terre pût être supposée dans l'espace, aussi fixe que le soleil qui lui est comparé. Une telle convention peut d'ailleurs être admise d'autant plus aisément, qu'elle n'altere en rien les rapports réels des situations de la terre & du soleil. Car soit la terre au point *d* de l'écliptique *adcb* (fig. 53), dont le centre *q* est occupé par le soleil. L'habitant de la terre rapporte alors le soleil *q* au point *z*. Arrivé au point *e*, après avoir parcouru la partie *de* de l'écliptique, il rapporte le soleil au point *u*, & les angles *uqz* & *dqe*, étant égaux comme opposés au sommet, on voit que la route *zu*, qu'il suppose faite par le soleil dans l'écliptique, est d'un nombre de degrés parfaitement égal à celui des degrés parcourus réellement par la terre de *d* en *e*. On voit aussi que que ces espaces *de* & *uz* sont non seulement décrits dans un même tems, avec une même vitesse angulaire apparente, mais aussi sur une même direction, qui est celle de l'est à l'ouest.

On peut donc supposer désormais, comme on l'a annoncé, que le soleil se meut annuellement autour de la terre, au-lieu de considérer le mouvement réel de

celle-ci; & la grandeur de la vitesse angulaire & apparente du soleil doit donner la mesure du mouvement réel de la terre. Les autres astres présentent, par les mêmes raisons, des mouvemens relatifs qui se combinent avec leurs mouvemens réels; & c'est ensuite en séparant tous les effets illusoires, que la réflexion fait distinguer parmi ces astres, & ceux qui sont fixes, & ceux qui ont un mouvement propre, & la grandeur, comme la direction de leur vitesse réelle.

162. La rotation de la terre produit encore une illusion particuliere dans l'habitant du globe, qui toujours imagine jouir du repos le plus parfait. Il transporte à tous les astres, la vitesse qu'il peut avoir, & par conséquent chacun lui paroît parcourir, dans un même tems, autour du globe, un cercle qui est parallele à l'équateur. Il imagine que ces astres commencent & achevent en même tems des paralleles différens, & leur vitesse lui paroît être aussi uniforme que la vitesse réelle du lieu de l'observation.

Telles sont les apparences qui résultent du double mouvement de notre globe. Elles sont trompeuses, & elles le sont encore différemment, suivant les divers points que l'observateur habite sur la surface de la terre. Il nous reste par conséquent à développer ces diverses perspectives, qui sont infiniment variées pour les navigateurs, puisqu'à chaque instant ils changent de place sur l'étendue des mers.

Imaginons un observateur en *a* (fig. 54) sur la surface du globe *a*E*p*QP. La pesanteur, comme on le sait, le contraint de prendre & de garder une situation verticale, ou de se placer sur une ligne *oa*M, qui est perpendiculaire à la ligne *x*S, supposée tangente au globe en ce point *a*. La ligne *oa* passe donc nécessairement par le centre de la terre, parce que celle-ci est considérée comme sphérique; & si elle est prolongée jusqu'au ciel en M, on donne à ce point M, qui est par conséquent placé verticalement au-dessus de la tête de l'observateur, le nom de *zenith*.

Dans l'état réel des choses, le point *a* tourne avec la terre autour de l'axe des poles P*p*, & il décrit le

petit cercle *ac* parallele à l'équateur E*y*Q. Pendant cette rotation, si l'observateur en *a*, & qui se croit en repos, voit d'abord à son zénith le point M, ou une étoile qui y est placée. Cette étoile, dans les instans suivans, lui paroît correspondre successivement aux divers points du parallele ML, à mesure qu'il s'avance lui-même dans son propre parallele *ac*. Car la ligne *oa*, appartenant à la terre, tourne comme elle autour de P*p*, & l'extrémité M de cette ligne prolongée, ou le zénith de l'observateur, doit paroître par conséquent décrire la circonférence de la base d'un cône dont le côté est MO. Considérons séparément ce cône, qu'on supposera être *acdb* (fig. 6). Soit l'observateur au point *i* de son parallele *ief*, & *ib* la ligne menée du point *i* à son zénith *b*, ou à une étoile placée à ce zénith. Cette étoile paroît tracer dans le ciel une circonférence *bdc*, qui est parallele au cercle *ief* décrit par l'observateur. Celui ci s'avance-t-il de *i* en *g* ? son zénith parvient alors en *h*, & dans cette nouvelle situation, il ne voit plus l'étoile *b* correspondre à son zénith, mais elle lui paroît placée sur la ligné *gb*. De sorte que comme il croit n'avoir eu aucun mouvement de rotation, il imagine que l'étoile qu'il avoit observé à son zénith, lorsqu'il étoit en *i*, a parcouru l'arc *hb* que ce même zénith a décrit dans le ciel, pendant le tems qu'il a employé à passer de *i* en *g*. Cet arc *hb* est évidemment du même nombre de degrés que l'arc *ig* (128); & l'étoile paroît ainsi à l'observateur avoir parcouru cet espace, non-seulement dans un sens opposé à celui du mouvement réel *ig*, mais aussi dans un intervalle de tems parfaitement égal (fig. 54). Un observateur qui est en *a* sur la surface du globe, croit donc voir décrire dans le ciel à une étoile qui est placée à son zénith, la circonférence d'un cercle parallele à l'équateur. Si au-lieu d'être au point *a*, cet observateur se trouvoit au point *u*, alors l'étoile M ne pourroit jamais correspondre au zénith de *u*; & cependant elle paroîtroit à l'observateur en *u*, décrire dans le ciel le même parallele ML. Car soit mené de *u* en M un rayon visuel, & supposons-le prolongé au-dedans du globe, jusqu'à ce qu'il rencontre

en *p* l'axe de rotation de la terre. La ligne *up* doit tourner, comme la terre, autour de cet axe; & pendant que le point *u* décrit un parallele dont le rayon eſt *ur*, l'extrémité M de la ligne *p*M, décrit la circonférence d'un cercle qui lui eſt parallele, & qui eſt la baſe d'un cône dont M*p* eſt le côté. On démontreroit, comme précédemment (fig. 6), que ce cercle ML eſt décrit dans le ciel, non ſeulement dans un tems égal, mais auſſi dans un ſens contraire au mouvement réel de rotation du point *u*; & comme (fig. 54) ce parallele ML a encor pour rayon MB, il eſt le même que celui qu'un obſervateur en *a* voit parcourir à l'étoile M. Le changement de lieu d'un obſervateur ſur la ſurface du globe, ne produit donc aucune différence dans la grandeur des paralleles dans leſquels ſemblent ſe mouvoir journellement les corps céleſtes autour de la terre.

Remarquons qu'en donnant les noms d'équateur & de méridiens céleſtes aux plans prolongés R*q*F & RNL de l'équateur tereſtre E*ye*, & du méridien E*a*P du lieu *a* ſuppoſé, les arcs RM & E*a* ſont égaux, comme ſervant l'un & l'autre de meſure au même angle E*oa* ou R*o*M. C'eſt par cette raiſon que la latitude d'un lieu ſur la terre eſt égale à la diſtance de ſon zénith à l'équateur céleſte. Remrquons auſſi que le rayon MB du parallele que l'étoile M décrit dans le ciel, eſt toujours le coſinus de l'arc MR, ou celui de la diſtance de cette étoile à l'équateur.

Au milieu de toutes ces illuſions, les obſervateurs ont dû chercher à connoître l'état réel des choſes, & à éviter toutes les erreurs qui peuvent égarer leur jugement. Il leur a donc fallu trouver le moyen d'aſſigner dans le ciel à tous les aſtres qu'on y découvre, une poſition qui fût indépendante de toutes ces apparences, & qui pût être déterminée & vérifiée dans tous les tems, afin que dans tous les tems il fût facile de juger de la mobilité des uns & de l'état fixe des autres. C'eſt pourquoi les hommes imaginerent de ſe regarder comme placés au centre de l'eſpace, ou au centre d'une vaſte ſphere, dont le rayon égaleroit la diſtance des étoiles à la terre & dont la ſurface préſenteroit dans

ſes divers points des lieux fixes auxquels ils pourroient rapporter tous les corps céléſtes & viſibles. Si cette idée eût été adoptée dans toute ſa ſimplicité, elle eût imposé l'obligation de ſuppoſer autant de ſpheres qu'il y a de points ſur la ſurface du globe. C'eſt en conſidérant un auſſi grand inconvénient, qu'on eſt convenu de prendre pour centre de la ſphere céleſte, non tel ou tel point de la ſurface du globe, mais le centre de ce globe; & par conſéquent de réduire toutes les obſervations, faites à la ſurface de la terre, à ce qu'elles euſſent été, ſi l'obſervateur ſe fût trouvé au centre; & ce centre eſt ainſi devenu celui de la ſphere céleſte.

C'eſt conformément à ces vues & à ces raiſons, qu'on a imaginé prolongés dans l'eſpace, ou dans l'intericur de cette ſphere (qui dans ſon étendue embraſſe tous les corps céleſtes), les plans des divers cercles qu'on a ſuppoſés décrits ſur le contour du globe terreſtre, tels que ceux de l'équateur, des méridiens & des paralleles. Alors dans la ſphere céleſte, ces cercles ayant une ſituation fixe, ſont devenus des termes de comparaiſon propres à être employés à déterminer la poſition de tous les aſtres, & auſſi convenables que les cercles pareils qui ont ſervi ſur la terre à fixer la longitude & la latitude des points de ſa ſurface. Nous avons vu que, par la latitude *a*E d'un point *a*, ou ſa diſtance à l'équateur E*ye* (comptée ſur le méridien E*ap* du lieu *a*); & par ſa longitude E*y*, ou par l'arc de l'équateur (compris entre E*ap* & le premier méridien, qu'on ſuppoſe paſſer par le point *y*), la poſition du point *a* eſt parfaitement déterminée. Il doit donc en être de même de l'aſtre M, ſi on peut ſavoir, & la grandeur de ſa diſtance MR au plan de l'équateur (comptee ſur le méridien céleſte qui paſſe par M), & l'arc R*q* de l'équateur céleſte, (qui eſt compris entre le méridien céleſte, & le point *q*, qu'on eſt convenu d'adopter dans ces meſures, pour le premier point de la circonférence de l'équateur). Un méridien céleſte, qui, tel que NMR, paſſe par un aſtre M, eſt nommé le cercle de déclinaiſon de cet aſtre; & l'arc MR, ou la diſtance de M à

l'équateur eſt la déclinaiſon de cet aſtre. L'arc de l'équateur Rq reçoit d'ailleurs le nom d'aſcenſion droite de l'aſtre. ces arcs, comme on voit, ſont dans le ciel, ceux qu'on connoît ſur la terre ſous les noms de latitude & de longitude; & par des raiſons ſemblables, ils ſont meſurés & indiqués de la même manière; c'eſt-à-dire que l'aſcenſion droite d'un aſtre eſt comptée d'occident en orient; & que ſa déclinaiſon eſt boréale ou auſtrale, ſelon que cet aſtre ſe trouve dans l'hémiſphere nord ou ſud.

On voit d'après ces premieres diſpoſitions, que les déclinaiſons & les aſcenſions droites de tous les aſtres étant connues pour une époque de la durée; & les mêmes moyens étant employés à une autre époque, pour les connoître de nouveau; on peut, en comparant les réſultats, prononcer que tels aſtres ſont fixes, ſi leurs déclinaiſons & leurs aſcenſions droites ſont reſtées les mêmes; & que tels aſtres ont eu un mouvement réel dans l'eſpace, ſi leur poſition à l'égard de l'équateur paroît avoir varié. C'eſt ainſi qu'on peut parvenir à apprécier, & le dégré, & la direction de la viteſſe de ces aſtres mobiles, en conſidérant les changemens qu'ont pu éprouver, ſoit leurs déclinaiſons, ſoit leurs aſcenſions droites primitivement obſervées.

Déjà on doit appercevoir les reſſources que promet l'aſtronomie aux navigateurs, pour déterminer la latitude & la longitude de chaque point de la ſurface du globe, puiſqu'un aſtre M, qui eſt au zénith d'un lieu & dans le plan de ſon méridien, a une déclinaiſon qui eſt égale à la latitude de ce lieu, & une aſcenſion droite qui a des rapports immédiats avec ſa longitude terreſtre.

163. Nous avons vu ailleurs les motifs qui ont porté à adopter l'équateur terreſtre & un premier méridien, pour fixer la poſition de tous les points de la ſurface du globe; mais nous devons penſer que dans les mêmes vues, & malgré les raiſons qui ont conduit à un tel choix, il eût été permis de prendre deux autres grands cercles quelconques perpendiculaires entre eux. Ainſi, dans la ſphere céleſte, on peut rapporter

les aſtres à tout autre cercle que l'équateur, & ils peuvent l'être par conſéquent an plan de l'écliptique, ou à cette orbite qu'on ſuppoſe décrite par le ſoleil, autour de la terre, qui doit en être regardée comme le centre. Cette orbite peut être imaginée dans le plan prolongé d'un des grands cercles du globe. Soit donc (fig. 54) *fb*T le plan de ce grand cercle ou de l'écliptique. Suppoſons auſſi un autre grand cercle qui ſoit perpendiculaire au premier, & qui paſſe par l'interſection de l'écliptique & de l'équateur R*q*F. C'eſt par les diſtances d'un aſtre à chacun de ces cercles, que ſa poſition dans le ciel peut être déterminée. Si le cercle LMR paſſe par le pole X de l'écliptique, ainſi que par le pole N de l'équateur & par l'aſtre M; il eſt en même tems perpendiculaire à l'écliptique & à l'équateur, & l'arc M*f* compris entre l'aſtre & *f*T, reçoit le nom de latitude de l'aſtre. D'ailleurs cette latitude eſt boréale, ſi l'étoile M eſt dans l'hémiſphere *f*XT où eſt placé le pole nord; & elle eſt auſtrale lorſque l'aſtre eſt dans l'hémiſphere oppoſé. Un cercle mené par un aſtre & par le pole X de l'écliptique, porte le nom de cercle de latitude; & le premier de tous ces cercles eſt celui qui paſſe par le point d'interſection *b* de l'équateur & de l'écliptique. (Ce point d'interſection eſt nommé le premier point de la conſtellation du belier, un des 12 ſignes du zodiaque). L'arc de l'écliptique *fb*, qui eſt compris entre le cercle de latitude de l'aſtre, & celui qui paſſe par *b*, eſt la longitude de cet aſtre. Celle-ci ſe compte de 0° à 360°; & d'occident en orient, parce que telle eſt la direction des deux mouvemens réels de la terre.

Remarquons que, ſi la poſition d'un aſtre eſt donnée dans le ciel, par ſa déclinaiſon & ſon aſcenſion droite, on peut aiſément en conclure ſa latitude & ſa longitude; en ſuppoſant connue l'inclinaiſon de l'écliptique ſur l'équateur, qui eſt actuellement de $23^\circ\ 27'\ 48''$. En effet, ſoit un aſtre en A. Soient menés, par le point A & par les points N & X, qui ſont les poles de l'équateur & de l'écliptique, deux grands cercles, l'un de déclinaiſon NAD, & l'autre de latitude XAE.

La déclinaiſon de l'aſtre A eſt AD, & ſon aſcenſion droite eſt D*b* (*b* étant le premier point du bélier, ou un point d'interſection de l'équateur & de l'écliptique). Avec ces deux élémens connus, on peut aiſément calculer la latitude A*e* de l'aſtre & ſa longitude *eb*. Car conſidérons le triangle ſphérique NAX. On y connoît le côté AN. On ſuppoſe auſſi donnée, l'inclinaiſon R*of* des plans de l'écliptique & de l'équateur; ou la diſtance NX des poles de ces cercles. Enfin l'arc D*b* a pour complément l'arc DR (en ſuppoſant que le cercle XNR paſſe par les poles des deux cercles); ainſi l'angle RND eſt connu, & par conſéquent ſon ſupplément ANX. On peut donc calculer, dans le tri. ANX, & le côté AX, qui eſt le complément de la latitude de l'aſtre, & l'angle AXN, qui eſt celui de ſa longitude.

Puiſque la poſition d'un aſtre à l'égard de l'équateur, peut ſervir à faire connoître celle qu'il peut avoir relativement à l'écliptique, nous nous bornerons ici à ne conſidérer que les déclinaiſons & les aſcenſions droites des aſtres, parce que ces quantités ont des rapports avec les latitudes & les longitudes terreſtres. Mais ces cercles imaginaires, tels que les méridiens & l'équateur, ne ſont ni tracés ni viſibles ſur la ſurface du ciel. Alors quelle reſſource reſte-t-il aux obſervateurs terreſtres, pour juger de la déclinaiſon & de l'aſcenſion droite d'un aſtre quelconque. La nature préſente à l'homme induſtrieux tous les moyens néceſſaires, pour n'être pas arrêté par ces difficultes. On ſait qu'elle anime tous les corps terreſtres d'une force toujours active, qui, ſous le nom de peſanteur, les ſollicite ſans ceſſe à ſe précipiter vers le centre de la terre. Ainſi un corps en *a* étant ſuſpendu librement par un fil, ce fil, par ſa direction, indique la ſituation d'une ligne *oa*M, qui paſſe par le zénith du lieu *a*, & déſigne par conſéquent l'étoile M dont la déclinaiſon eſt égale à la latitude de *a*. On voit donc qu'étant donnée la déclinaiſon de l'étoile M, on peut en conclure la latitude du lieu *a*, & réciproquement. De même la poſition du

méridien de *a* eſt propre à faire connoître celle du cercle de déclinaiſon de M.

Un fil à plomb eſt ſans doute très-convenable à employer, comme on le fait à terre, dans un obſervatoire fixe; mais à la mer, dans un vaiſſeau agité par les lames, tourmenté par les vents, & pouſſé plus ou moins vivement dans l'eſpace, l'uſage du fil à plomb ne peut plus être adopté, parce que ſa ſituation naturelle eſt alors troublée par toutes les cauſes indiquées. Il reſte cependant aux navigateurs un nouveau moyen qui ſupplée au premier. C'eſt un plan *xas*, qui, au point *a*, eſt tangent à la ſurface de la terre, & auquel par conſéquent la ligne verticale M*ao* eſt perpendiculaire. Ce plan eſt nommé l'horiſon ſenſible d'un obſervateur qui eſt au point *a*; & un navigateur en mer peut le voir & en embraſſer l'étendue. Prolongé juſqu'au fond de la ſphere céleſte, ce plan ſépare tous les objets de cette ſphere qui ſont viſibles du point *a*, de ceux qui ne le ſont pas. Car toute autre ligne qu'on imagineroit dirigée de *a* au-deſſous de *a*SG, traverſeroit une partie ſolide de la terre; & par conſéquent aucun rayon de lumiere ne peut arriver au point *a*, lorſqu'il eſt lancé d'un point placé au-deſſous de l'horiſon ſenſible. Cet horiſon paroît avoir une forme circulaire, parce qu'un obſervateur en *a*, & en mer, ſemble avoir une vue qui eſt terminée de tous les côtés également, & parce qu'il s'imagine toujours être le centre de tous les objets qui l'environnent. Remarquons qu'une différence conſidérable diſtingue les horiſons de ceux qui habitent ou les terres ou les mers. L'horiſon de ceux-là eſt rarement une ſurface plane, mais une ſurface inégale, variée, & plus ou moins bornée par divers objets qui ſont placés irrégulièrement à différentes diſtances. Celui des navigateurs eſt uniforme au contraire: il n'eſt terminé de tous côtés que par le ciel, qui ſemble s'abaiſſer ſur tous les points de ſon contour, pour marquer ſes limites; & il n'y a que quelques lames plus ou moins élevées, mais toutes de même couleur, qui diverſifient quelquefois l'aſpect d'un tel horiſon.

Supposons un navigateur en *a*. S'il observe un astre placé en N, & s'il le compare au point G de la circonférence de son horison sensible, qui correspond verticalement à cet astre; l'angle N*a*G des deux rayons visuels dirigés du point *a*, l'un au point G, & l'autre au centre de l'astre N, a pour mesure un arc qui est nommé la hauteur apparente de cet astre sur l'horison sensible du lieu *a*. Le titre d'apparente qu'on donne à cette hauteur, sert à la distinguer de la hauteur NH du même astre, qui seroit observé du centre *o* de la terre, à l'égard d'un plan OH d'un grand cercle, qu'on suppose être parallele à l'horison sensible *a*G. (Ce dernier cercle est, par cette raison, nommé l'horison rationel du lieu *a*). C'est cette hauteur NH qui doit être employée dans les calculs de latitude ou de déclinaison, parce que, comme nous l'avons dit, les arcs qui représentent, ou la latitude, ou la déclinaison, ou la longitude, ou l'ascension droite d'un point quelconque, ont pour centre celui du globe, auquel nous sommes convenus de rapporter tous les corps célestes.

On voit que l'angle N*a*G, qui est observé du point *a*, est toujours plus petit que l'angle N*o*H observé du centre *o*. Leur différence est l'angle *a*N*o*, & ce dernier est connu sous le nom de parallaxe de l'astre N. Ainsi lorsqu'on connoît la grandeur réelle de l'angle N*a*G, (corrigée de l'influence de l'athmosphere), ou la hauteur réelle de l'astre N au-dessus de l'horison sensible, il faut l'augmenter de la parallaxe ou de l'angle *a*N*o*; & somme est alors la hauteur de l'astre, telle qu'elle eût été observée du centre de la terre, au-dessus de l'horison rationel.

Remarquons que dans le triangle N*ao*, le sinus de l'angle *a*N*o*, ou de la parallaxe de hauteur de l'astre, est au sinus de l'angle *oa*N, ou de l'angle M*a*N, c'est-à-dire de la distance apparente de l'astre au zénith, comme le rayon de la terre, est à la distance de l'astre au centre de la terre. De tels rapports conduisent à conclure que les parallaxes d'un même astre varient comme les sinus de ses distances au zénith; que sa parallaxe la plus grande doit avoir lieu au moment où il

paroît

paroît à l'horiſon; & que pour une même diſtance au zénith, les aſtres ont une parallaxe d'autant plus petite qu'ils ſont plus éloignés de la tere. c'eſt par cette derniere conſidération qu'on doit juger infiniment petite la parallaxe des étoiles. Celle de la lune doit être au contraire très-conſidérable, parce que cet aſtre eſt voiſin de la terre; & ſi la parallaxe des étoiles peut être négligée dans les calculs, on doit tenir un compte très-exact de celle de la lune.

C'eſt en corrigeant, comme on l'a dit, de ſa parallaxe, la hauteur d'un aſtre, meſurée au-deſſus de l'horiſon ſenſible, qu'on parvient à trouver ſa hauteur vue du centre de la terre, au-deſſus de l'horiſon rationel. Cette correction étant rendue toujours poſſible, ſoit par des obſervations directes, ſoit par des tables de parallaxes calculées par des aſtronomes, nous ceſſerons de conſidérer les obſervations comme étant faites dans l'un quelconque des points de la ſurface de la terre, mais comme étant faites au centre même de la ſphere. Suppoſons par conſéquent (fig. 55) que C ſoit le centre de la terre, que SONE ſoit l'horiſon rationel d'un obſervateur, dont le zénith eſt le point Z, qui eſt en même tems le pole du cercle SONE; Et ſi le plan de l'équateur céleſte eſt EMO, il coupe celui de l'horiſon aux deux points E & O. Si l'arc PZS repréſente le méridien du lieu (prolongé dans le ciel,) l'interſection SN de ce plan avec l'horiſon eſt nommée la ligne méridienne de ce lieu, ou la ligne nord & ſud; parce que ſes extrémités N & S correſpondent verticalement aux deux poles de l'équateur. Enfin comme les cercles de l'équateur & de l'horiſon ſont ſuppoſés perpendiculaires au plan du méridien SZP qui paſſe par les poles de ces cercles, l'interſection EO de ces derniers doit être auſſi perpendiculaire au plan ZMS, & par conſéquent à la ligne méridienne SN. Cette ligne OE, qui réunit les points d'interſection des circonférences de l'équateur & de l'horiſon, eſt donc la ligne Eſt & oueſt.

L'horiſon & le méridien d'un lieu étant deux cercles qui ſont perpendiculaires l'un à l'autre, on peut rap-

porter un aſtre à leur plans, pour aſſigner ſa poſition dans le ciel (en remarquant cependant que ces cercles étant variables, comme les lieux auxquels ils ſont relatifs, ces poſitions ne ſont point abſolues, & qu'elles ne ſont que relatives à tel horiſon déterminé); ſi on fait uſage de ces deux cercles, & ſi on leur rapporte tous les aſtres qui ſont ſur un horiſon, c'eſt parce qu'on eſt obligé de comparer les aſtres à des plans qui ſont ſeuls offerts aux yeux d'un obſervateur. Ces premieres obſervations ſervent enſuite à déterminer la poſition de ces aſtres, à l'égard des cercles fixes de la ſphere, qui ſont l'équateur & le premier cercle de déclinaiſon. Soit donc ſuppoſé un aſtre en *e*. Si par ce point & par le zénith du lieu, on mene un arc *zea* (qui reçoit le nom de vertical); l'arc *ea* eſt ce que nous avons nommé la hauteur de l'aſtre vue du point C. L'arc *Sa*, ou l'arc de l'horiſon, compris entre le vertical *zea* de l'aſtre & le méridien ZMS du lieu, eſt nommé l'azimuth de l'aſtre. Ainſi la poſition de cet aſtre, comme de tout autre corps céleſte ſur l'horiſon, eſt déterminée par ſa hauteur & par ſon azimuth.

Actuellement appliquons ici les conſidérations préſentées précédemment ſur le mouvement apparent des aſtres. Si la déclinaiſon d'un aſtre eſt *u*M; ſoit tracé, par le point *u*, dans la ſphere céleſte, un petit cercle *uemrn*, qui, parallele à l'équateur OME, eſt, par cette raiſon, nommé le parallele de l'aſtre. Ce cercle repréſente la route que l'aſtre ſuppoſé paroît décrire chaque jour, aux yeux d'un obſervateur qui a le cercle SONE pour horiſon rationel; & on voit que cet aſtre, dans chaque point de ſa courſe, ne ceſſe de changer de hauteur, ainſi que d'azimuth ſur l'horiſon. Remarquons d'ailleurs que ce cercle, qui ne paſſe pas par le centre C, eſt coupé par l'horiſon en deux parties inégales *mun* & *mrn*; & que, dans ce parallele les ſeuls points qui ſoient viſibles du point C, ſont ceux qui ſont placés au-deſſus du plan SONE. L'aſtre qui décrit un tel cercle, ne commence donc à paroître ſur l'horiſon SONE, que lorſqu'il eſt arrivé au point *m* de ſon parallele. Enſuite il parcourt la partie viſible

mun de ſon parallele, avec d'autant plus de rapidité, que le rayon de ce cercle eſt plus grand, & toujours en dirigeant ſa courſe de l'eſt à l'oueſt. Au moment où il eſt au point *m*, ſa hauteur eſt nulle, ſon azimuth eſt *m*ES; & on doit remarquer qu'il ſe leve à une diſtance *m*E du vrai point d'eſt du monde. Cet arc *m*E eſt nommé l'amplitude ortive de l'aſtre, & nous verrons ailleurs que cet arc eſt bon à connoître, pour déterminer les variations de la bouſſole. On doit voit, par une conſéquence directe de ces principes, que tout aſtre qui n'a pas de déclinaiſon, ou qui eſt dans l'équateur E*mo*, n'a aucune amplitude.

Cet aſtre étant arrivé en *u*, ſa hauteur eſt *us*. Si alors il eſt dans le méridien du lieu, ſon azimuth eſt nul, & il eſt parvenu à ſa plus grande hauteur au-deſſus de l'horiſon. En effet conſidérons l'aſtre en *e*, & formons le triangle *ze*P, en menant le vertical *ze*, & le cercle de déclinaiſon P*e* de cet aſtre. Nommons *h* le côté *ze*, *d* le côté P*e*, *l* le côté *z*P (en remarquant que ce dernier eſt le complément de *z*M, ou de la latitude du lieu; comme P*e* eſt le complément de la déclinaiſon de l'aſtre, & *ze* celui de ſa hauteur). Nommons auſſi P l'angle horaire *z*P*e* (160). Nous avons vu (153) que entre les trois côtés de ce triangle & l'angle *z*P*e*, on a l'équation ſuivante, $cos.h = cos.e.cos.d + sin.e.sin.d.cos.P$; ainſi le coſin. de *h*, ou le ſinus de la hauteur de l'aſtre, doit être le plus grand, lorſque le coſinus de P eſt le plus grand, ou lorſque l'angle horaire P eſt nul. C'eſt donc quand l'aſtre eſt au méridien, qu'il eſt parvenu à ſa plus grande hauteur au-deſſus de l'horiſon. Comme il doit y avoir deux points ſur le parallele *mun* (l'un placé avant le paſſage de l'aſtre au méridien, & l'autre après ce paſſage) dans leſquels l'aſtre correſpond à un ang. horaire P de même grandeur. La hauteur de l'aſtre dans ces deux points, doit auſſi être la même (lorſque ſa déclinaiſon ne change pas dans l'intervalle de tems qu'il faut à l'aſtre, pour paſſer d'un de ces points à l'autre, & lorſque la latitude du lieu eſt conſtamment la même). Car alors ſi on imagine, pour chacun de ces points, un triangle formé comme *ze*P; les valeurs

de *cos.h*, dans les 2 cas, sont nécessairement les mêmes d'après la formule précédente.

Réciproquement la hauteur d'un astre étant observée de chaque côté du méridien, & étant trouvée la même, les angles P sont égaux aux époques des deux observations. En conséquence, la demi-somme des valeurs de ces deux angles P, doit indiquer l'heure du passage de l'astre au méridien. C'est sur ce principe qu'on a imaginé la méthode d'observer des hauteurs égales & correspondantes d'un même astre, pour connoître l'heure de son passage au méridien d'un lieu.

163. Remarquons qu'un astre qui s'avance dans son parallele *meu*, ne s'éleve pas d'une même quantité au-dessus de l'horison dans chaque égal intervalle de tems. En effet, supposons que dans un instant *t* infiniment petit (que nous prenons pour l'unité de tems), cet astre se soit avancé de *a* en *u* (fig. 97. G). Ce tems *t* indique la mesure de l'angle *u*P*a* (P étant le pole de la sphere céleste, & *z* le zénith du lieu supposé). Soit *za* ou H la distance de cet astre au zénith, en un point *a* de son parallele; & en un point *u*, soit cette distance *zu* représentée par *h*. Adoptons aussi les dénominations précédentes, & regardons avec raison la déclinaison de l'astre, comme ne variant pas pendant l'instant *t*, qui est infiniment petit. Alors dans le triangle *za*P, on a l'équation $cos.H = cos.e.cos.d + sin.e.sin.d.cos.P$. Lorsque l'astre est en *u*, on a aussi $cos.h = cos.e.cos.d + sin.e.sin.d.cos.(P-t)$. Si on retranche ces deux équations l'une de l'autre; si on nomme *q* la différence des quantités H & *h*, qui ne peut être que très-petite; & si on fait attention que les arcs *q* & *t* étant très-petits, le cosinus de chacun doit être égal à-peu-près au rayon, tandis que le sinus differe peu des arcs eux-mêmes; on doit avoir, toute réduction faite, $sin.q.sin.H = sin.l sin.d.sin.t.sin.P$. Considérons d'ailleurs que dans le triangle P*za*, on peut faire la proportion suivante, $sin.P : sin H :: sin.z : sin.d$; & par conséquent $sin.P.sin d = sin.H.sin.z$. Ainsi on peut substituer le produit $sin.H.sin.z$ à celui $sin.P.sin.d$, & l'équation précédente peut être transformée en celle-ci, $sin.q = sin.l.sin.t.sin.z$. Donc le chan-

gement de la hauteur de l'aſtre, pendant l'unité de tems t, eſt la plus grande poſſible, lorſque l'angle z eſt de 90°; c'eſt-à-dire lorſque l'aſtre eſt placé verticalement au-deſſus des points eſt & oueſt du monde. On dit qu'il eſt alors dans le premier vertical. On eſt conduit auſſi par la même formule, a conclure que le mouvement en hauteur eſt nul, lorſque l'angle z s'évanouit, ou lorſque l'aſtre eſt dans le méridien du lieu. Un aſtre qui ſe leve au vrai point d'eſt E, (fig. 55) doit donc s'élever très-vivement au-deſſus de l'horiſon; & au contraire ſa direction devient parallele à ce plan, lorſqu'il eſt arrivé au mérid. Suivons cet aſtre lorſqu'il deſcend à l'horiſon, en parcourant ſon parallele *un*. Il diſparoît auſſitôt qu'il a paſſé le point n; & ce dernier point eſt nommé le coucher de l'aſtre. L'arc *no* de l'horiſon qui eſt compris entre ce point & le vrai point d'oueſt o, eſt nommé l'amplitude occaſe de cet aſtre; & les deux arcs égaux *un* & *um*, qui marquent ſa route apparente dans le ciel pendant ſon ſéjour ſur l'horiſon, ſont nommés ſes arcs ſémi-diurnes. Quant au reſte *nrm* de ce parallele, l'aſtre le parcourt au-deſſous de l'horiſon, & devient, pendant ce tems, inviſible à l'obſervateur dont le zénith eſt z. Si ce parallele *munr* eſt celui du ſoleil, le tems qui s'écoule entre ſon paſſage en u au méridien d'un lieu, & ſon retour au même méridien, eſt ce que nous nommons un jour; & cet intervalle de tems eſt d'ailleurs diviſé en 24 parties égales nommées heures. Si on conſidere le ſoleil au point e de ſa courſe diurne, & lorſque, depuis ſon lever en m, il a tracé l'arc *me* dans le ciel, il lui reſte à parcourir l'arc *eu*, pour arriver au méridien du lieu; c'eſt-à-dire au point où il doit marquer midi pour ce lieu, & annoncer le commencement des 24 heures du jour Cet arc *eu* eſt du même nombre de degrés que l'arc Md (qui ſur l'équateur eſt compris entre les méridiens Pu & Pe; & qui eſt la meſure de l'angle uPe). Ainſi comme le nombre des degrés de cet arc doit indiquer (à raiſon de 360° pour 24 heures) combien il doit s'écouler de tems, depuis le moment où le ſoleil eſt en e, juſqu'à celui de ſon paſ-

ſage au méridien zu, cet angle P eſt nommé par cette raiſon l'angle horaire de l'aſtre.

Le mouvement diurne du ſoleil a été généralement choiſi pour indiquer une meſure du tems ou de la durée. Il ſert par conſéquent à régler la marche des pendules & des montres dont on fait uſage, ſoit dans la ſociété, ſoit dans la marine; & il devient important de faire connoître cet objet ſous tous ſes rapports utiles.

164. Pendant que le parallele *unrm* eſt décrit par le ſoleil; c'eſt-à-dire dans l'eſpace d'un jour, par un mouvement qui eſt dirigé d'orient en occident, & qui eſt relatif au mouvement de rotation de la terre ſur elle-même; le ſoleil s'avance auſſi d'occident en orient, en raiſon de ſon mouvement annuel dans l'écliptique. C'eſt pourquoi ſi à tel jour, il paſſe par le méridien d'un lieu, au même moment qu'une étoile fixe, le lendemain l'étoile le précéde au même méridien, de tout le tems qu'il lui faut pour parcourir l'arc dont il s'eſt avancé en aſcenſion droite, ou de l'oueſt vers l'eſt, pendant 24 heures. Ainſi l'intervalle de deux paſſages conſécutifs du ſoleil au méridien (intervalle qui eſt nommé le jour vrai), eſt toujours plus grand que l'intervalle de deux paſſages d'une étoile.

Cette différence n'eſt pas d'ailleurs la même chaque jour, & la longueur du jour vrai varie ſans ceſſe, parce que le mouvement du ſoleil en longitude, ou en aſcenſion droite, n'eſt jamais uniforme & égal. Si le ſoleil parcouroit l'écliptique avec une viteſſe toujours la même: on trouveroit, (en diviſant 360° par la durée de ſa révolution, qui eſt de 365 j. 5 h. 48 min. 48 ſec.,) ſon changement diurne en longitude. Cette quantité eſt de 59′ 8″, & elle eſt nommée le mouvement moyen & journalier du ſoleil en longitude.

Suppoſons donc que le changement journalier du ſoleil en aſcenſion droite fut de 59′ 8″; tous les jours ſeroient égaux; & c'eſt à chacun de ces jours qu'on a donné le nom de jour moyen. Celui-ci eſt égal à l'intervalle de tems qui s'écoule pendant le paſſage au méridien, de 360° 59′ 8″. C'eſt un tel jour, compoſé de 24 heures moyennes, qui ſeul eſt marqué par les pendules, parce

que ces instrumens ne peuvent avoir qu'une marche uniforme & réguliere: & c'est sur ce mouvement moyen qu'on mesure, & la longueur du jour vrai, & les variations diurnes, ou les intervalles de tems qui s'écoulent entre deux passages consécutifs & effectifs du soleil au méridien d'un même lieu. C'est aussi sur ce mouvement moyen qu'on mesure la révolution diurne des étoiles, qu'on nomme le jour des étoiles; & ce jour ne dure à proportion que le tems qu'il faut à 360° pour passer au méridien; ainsi sa longueur est de 23 heures 56′ 4″.

On distingue donc trois especes de jours; le jour vrai qui est annoncé par le soleil de la nature; le jour moyen qu'on a imaginé de faire marquer par les pendules; & enfin le jour des étoiles, ou le tems qu'on compte à une pendule, depuis le passage d'une étoile à un méridien, jusqu'à son retour au même méridien. La différence du jour vrai au jour moyen est nommée la différence du tems vrai au tems moyen, & elle est utile pour reduire le tems vrai d'une observation, au tems moyen qui seroit marqué par une pendule; ou pour juger par l'heure d'une pendule, du moment vrai d'une observation.

L'heure de midi est déterminée chaque jour par le passage du soleil au méridien: toute autre heure du jour doit l'être aussi par la distance du soleil à ce méridien, ou par la valeur de l'angle horaire P. Lorsqu'un arc *eu* sépare cet astre du méridien, comme le parallele entier composé de 360°, est parcouru en 24 heures vraies, chaque arc de 15° correspond à une heure de tems; c'est-à-dire que si le soleil est à 15° du méridien avant son passage, on ne doit compter qu'onze heures dans le lieu supposé. On voit donc qu'on peut connoître à terre comme à bord d'un vaisseau qu'elle est l'heure qu'on doit compter à chaque instant du jour, en observant la hauteur instantannée, telle que *ea*, du soleil; lorsque d'ailleurs on sait sa déclinaison, ainsi que la latitude du lieu de l'observation. En effet dans le triangle *zPe* (fig. 55), les trois côtés sont alors donnés, & on peut calculer l'angle *zPe*, dont la

valeur reduite en tems, à raiſon de 15° par heure, exprime le tems qui doit s'écouler depuis le point *e* juſqu'au moment du paſſage du ſoleil au méridien. C'eſt ainſi qu'on peut trouver l'heure vraie de l'obſervation de tous les phénomenes céleſtes. Un pareil triangle, s'il étoit conſtruit pour le point *m*, ſerviroit par conſéquent à faire connoître l'heure du lever du ſoleil. Il en ſeroit de même pour l'heure du coucher. Avec tous ces moyens on juge aiſément comment on peut régler la marche d'une pendule ſur le mouvement moyen & diurne du ſoleil, & comment enfin ſes irrégularités ou ſes écarts peuvent être déterminés.

165. Lorſque le ſoleil eſt au point *e* de ſon parallele, ce point eſt parfaitement le même à l'égard de tous les lieux de la terre pour leſquels cet aſtre eſt viſible; & la poſition de ſon cercle de déclinaiſon P*e* eſt indépendante de celle de l'horiſon & du méridien, qui ſont particuliers à chaque lieu. C'eſt pourquoi comparons les deux figures (43 & 55). Suppoſons que le cercle de déclinaiſon *zum* ne ſoit que le prolongement du plan du méridien N*ao* (fig. 43) du lieu *a*; & que P*e* ſoit celui du méridien terreſtre *nud* du lieu *u*. On voit que le ſoleil placé au point *e* de ſon parallele, eſt alors dans le méridien du lieu *u*, tandis qu'au même inſtant il ſe trouve à une diſtance M*d* du méridien du lieu *a*. Il eſt donc alors midi au lieu *u*; & ſi l'arc M*d* (ſuppoſé dans l'eſt du méridien) eſt de 30°, on ne doit compter encore que 10 heures du matin au lieu *a*. Ainſi l'arc M*d* (fig. 55) étant de même nombre de degrés que l'arc *od* (fig. 43), qui meſure la différence des longitudes des points comparés, ce dernier arc *od*, reduit en tems à raiſon de 15° par heure, indique la différence des heures qu'on compte en même tems aux deux points *a* & *u* de la terre. La différence des longitudes de ces lieux doit donc être toujours connue, par celle des heures qui ſont comptées ſous les deux méridiens au même moment. L'inverſe de cette propoſition eſt également vraie.

Il eſt donc de la plus haute importance pour les navigateurs de ſavoir trouver en mer l'heure qu'on doit

compter à tout instant donné, sur un vaisseau; parce qu'alors, en la comparant à celle qui est comptée en même tems sous un méridien déterminé, on parvient à connoître la longitude du vaisseau d'observation.

Le soleil, dont la marche journaliere est la mesure du tems, n'est pas le seul astre dont l'observation puisse être employée à la détermination de l'heure qui doit être comptée à bord d'un vaisseau. Toutes les etoiles (excepté celles qui seroient exactement aux poles du ciel) & les planetes, peuvent servir à cette recherche. En effet supposons qu'on observe en mer, par une latitude connue, la hauteur d'une étoile dont la déclinaison est donnée. On peut calculer son angle horaire zPe (fig. 55), ou l'arc *Md*, qui est la distance de l'étoile *e* au méridien zMS. Si on trouve que cet arc soit de 30°, & si la différence des ascensions droites de l'étoile, & du soleil, (qui est supposé ici dans l'ouest de l'étoile), est en ce moment de 30°, il est évident que le soleil doit être dans le méridien du vaisseau; parce que la différence de ces ascensions droites est toujours l'arc *Md* de l'équateur, qui est compris entre les cercles de déclinaison *Pe* & *PM* de ces deux astres. Dans ce cas, la position de l'étoile sur l'horison du vaisseau, & la différence de son ascension droite à celle du soleil (différence toujours indiquée par les tables), font donc connoître qu'il doit être midi à bord du vaisseau d'observation.

Si le soleil n'est pas au mérid. au moment où l'étoile est observée en *e* du côté de l'est; cette observation peut encore servir à connoître l'heure à laquelle elle est faite, ou l'heure qui est marquée par le soleil. La valeur de P doit être cherché dans le triangle zPe, & ensuite être retranchée de la différence des ascensions droites de l'étoile & du soleil. Le reste est l'arc de l'équateur qui est compris entre le méridien du vaisseau & le cercle de déclinaison du soleil; & cet arc converti en tems, à raison de 15° par heure, donne l'heure indiquée par le soleil, ou l'heure à laquelle l'étoile a été observée. (Cette différence d'ascensions droites doit toujours être prise, en retranchant celle du soleil de celle de l'étoile;

parce que le ſoleil [qui ſert à marquer le tems, ainſi que le commencement de chaque jour & ſa fin], eſt ſuppoſé, de tous les corps céleſtes, celui qui paſſe le premier au méri. de chaque lieu. D'ailleurs ſon mouvement diurne de l'eſt à l'oueſt eſt contraire au ſens ſuivant lequel on compte les aſcenſions droites. Tous les aſtres doivent donc être ſuppoſés dans l'eſt du ſoleil, & avoir une aſcenſion droite plus grande que la ſienne). Si l'étoile eſt obſervée au moment de ſon paſſage au méridien du vaiſſeau, l'angle P eſt nul, & l'heure eſt alors donnée par la ſeule différence des aſcenſions droites du ſoleil & de cette étoile. Réciproquement on peut déterminer l'heure du paſſage d'une étoile au méridien d'un vaiſſeau, en retranchant de ſon aſcenſion droite celle que le ſoleil peut avoir au moment de ce paſſage, en ſuppoſant que ces aſcenſions droites ſoient reduites en tems.

Remarquons que l'aſcenſion droite du ſoleil n'eſt indiquée par la connoiſſance des tems, que pour le moment du midi de chaque jour à Paris; & ſi c'eſt cette aſcenſion droite qu'on retranche (comme cela ſe fait ordinairement) de celle de l'étoile, on n'obtient que l'heure approchée du paſſage de l'étoile au méri. Ce premier réſultat a donc beſoin d'une correction. En effet ſuppoſons que ce réſultat annonce que depuis l'inſtant de midi, juſqu'au paſſage de l'étoile au mérid., il doit s'écouler 6 heures de tems, ou que la différence des aſcenſions droites eſt de 90°: le ſoleil, dans cet intervalle de tems, doit ſe rapprocher de l'étoile (conſéquemment à ſon mouvement annuel), & à l'inſtant des 6 heures écoulées, l'étoile doit être moins éloignée du ſoleil, qu'au moment de midi. L'étoile doit donc paſſer au méridien une minute de tems avant l'heure indiquée par le 1.er réſultat. Car en ne conſidérant que le tems moyen, l'étoile, en 24 heures moyennes, parcourt dans le ciel 360° 59′ 8″, ou 90° en 5 heures 9′ à-peu-près. Le premier réſultat doit donc être diminué d'une minute de tems, pour indiquer le moment réel du paſſage de l'étoile ſuppoſée au méridien d'un lieu. Par conſéquent on doit établir pour regle générale, que l'heure du paſ-

fage d'une étoile au méridien, eſt bien la différence de de ſon aſcenſion droite à celle que le ſoleil peut avoir à midi, mais diminuée d'une minute à-peu-près par 6 heures.

Lorſque la connoiſſance des tems préſente, au-lieu de l'aſcenſion droite du ſoleil, la diſtance de l'équinoxe au ſoleil au moment de midi à Paris, cette diſtance ſert également à trouver l'heure du paſſage d'une étoile au méridien. Car elle eſt la différence de l'aſcenſion droite du ſoleil, à 360° (au moment de midi), reduite en tems à raiſon de 15° par heure. Ce tems eſt alors celui du paſſage du premier point du belier au méridien. Ainſi tous les aſtres doivent ſuccéder dans le méridien, au point de l'équinoxe, à des intervalles de tems d'autant plus grands que leur aſcenſion droite eſt plus conſidérable. L'heure approchée du paſſage d'une étoile au méridien, eſt donc néceſſairement la ſomme de ſon aſcenſion droite & de la diſtance de l'équinoxe au ſoleil. Par exemple, on demande à quelle heure l'épi de la vierge doit paſſer au méridien de Paris le premier mars 1792. L'aſcenſion moyenne de cette étoile eſt 13h. 14′ 16″,3, & la diſtance de l'équinoxe au ſoleil à midi étoit ce jour-là 1 heur. 7′ 36″,4. La ſomme 14h. 21′ 52″,7 eſt l'heure approchée du paſſage cherché. Voici actuellement comment on doit calculer la correction qu'il faut appliquer à ce réſultat, & qui a été expliquée précédemment. Les tables indiquent que le lendemain 2 mars, la diſtance de l'équinoxe au ſoleil étoit diminuée de 3′ 43″,6 après 24 heures; par conſéquent, en 14h. 21′ 52″,7, cette diſtance a dû diminuer de 2′13″,6. L'heure du paſſage, corrigée de cette quantité, eſt donc 14 h. 19′ 39″,1. On néglige dans de tels calculs quelques autres corrections, telles que celles qui réſultent de l'aberration & de la nutation, parce qu'elles ſont ſi petites, que dans la pratique de la navigation on peut ſans danger ſe diſpenſer d'en tenir compte. Dans l'exemple préſent, ces dernieres corrections ne s'éleveroient qu'à 1″,2.

Si on cherche l'heure du paſſage d'une étoile au méridien d'un vaiſſeau, ou d'un lieu éloigné de Paris, la

diſtance de l'équinoxe donnée par les tables, doit être reduite d'abord à raiſon de la différence des longitudes du lieu & de Paris. Enſuite le reſte du calcul eſt parfaitement ſemblable au précédent.

C'eſt avec toutes ces reſſources, que les navigateurs dans tous les tems, peuvent déterminer en mer, l'heure qu'ils doivent compter ſous le méridien où ils ſont placés. Ainſi lorſque des circonſtances favorables leur permettent d'obſerver un de ces phénomenes céleſtes, qui ont lieu au même inſtant pour tous les points du globe; lorſqu'ils ont employé les moyens indiqués pour connoître l'heure de telles obſervations; la connoiſſance des tems, qui annonce l'heure à laquelle ce même phénomene à dû être obſervé à Paris, fait connoître, par la différence des heures comptées ſous les méridiens de Paris & du vaiſſeau, quelle doit être la longitude de celui-ci à l'égard du méridien de Paris. Ces phénomenes inſtantannés ſont, comme on l'a déjà dit, les éclipſes du ſoleil, de la lune, des ſatellites de Jupiter; les occultations des étoiles; & ſur-tout les diſtances de la lune aux étoiles ou au ſoleil. Ces diſtances, qui varient ſi rapidement, & qui, par cette raiſon, ſont ſi favorables à la recherche des longitudes en mer, ſont annoncées dans la connoiſſance des tems, telles qu'elles ſeroient obſervées chaque jour à Paris, de 3 heures en 3 heures; & il eſt aiſé de juger comment elles ont pu être calculées. En effet, ſi à une certaine heure ſuppoſée, on connoît par les tables les arcs P*u* & P*a* (fig. 97. G), qui ſont les complémens des déclinaiſons de la lune & de l'aſtre qui lui eſt comparé, ainſi que l'an. *u*P*a*, qui eſt la différence de leurs aſcenſions droites; on peut, dans le triangle *u*P*a*, calculer le côté *ua*, & par conſéquent annoncer que la lune, à telle heure indiquée, doit être à telle diſtance du ſoleil, ou d'une étoile connue.

166. Tel eſt le rapport général de certaines obſervations aſtronomiques, avec la détermination des longitudes en mer. L'aſtronomie favoriſe également la recherche des latitudes des vaiſſeaux. En effet conſidérons les aſtres au moment de leur paſſage au méridien

d'un lieu (fig. 97. G); & ſuppoſons leurs déclinaiſons connues par les tables, pour le moment des obſervations. Si un aſtre paſſant au méridien en *b*, entre l'équateur QF & le zénith *z*, on obſerve ſa hauteur (nommée méridienne) qui eſt *bo*; & ſi on retranche de *bo* la déclinaiſon *b*Q de cet aſtre, le reſte Q*o* eſt un arc dont le complément Q*z* eſt la latitude du lieu. Si un aſtre eſt obſervé au point *q* d'un méridien, entre l'équateur QF & l'horiſon ON, ſa hauteur déterminée *oq* étant augmentée de la déclinaiſon *q*Q de l'aſtre, devient Q*o*, dont le complément eſt la latitude du lieu. Si le paſſage d'un aſtre au méridien, a lieu en *c* entre le pole & le zénith; ſuppoſons qu'on obſerve ſa hauteur *c*N; comme l'arc PN eſt égal à Q*z* (puiſque ces deux arcs ſont chacun complémens du même arc *z*P) la différence de *c*N au complément *c*P de la déclinaiſon de l'aſtre, eſt l'arc PN, ou la latitude du lieu. Enfin ſi la hauteur méridienne de l'aſtre eſt *r*N, parce que l'aſtre eſt placé entre le pole & l'horiſon; il faut faire une ſomme de cette hauteur obſervée & du complément de la déclinaiſon de l'aſtre, pour déterminer la latitude du lieu de l'obſervation. Ces regles ſont générales, quels que puiſſent être les aſtres obſervés.

Si des nuages, ou d'autres circonſtances contraires s'oppoſent à l'obſervation des hauteurs méridiennes des aſtres, il reſte encore des moyens de déterminer la latitude d'un vaiſſeau; & celui qui peut être employé avec plus de confiance eſt celui-ci. On doit obſerver 2 hauteurs d'un même aſtre, & meſurer, à l'aide d'une bonne montre, l'intervalle de tems qui ſépare les deux obſervations. C'eſt enſuite avec ces données qu'on peut calculer la latitude du lieu, ſi d'ailleurs on connoît la déclinaiſon de l'aſtre, aux momens des deux obſervations. En effet ſoient *u* & *a* les points ou ſe trouve l'aſtre lorſqu'il eſt obſervé; & ſoient conſtruits les triangles *z*P*u* & *z*P*a*. On connoît, dans le triangle *uz*P (d'après les ſuppoſitions), & le côté *zu* qui eſt le complément de la hauteur obſervée de l'aſtre en *u*, & le côté P*u* qui eſt le complément de ſa déclinaiſon. Ainſi il faudroit déterminer l'angle *zu*P, pour calculer le côté

zP, qui, dans ce même triangle, repréſente le complément de la latitude cherchée. Cet angle eſt la différence des angles *zua* & P*ua*. Dans le triangle P*ua*, on peut calculer & le côté *ua*, & l'angle P*ua*, parce qu'on y connoît les deux côtés P*u* & P*a*, qui ſont les complémens des déclinaiſons de l'aſtre en *u* & en *a*, & parce que l'angle *u*P*a* a pour meſure l'intervalle des obſervations (reduit en degrés). Alors, dans le triangle *zua*, les trois côtés ſont connus & peuvent conduire à trouver la valeur de l'angle *zua*, qui, diminué de l'angle P*ua*, devient égal à l'angle *zu*P. C'eſt enfin, avec ce dernier angle calculé, & avec les côtés connus *zu* & *u*P qu'on trouve facilement dans le trian. *zu*P, le côté *z*P, qui eſt le complément de la latitude cherchée.

Si au même inſtant on obſervoit à bord d'un vaiſſeau, les hauteurs de deux aſtres, dont les déclinaiſons & les aſcenſions droites ſeroient connues; on parviendroit encore, par le même procédé, & en employant les mêmes triangles, à déterminer la latitude de ce vaiſſeau. Ce cas-là ne differe du précédent qu'en ce que l'angle *u*P*a* eſt dans celui-ci donné par la meſure du tems qui ſépare les obſervations; & que dans l'autre cas, cet angle a pour valeur la différence connue des aſcenſions droites des deux aſtres obſervés.

167. Il eſt ſouvent néceſſaire dans la navigation, de ſavoir quel eſt l'azimuth d'un aſtre, ou quelle eſt ſon amplitude; & on peut calculer ces arcs, lorſqu'on connoît la déclinaiſon de l'aſtre & ſa hauteur, ainſi que la latitude du lieu. Quel que ſoit le point du ciel *e* (fig. 55), dans lequel eſt placé un aſtre au moment où ſa hauteur *ea* eſt obſervée; on peut faire un triangle *ze*P, (dont les côtés ont une dénomination déjà indiquée précédemment). Les trois côtés de celui-ci ſont donnés, puiſque la hauteur de l'aſtre eſt ſuppoſée obſervée; & ſa déclinaiſon eſt connue, ainſi que la latitude du lieu. Il eſt donc aiſé de calculer l'angle *ez*P, dont le ſupplément *uze* a pour meſure l'arc *as*, qui eſt l'azimuth cherché de l'aſtre obſervé.

Quant à l'amplitude *am* d'un aftre qui fe leve en *a* (fig. 95. G), On peut la calculer, en formant le triangle zPa, & en calculant dans ce triangle, dont les trois côtés font fuppofés connus, l'angle azP, qui a pour mefure *a*R. Car le complément de *a*R eft l'arc *am*, qui eft l'amplitude cherchée. Le triangle *am*Q rectangle en Q peut auffi être employé dans cette recherche. Car on y connoît le côté *a*Q, qui eft la déclinaifon de l'aftre, & l'angle *am*Q, qui a pour mefure le complément de la latitude du lieu.

Telles font les bafes de tous les rapports qui lient l'aftronomie avec l'art de la navigation; & après les avoir établies, nous allons indiquer, avec des détails convenables, tous les ufages & toutes les applications qu'on peut faire, ou qui font néceffaires, pour la fûreté comme pour le fuccès des projets des navigateurs.

168. *Obfervations aftronomiques utiles à la marine.* Les réflexions précédentes ont prouvé fans doute, que la pofition d'un vaiffeau fur la furface des mers, peut être indiquée par celle des aftres dans le ciel. Il ne refte donc plus qu'à confidérer, & les calculs aftronomiques dont les navigateurs doivent s'occuper, foit pour rectifier leur eftime, foit pour perfectionner les cartes marines; & les inftrumens qui peuvent être propres à ces obfervations néceffaires. (Nous devons fuppofer d'ailleurs que tout navigateur qui entreprend de conduire un vaiffeau à un port propofé, eft toujours muni d'un almanach nautique quelconque, qui préfente les indications des phénomenes céleftes & des pofitions des aftres, pendant le cours de la campagne projettée). Comme ces obfervations aftronomiques qui font utiles à la marine, ont déjà été défignées, & qu'il ne refte à expofer que les calculs qui leur font relatifs, nous croyons devoir préfenter des détails effentiels fur les inftrumens aftronomiques qui font employés par les hommes de mer, avant de chercher les réfultats des ufages qu'on peut en faire.

Il faut aux navigateurs des inftrumens pour mefurer les hauteurs des aftres, leurs diftances réciproques; & pour déterminer le moment de l'apparition d'un phéno-

mene céleſte quelconque. A terre & dans un obſervatoire fixe, on peut avec une lunette diſpoſée convenablement, comparer les aſtres qui paſſent ſucceſſivement au méridien; on peut auſſi, avec de grands inſtrumens, meſurer leurs diſtances, & employer des pendules pour marquer le mouvement moyen du ſoleil, ou celui des étoiles. Mais à la mer, où un vaiſſeau n'eſt jamais un ſeul inſtant dans un état de repos, ni dans un état conſtant, il eſt impoſſible d'employer les mêmes inſtrumens avec ſuccès. L'état des choſes ne permet à un navigateur que de meſurer inſtantannément des angles qui ſont formés par deux rayons viſuels, dirigés vers deux points quelconques de l'eſpace; & à cauſe de ſa poſition fugitive, les inſtrumens qui lui conviennent doivent être tels, qu'au même inſtant ſon œil puiſſe embraſſer les deux objets dont il cherche la diſtance.

Ceux que nous avons fait connoître (99) précédemment, ne ſervent à meſurer des angles, qu'à l'aide, ſoit de deux alidades réunies, ſoit d'un fil à plomb, ou d'un niveau, & d'une lunette, dont on vérifie ſucceſſivement la direction on la poſition; c'eſt-à-dire que leur uſage exige le concours de deux obſervateurs, lorſque la poſition de ces inſtrumens peut être ſuppoſée varier à chaque inſtant, comme celle de tous les objets qui ſont à bord d'un vaiſſeau à la voile.

C'eſt pourquoi il a fallu imaginer des inſtrumens qui fuſſent particuliérement convenables aux obſervations des marins. Parmi ceux qui ſont connus, nous ne devons citer que le ſextant, ou l'octant, ou le cercle (qui ne ſont qu'un même inſtrument plus ou moins étendu & perfectionné). Car les autres qui ſont adoptés, mais moins généralement, ne méritent pas d'être mis en parallele avec les premiers, & ne peuvent pas conduire à des réſultats auſſi précis & auſſi certains.

La conſtruction de cet instrument de refléxion eſt fondéesur unepropriété phiſique, qui aété observée,& qui est commune aux miroirs plans, ou aux glaces préparées pour réfléchir parfaitement les images des objets qui leur sont présentés. Cette propriété générale est que ſi d'un

point

point *a* (fig. 98. G) lumineux ou éclairé, un globule s'avance sur une direction *ab*, & frappe le plan *cd* du miroir, sous un angle d'incidence *abc*, ce globule, qui ne peut traverser le miroir, en est réfléchi suivant une ligne *be*, qui fait avec *cd* un angle *abd* (nommé de réflexion), parfaitement égal à l'angle *abc*; c'est-à-dire que l'angle d'incidence d'un rayon de lumiere sur un miroir, est toujours égal à son angle de réflexion.

Ainsi un miroir *ts* (fig. 99. G) est-il frappé en *i*, par un rayon de lumiere dirigé de *y* en *i*; il le réfléchit suivant *ib*, de maniere que l'angle d'incidence *yit* est égal à celui de réflexion *bis*. Remarquons que l'angle *yib* des rayons direct & réfléchi, doit être par conséquent le supplément du double de l'angle *yit*.

Si on imagine un autre miroir égal, qui soit placé dans la position *mn*, & qui fasse avec le premier un angle *tim*. Si on suppose aussi qu'un rayon de lumiere qui vient de *u* suivant *ui*, soit réflléchi par le nouveau miroir *mn*, suivant la ligne *ib*; les angles *uim* & *bin* sont égaux; & l'angle *uib* des rayons direct & réfléchi est encore le supplément du double de l'angle *uim*. Comparons actuellement les effets de ces deux miroirs, nous verrons que la différence des deux angles *yib* & *uib*, qui est l'angle *uiy*, est égale à la différence de leurs supplémens, ou à celle du double de *yit* au double de *uim*; c'est-à-dire au double de *tim*. On juge par conséquent que si du point *y* (sommet de l'angle qui indique l'inclinaison des miroirs *mn* & *ts*) on trace un arc *zap* avec un rayon quelconque *iz*; l'arc *az*, qui est la mesure de l'angle *tim* des deux miroirs, doit indiquer la moitié de la grandeur de l'angle *uiy*. On voit donc que si les côtés de l'angle *uiy* sont dirigés à deux objets placés l'un en *u* & l'autre en *y*, ou sur tout autre point des lignes *ui* & *yi*, la mesure de la distance de ces objets est indiquée exactement par le double de l'arc *az*.

C'est d'après ce principe qu'on a construit en cuivre, ou en bois dur, un instrument qui présente un arc *paz*, décrit du point *i* comme centre, & une alidade *ia*, qui, tournant autour du centre *i* dans le seul plan *iaz*,

fait varier les poſitions d'un miroir *mn*. Celui-ci eſt fixé ſur cette alidade de maniere, qu'étant placé ſucceſſivement en *mn*, *ts*, &c. il reſte toujours perpendiculaire au plan *iaz*, afin que les angles, tels que *nis*, puiſſent avoir pour meſures des arcs tels que *az*. On ne doit pas douter qu'il ſoit néceſſaire que les plans des deux miroirs *mn* & *ts*, ou du même miroir dans ces diverſes poſitions, ſoient perpendiculaires au plan *izap*. Car l'angle de ces plans eſt égal à celui qui eſt formé par deux lignes perpendiculaires au même point de la commune ſection de ces plans. Cette ſection eſt une ligne menée par le point *i*; elle doit donc être perpendiculaire aux deux rayons *ia* & *iz*: ainſi elle doit l'être au plan *iaz*; ce qui ne peut avoir lieu, qu'autant que les deux plans *mn* & *ts*, dont elle eſt la ſection commune, ſont eux-mêmes perpendiculaires au plan *iaz*. On ne peut donc employer un tel inſtrument pour prendre la meſure d'un angle, tel que *nis*, ſans avoir vérifié ſi le miroir eſt conſtamment perpendiculaire, dans chacune de ſes poſitions *mn* & *ts*, au plan *izap*.

Voici comment on fait cette vérification. Soient deux petites pieces de cuivre nommées viſeurs, & telles que *abdec* (fig. 92. G). Chacune eſt compoſée d'un plan *acdb*, qui eſt perpendiculaire à un autre plan *ced*, & le côté *ab* eſt parallele au plan *ced*. Deux viſeurs parfaitement égaux ſont établis ſur deux points tels que *z* & *p* du limbe *zp* de l'inſtrument (fig. 99. G); alors le plan qu'on imagineroit paſſer par leur côté ſupérieur *ab*, eſt parallele au plan du limbe; & ſi le miroir eſt perpendiculaire au premier plan, il doit l'être auſſi au dernier.

Après ces préparatifs, un obſervateur ſe place en *u*, par exemple, ou de maniere qu'il puiſſe voir directement & en même tems, le ſommet du viſeur qui eſt en *z*, ainſi que l'image de celui qui eſt en *p*, réfléchie par le miroir *mn*. Alors ſi les bords ſupérieurs des deux viſeurs paroiſſent former enſemble une ſeule & même ligne droite, le miroir eſt perpendiculaire au plan *iaz*: car ſi les images directe & réfléchie de ces deux bords formoient un angle, cet effet proviendroit néceſ-

fairement de l'inclinaifon du miroir *mn* fur le plan du limbe. En plaçant les vifeurs fur de nouveaux points de *paz*, & en changeant la pofition du miroir, on reconnoîtroit, par le même procédé la perpendicularité de celui-ci, & on s'affureroit ainfi que le miroir de cet inftrument eft placé convenablement fur l'alidade. Si l'état de ce miroir n'étoit pas tel qu'il doit être, on le rectifie : & l'inftrument eft conftruit de maniere qu'on puiffe corriger ce défaut, par le moyen d'une vis de preffion qui eft propre à cet effet.

Il y a encore une remarque à faire fur le miroir lui-même. Une feule de fes faces eft étamée, & fi elle réfléchit les rayons de lumiere qui viennent la rencontrer, la face antérieure réfracte ces mêmes rayons, non feulement à leur entrée, mais auffi à leur fortie de la glace. C'eft pourquoi fi les deux faces planes de ce miroir ne font pas paralleles entr'elles, alors l'angle d'incidence *abc* (fig. 98. G) ne peut pas être égal à l'angle de réflexion *ebd*; & la différence de ces angles eft une erreur qu'il faut connoître ou faire difparoître pour obtenir des mefures exactes, avec un tel inftrument. Examinons en quoi confifte cette différence.

Soit *mptu* (fig. 56) une fection de ce miroir, telle qu'on puiffe fuppofer dans fon plan, & le rayon de lumiere *sa*, (qui, venant de l'objet *s*, frappe la face *mt* de la glace fous un angle d'incidence *sam*), & le même rayon réfléchi *oe*. Le rayon qui vient de *s*, en abordant la face non étamée *mt* du miroir, s'infléchit par l'effet de l'attraction du verre, & fe rapproche de la ligne *kab*, qui eft perpendiculaire à la face *mt*, en formant un angle *bac*, tel que $kas = \frac{3}{2} bac$. (Ce rapport eft donné par l'expérience). Arrivé en *c* fur la face étamée *pu*, il en eft réfléchi, en formant un angle *ocr* égal à l'angle *acb*; & lorfqu'il fort de la glace en *o*, il s'infléchit encore de maniere que *ir* étant parallele à *kab*, l'angle $eoi = \frac{3}{2} cor$.

Remarquons que l'angle $cor = oru - ocr = abc - acb = abc - abp + cab$. On voit auffi que la difference des angles d'incidence *sam*, & de réflexion *eot*, eft la même que celle de leurs complémens *sak* & *eoi*; par conféquent

$sam\text{-}eot = \frac{1}{2}(cor\text{-}bac) = \frac{1}{2}(abc\text{-}abp) = \frac{1}{2}(180\text{-}2abp)$. Cette différence est donc nulle lorsque *kb* est perpendiculaire à la 2e. face *pu*, comme à la premiere *mt*; c'est-à-dire lorsque les deux faces du miroir sont paralleles. Enfin comme $abp = nab + anb = 90° + mnp$, il s'ensuit que la différence des angles d'incidence & de réflexion est $3mnp$, & qu'il vaut trois fois l'angle des faces du miroir supposé.

Dans l'instrument que nous décrivons ici, l'œil de l'observateur n'est pas placé au point *b* (fig. 99. G), lieu où arrive le rayon *ui*, qui est réfléchi du grand miroir; mais il est placé en *o*, vis-à-vis d'un autre miroir plus petit *qr*, qui, à demi étamé, & fixement attaché sur le plan de l'instrument, n'est pas mobile, comme le grand miroir *ts*. Le rayon lumineux qui part d'un point *u*, & qui vient frapper le miroir en *mn*, doit donc être toujours réfléchi de maniere qu'il suive après cette réflexion, la route unique *ibo*; & cet angle *ibo* est constant, quel que soit l'angle *uiy*, entre les objets observés, ou celui *nis* des deux positions *ts* & *mn* du grand miroir.

Appliquons actuellement aux deux rayons *ib* & *bo*, que le petit miroir reçoit & réfléchit, ce qui a été dit de l'inflexion des rayons dans le grand miroir; & nous en conclurons de même l'inégalité des angles d'incidence & de réflexion dans le petit miroir, si ses faces ne sont pas paralleles. En représentant, comme précédemment, par *mtup* (fig. 56), une section de ce petit miroir; on doit reconnoître qu'entre tous les rayons de lumiere, qui abordent cette glace, celui qui arrive en *o*, n'est pas réfléchi suivant *oe*, du petit miroir à l'œil de l'observateur; mais au contraire, cet observateur ne reçoit que l'impression du rayon qui, étant entré dans le miroir par un point variable *a*, est deux fois réfracté & forcé de suivre la route *sacoe*. Tout rayon qui est dirigé sur le grand miroir, d'où il est réfléchi sur le petit, qui le renvoye à l'œil *o*; éprouve ainsi quatre réfractions & deux réflexions: & comme l'expérience seule doit faire connoître cette double erreur des miroirs, c'est elle qui doit être consultée. C'est pourquoi on observe avec

ces miroirs la diſtance de deux objets fixes très-éloignés l'un de l'autre, ou un angle *uiy* qui ſoit très-grand. Enſuite on ôte le grand miroir de ſa boîte, & on le place dans la même ſituation qu'il avoit précédemment à l'égard des plans du petit miroir & de l'arc *izap*, avec cette condition ſeule, que le côté de cette glace qui étoit en contact avec le plan de *izap*, ſoit remplacé par le côté oppoſé de la même glace. Dans cet état des choſes, le même angle *uiy* eſt de nouveau meſuré. Si l'arc qui lui ſert de meſure eſt le même dans les deux obſervations, alors les faces du grand miroir ſont paralleles; mais s'il y a une différence dans les meſures, la moitié de cette différence eſt l'erreur de l'inſtrument.

Le petit miroir n'eſt étamé, comme nous l'avons annoncé, que ſur la moitié d'une de ſes faces. L'autre partie eſt tranſparente. Par ce moyen l'œil placé en *o* (fig. 99. G) peut appercevoir directement à travers cette partie de la glace, les objets qui ſont eloignés; & en même tems, il peut voir ſur ſa partie étamée, l'image de tout objet qui eſt réfléchi par le grand miroir ſur le petit. Il peut placer ainſi l'un à côté de l'autre les objets qu'il veut comparer; & c'eſt ainſi, par la poſſibilité de ces diſpoſitions, que cet inſtrument convient parfaitement aux obſervations nautiques. Car elles exigent, comme on l'a dit, qu'au même moment l'obſervateur puiſſe appercevoir les objets dont il ſe propoſe de meſurer la diſtance variable & inſtantannée.

Ces deux miroirs *mn* & *qn*, qui ſont perpendiculaires au plan de l'arc *izap* dont le centre eſt celui du grand miroir; ſont les parties eſſentielles de cet inſtrument, dont le corps eſt d'ailleurs conſtruit ou en cuivre ou en bois, avec tous les moyens qui peuvent le rendre ſolide & commode. Il eſt ſuſceptible d'ailleurs de meſurer des angles d'autant plus grands, que l'arc *zap* eſt d'un plus grand nombre de degrés: car les principes de ſa conſtruction ne limitent aucunement l'étendue de cet arc. D'abord on s'étoit contenté de ne faire cet arc que de 45° ou de la 8.e partie de la circonférence, & dans cet état, l'inſtrument avoit reçu le nom d'octant.

On lui donna ensuite le nom de sextant, parce que l'arc *zap* fut porté à 60°, pour qu'il pût mesurer jusques aux angles de 120°. Enfin on a remarqué que dans ces premiers instrumens, l'arc *zap* est toujours celui qui sert seul à marquer la mesure des angles observés, & que si des erreurs ont été commises dans la graduation ou dans la longueur, soit de cet arc, soit d'une de ses parties, elles se portent entièrement sur les mesures des angles. On a vu aussi que la nécessité de faire réfléchir l'image de l'objet le plus éclairé, ne permet de mesurer que dans un sens sa distance à un objet moins éclairé qu'on lui compare; & c'est par toutes ces raisons qu'on a imaginé de reculer les limites de l'arc *zap*, en le rendant égal à la circonférence entiere d'un cercle *zbplg* (fig. 57). Alors l'instrument a reçu le nom de cercle de réflexion. Dans celui-ci le grand miroir *re* ou *oi* est toujours placé au centre sur l'alidade *za*, tandis que le petit miroir *st* est fixé sur une autre alidade *mp*, (dont la mobilité est indépendante de celle de *az*), & placé en *q*, à peu de distance de la circonférence, vis-à-vis une lunette *mh*. Les angles que le grand miroir peut former avec lui-même, ont d'ailleurs pour mesure des arcs dont la grandeur est indiquée, comme précédemment, par l'alidade *za*.

Si un astre est en *c*, le rayon *ca* qui frappe sur *oi*, se réfléchit suivant *aq*, & tombe en *q* sur le petit miroir, qui le r. fléchit à l'œil placé en *m*. Ainsi *mq* étant une ligne horisontale, ou une ligne dirigée à un second astre, l'angle *caq* a pour mesure la distance des objets comparés. La valeur de cet angle est donnée par le double de la mesure de celui que la position *oi* de ce miroir fait avec sa position *re* qui est parallele au petit miroir *st*. Car soit un point *u* très-éloigné de l'observateur *m*, qui l'apperçoit directement à travers la partie non-étamée du petit miroir *st*. Le même objet se peint aussi sur le grand miroir *re*, & si celui-ci est parallele au petit miroir, l'angle *uaq* est égal l'angle *mqa*. En effet les angles *eau* & *raq* sont égaux; mais *raq*=*aqt*, parce que les miroirs sont supposés paralleles, & *aqt* est égal à *hqs*; par conséquent les angles *eaq* & *hqs*

ſont égaux ; c'eſt-à-dire que le rayon *hq* eſt parallele à *ua*. L'image de l'objet *u* qui ſe peint ſur le petit miroir, doit donc paroître ſur la même ligne qui paſſe par l'objet *u* vu directement. Ainſi *g* étant le lieu de l'alidade *az*, lorſque les deux miroirs ſont paralleles, & *z* étant le lieu de cette alidade, lorſque le miroir dans la poſition *oi*, réfléchit l'image de *c* en *m*; le double de l'arc *gz* eſt la meſure de la diſtance des deux objets.

Imaginons enſuite qu'on faſſe tourner l'inſtrument ſur lui-même, & autour de la lunette *mhp*; alors le miroir *oi* ſe trouveroit placé de maniere, que le rayon réfléchi du grand miroir, au lieu d'être ſitué à droite, ſe dirigeroit ſur la gauche ; & par conſéquent ce miroir ne pourroit alors réfléchir l'image de *c* ſur le petit miroir. On n'obtient alors cette réflexion néceſſaire, qu'en plaçant l'alidade *za* dans un nouveau point *l*; c'eſt-à-dire à une diſtance *lg* du point g, auſſi grande que *zg*. L'arc *lz* devient alors la meſure du double de la diſtance cherchée ; & ſi une erreur étoit commiſe en plus ſur la meſure de *gz*, elle le ſeroit en moins ſur *gl*; par conſéquent la moitié de l'arc *lz* eſt la meſure de la diſtance cherchée, indépendamment de la connoiſſance du point *g*, qui correſpond au paralléliſme des miroirs.

D'ailleurs on peut prendre ſur le contour du cercle, tel arc qui convient à la meſure de la diſtance cherchée ; & cette meſure pouvant être multipliée à volonté ſur la circonférence du limbe, on peut atténuer conſidérablement les erreurs qui pourroient ſe trouver dans les diviſions du cercle. C'eſt à cauſe de cet uſage que la circonférence entiere eſt diviſée en 720 parties égales, (qui repréſentent chacune un degré, à cauſe de la conſtruction de l'inſtrument), & dont chacune eſt partagée en trois parties égales. Enſuite un nonius placé à une extrémité des alidades, rend ſenſible juſqu'à une minute, dans la meſure des angles qui ſont obſervés avec ce cercle de réflexion.

S'agit-il de meſurer un angle *uiy* avec un ſextant (fig. 99. G), l'obſervateur examine, (à l'aide des viſeurs dont on a déjà parlé plus haut), ſi le grand miroir *ts* eſt perpendiculaire au plan *izap*. Il doit juger enſuite ſi

le petit miroir est dans la même situation; & il fait cette derniere vérification en considérant un objet éloigné, tel, par exemple, que le bord de l'horison. Il fait réfléchir son image du grand miroir sur le petit, tandis qu'il le regarde directement par la partie transparente du dernier; & si cet objet, ainsi que son image, paroissent se confondre parfaitement en passant l'un sur l'autre, il est alors certain que les deux miroirs ont une même position à l'égard du plan *izap*, ou que le petit miroir est, comme le grand, perpendiculaire à ce plan. Il doit remarquer aussi quel est sur le limbe *zap* le point de division *z*, qui est indiqué par l'alidade *az*, lorsque les miroirs sont paralleles. Car ce point est le commencement de tous les arcs qui doivent être les mesures des divers angles qu'on se propose d'observer. Cependant la mesure d'un angle, tel que *uiy*, ne seroit pas exactement donnée par cet instrument, si les côtés *ui* & *iy* de cet angle n'étoient pas paralleles au plan de *izap*. Car on a vu [128] que des angles tels que *aou* & k*nm* [fig. 39], qui sont dans des plans différens, ne sont égaux que lorsque leurs côtés paralleles sont placés dans des plans qui sont aussi paralleles. Ainsi l'angle *uiy* [fig. 99. G] ne peut avoir strictement pour mesure le double de *az*, qu'autant que ses côtés sont paralleles au plan du limbe. Il est donc, sur chacun des deux miroirs, un point déterminé, ou doivent concourir tous les rayons réfléchis, & tel, que le plan *uiy* soit parallele au plan *izap*. Afin de marquer ce point presque invariablement sur le petit miroir, on adapte à l'instrument, près du lieu *o* de l'œil, une petite lunette dirigée convenablement. Deux fils [fig. 93. G] peu éloignés l'un de l'autre, sont placés au foyer de son objectif, dans une direction qui est parallele au plan du sextant; & la lunette est située de maniere, qu'une ligne menée du milieu de ces fils au centre de l'oculaire, se trouve parallele au plan du limbe. On parvient à cet état des choses, ainsi qu'à le vérifier, en employant les deux viseurs déjà décrits. On les établit sur le plan du limbe *zap* [fig. 99. G] qu'on fait reposer horisontalement sur une base solide. On cherche dans l'horison

un objet éloigné, qui ſe trouve dans le plan prolongé où ſont placés les bords ſupérieurs de ces viſeurs; & ſi cet objet, qui eſt réellement dans un plan parallele à celui du limbe, paroît auſſi dans la lunette ſe peindre au milieu des fils ſuppoſés; le milieu de ces fils eſt le point néceſſaire du concours, ou de la réflexion des images des objets qu'on comparera dans d'autres obſervations. C'eſt en diſpoſant ainſi l'inſtrument, qu'on le rend propre à donner des meſures exactes des ang. qu'on ſe propoſe d'obſerver.

169. Cet inſtrument doit-il être employé à meſurer la hauteur méridienne du ſoleil? l'obſervateur regardant à travers la partie tranſparente du petit miroir, dirige ſa vue ſur le point du bord de l'horiſon qui eſt verticalement au-deſſous du ſoleil placé en *u* (fig. 99. G). Il ramene l'alidade, qui étoit au point *z*, lorſque les deux miroirs étoient paralleles, en un point *a*, tel que le bord inférieur de l'image du ſoleil, réfléchi en *b*, & de ce point à l'œil en *o*, paroiſſe à l'obſervateur en contact immédiat avec le bord de l'horiſon. Il s'aſſure d'un tel contact, en balançant legérement l'inſtrument autour du rayon horiſontal *ob*; & ce contact eſt parfait lorſque dans ce mouvement, l'image du ſoleil ne fait que raſer le bord de l'horiſon. Enfin le nombre des degrés de l'arc *az*, marqué par l'alidade ſur le limbe *zap*, eſt la meſure de l'angle *uiy*, ou de la hauteur méridienne apparente du ſoleil.

Des corrections reſtent alors à faire à cet arc meſuré, pour en conclure la hauteur vraie du centre du ſoleil au-deſſus de l'horiſon rationel de l'obſervateur. 1.° L'obſervateur en mer eſt ordinairement placé (123) à une certaine hauteur *an* (fig. 91. G) au-deſſus du niveau de la mer; & par conſéquent la hauteur apparente *sam* ſurpaſſe la hauteur réelle de l'aſtre au-deſſus de l'horiſon ſenſible, de toute la valeur de l'angle *eam*. Il faut donc retrancher de la hauteur obſervée, ce dernier angle (qu'on nomme la dépreſſion de l'horiſon, & dont la grandeur eſt indiquée par des tables qui ſe trouvent dans tous les ouvrages nautiques): & la différence

devient la hauteur apparente du ſoleil, telle qu'elle eût été obſervee du point *n*, au niveau de la mer.

2.° Ce rayon de lumiere, qui parvient du ſoleil *s* (fig. 58) à l'œil qui l'obſerve en *a*, traverſe dans ſa route *sua* l'atmoſphere qui enveloppe la terre. Dans cette route, & par une influence ſemblable à celle qu'on a attribuée au verre, ce rayon de lumiere, qui s'avance directement du ſoleil juſqu'à la limite *u* de l'atmoſphere, éprouve, à l'approche de l'air, une inflexion ou réfraction qui va en augmentant depuis *u* juſqu'en *a*, où il arrive après avoir décrit la courbe *ua*, dont le dernier élément a pour tangente *ax*. L'obſervateur a donc l'œil frappé par ce rayon dans la direction *ax*; & par conſéquent il doit rapporter l'aſtre, qui eſt réellement en *s*, à un point *x* apparent du ciel. Cet effet eſt nommé la réfraction de l'aſtre. Celle-ci eſt nulle lorſque le rayon lumineux *su* eſt perpendiculaire à la courbure extérieure de la ſurface de l'atmoſphere; & elle eſt la plus grande lorſque l'aſtre eſt à l'horiſon. Car alors pour arriver en *a*, le rayon lumineux rencontre la derniere couche de l'air très-obliquement, & traverſe un plus grand eſpace dans l'atmoſphere. La hauteur obſervée du ſoleil eſt donc encore trop grande de l'angle de réfraction; & des tables qui ont été calculées par des géometres phiſiciens, donnent la grandeur de cette ſeconde correction, qui eſt en raiſon de la hauteur apparente *xam* d'un aſtre. C'eſt en faiſant ces corrections, qu'on obtient la hauteur réelle de cet aſtre au-deſſus de l'horiſon ſenſible de l'obſervateur.

3.° Cette obſervation qui eſt faite à la ſurface du globe, doit être reduite à ce qu'elle ſeroit pour un obſervateur placé au centre, relativement à l'horiſon rationel. Ainſi la hauteur trouvée doit être augmentée (après les précédentes corrections) de la parallaxe *bac* (fig. 90. G) en ſuppoſant que *bc* ſoit le rayon de la terre, & *cm* l'horiſon rationnel qui eſt parallele à l'horiſon ſenſible *be*. La hauteur de l'aſtre au-deſſus de ce dernier eſt *abe*: elle ſeroit, pour un obſervateur en *c*, de la grandeur de *acm*; ainſi la premiere eſt plus petite que la ſeconde de toute la valeur de *bae*, qui eſt

la parallaxe de hauteur de l'aſtre obſervé. Ainſi en conſultant encore des tables calculées de cette parallaxe, on augmente la hauteur de l'aſtre au-deſſus de l'horiſon ſenſible, d'une parallaxe proportionnelle à cette hauteur, & on détermine la hauteur réelle du bord obſervé du ſoleil au-deſſus de l'horiſon rationnel de l'obſervateur. Enfin cette hauteur augmentée du demi-diametre de l'aſtre, devient celle de ſon centre, ou celle qui ſeule doit être employée dans les calculs.

De telles obſervations, (ſi d'ailleurs on connoît la déclinaiſon de l'aſtre au moment où elles ont été faites,) ſont utiles, comme nous l'avons annoncé, pour déterminer la latitude du lieu de l'obſervateur. Mais nous devons remarquer que dans les éphémérides, la déclinaiſon du ſoleil n'eſt annoncée que pour le midi de chaque jour, au méridien de Paris; & que comme elle change d'un jour à l'autre, on doit, avant d'en faire uſage, la reduire à ce qu'elle doit être au moment de l'obſervation. Cette reduction peut toujours être faite d'une maniere ſuffiſamment approchée, en calculant ce changement de déclinaiſon, en raiſon de la différence des longitudes de Paris & du vaiſſeau, & cette différence eſt toûjours connue à-peu-près ſur un vaiſſeau dont on a eſtimé la route avec ſoin.

170. Voici en général les regles qu'il faut obſerver pour déterminer la latitude d'un vaiſſeau, étant donnée la hauteur méridienne d'un aſtre connu. En mer on ſait toujours ſi ſon vaiſſeau eſt dans l'hémiſphere nord ou ſud, & on reconnoît aiſément ſi on obſerve un aſtre du côté de l'un ou de l'autre pole. La hauteur méridienne d'un aſtre eſt-elle obſervée du côté oppoſé au pole qui eſt élevé: alors à cette hauteur corrigée, qui eſt qo ou bo (fig. 97. G), on doit ajouter la diſtance qP ou bP de l'aſtre au pole élevé; & le ſupplément Pn de cette ſomme, eſt la latitude du lieu ou du vaiſſeau.

Si l'obſervation a été faite du côté du pole élevé, la hauteur méridienne de l'aſtre doit être cN ou rN. Dans le cas où l'aſtre paſſe au méridien au-deſſus du pole élevé, ſa diſtance à ce pôle doit être retranchée de ſa hauteur obſervée, & le reſte eſt la latitude du

vaiſſeau. Si au contraire l'aſtre paſſe en *r* au-deſſous du pole élevé, c'eſt la ſomme de ſemblables quantités qui eſt égale à la latitude cherchée. D'ailleurs ſi on remarque que dans le premier cas, la hauteur obſervée doit ſurpaſſer la latitude trouvée, tandis que dans le ſecond, la premiere doit être inférieure à la ſeconde, on a un ſûr moyen de reconnoiſſance pour diſtinguer ſi l'aſtre a été obſervé, ou au-deſſus ou au-deſſous du pole élevé. L'exemple ſuivant préſente le calcul de la latitude d'un vaiſſeau dans tous ſes détails, & il doit ſuffire pour indiquer la marche qu'on doit ſuivre pour appliquer à cette recherche l'obſervation d'un aſtre quelconque.

Un navigateur (étant, le 8 mars 1787, par une longitude eſtimée de 51°) obſerve à la mer, & du côté oppoſé au polé élevé Nord, la hauteur méridienne du bord inférieur du ſoleil. Il la trouve de 43° 37′. Son œil eſt élevé de 22 pieds au-deſſus du niveau de la mer; & on demande quelle doit être ſa latitude.

La dépreſſion de l'horiſon correſpondante à 22 pieds d'élévation, eſt, par les tables, de 4′ 49″: ainſi la hauteur apparente du bord au-deſſus de l'horiſon ſenſible, eſt de 43° 32′ 11″, & comme la réfraction eſt de 1′, ſa hauteur vraie ſur cet horiſon ſenſible eſt 43° 31′ 11″. Mais la parallaxe du ſoleil à cette hauteur eſt environ de 6″, & ſon demi-diametre eſt de 16′ 9″; par conſéquent en ajoutant ces deux quantités à la hauteur trouvée, la hauteur vraie du centre du ſoleil, au-deſſus de l'horiſon rationel de l'obſervateur, eſt 43° 47′ 26″. Il faut actuellement trouver la déclinaiſon du ſoleil pour le moment de l'obſervation. On voit dans les tables que le 8 mars à midi, elle eſt, à Paris, de 4° 47′ 52″ auſtrale; & que du 8 au 9, elle diminue en 24 heures, de 23′ 29″: ainſi le vaiſſeau étant ſuppoſé environ à 51° de longitude dans l'oueſt de Paris, le ſoleil au méridien de ce dernier lieu, doit avoir une déclinaiſon différente de celle qu'il a au méridien du vaiſſeau. Cette différence qui doit être calculée pour 51°, à raiſon de 23′ 29″ pour 360°; eſt par conſéquent de 3′ 20″. On la retranche de 4° 47′ 52″, & le reſte 4° 44′ 32″ eſt la déclinaiſon

australe du soleil au moment de l'observation faite à bord du vaisseau. Enfin additionnant ensemble & la distance du soleil au pole élevé (94° 44′ 32″), & sa hauteur méridienne (43° 47′ 26″), la somme est 138° 31′ 58″; on trouve le supplément (41° 28′ 2″) de cette somme, qui est la latitude cherchée du vaisseau au moment de l'observation.

171. Nous avons déjà annoncé que si les circonstances peu favorables ne permettent pas de déterminer la latitude d'un vaisseau, par l'observation de la hauteur méridienne d'un astre connu; on peut néanmoins la trouver par des observations de deux hauteurs d'un même astre, séparées par un intervalle de tems qui seroit mesuré exactement à une bonne montre. Voici un exemple.

Le 2 avril 1787, un vaisseau étant dans l'hémisphere nord, & par 40° de longitude, estimée à l'ouest de Paris; on a observé d'abord, à 0 h. 22 min. 39 sec. d'une montre, une hauteur du centre du soleil, qui, reduite & corrigée, étoit de 61° 1′; & ensuite à 3 h. 10′ 31″ de la même montre, une 2.e hauteur vraie du centre du même astre, de 37° 6′. Dans l'intervalle des observations, le vaisseau s'est avancé, suivant l'estime, de 7′ de degrés à l'ouest, & de 9′ au sud; & on demande quelle devoit être la latitude du vaisseau à l'époque de l'une ou de l'autre des observations.

Soient les points u & a [fig. 97. G] les lieux de l'astre au moment des observations; z le zénith de l'observateur, à l'époque de la mesure de la premiere hauteur; P le pole; enfin Pu & Pa les distances successives du soleil au pole P, qui sont, la premiere de 84° 56′ 45″, & la 2e de 84° 54′. L'intervalle de tems écoulé entre les deux observations est, suivant la montre, de 2 h. 47′ 52″; ou en degrés, il est de 41° 58′. Cet arc, qui est la mesure de l'angle uPa, doit être diminué de 7′, parce que dans ce même intervalle de tems, le vaisseau s'est avancé de 7′ dans l'ouest de Paris. La mesure véritable de l'angle uPa est donc de 41° 51′. Il résulte aussi du changement de 9′ du vaisseau en latitude, que le même point z n'étoit pas le zénith de l'ob-

ſervateur, au moment de l'obſervation de la ſeconde hauteur ; c'eſt pourquoi il faut corriger cette hauteur obſervée, & la reduire à ce qu'elle eût été pour un même zénith z.

Soit a (fig. 59) le lieu de l'aſtre dans le ciel. an eſt ſa diſtance meſurée au zénith réel de l'obſervateur ; tandis que ſa diſtance au zénith (qui étoit celui de l'obſervateur pendant la premiere obſervation) eſt za. Il faut donc calculer la valeur de za, d'après celles de an & de nz. Celle-ci eſt de 9'. Si on imagine que du point a comme pole, on ait décrit un arc zs, alors l'arc sn eſt la différence des arcs an & an. Le changement zn du zénith, qui eſt de 9', étant très-petit, cet arc peut être conſidéré ſans erreur comme une petite ligne droite ; & le triangle rectangle snz comme rectiligne. On peut donc faire cette proportion, $sn:nz::cof.\,snz$ ou $Qna:1$. C'eſt pourquoi ſi, au moment où la 2.e hauteur a été obſervée, on eût relevé l'aſtre à la bouſſole pour en conclure ſon azimuth, & par conſéquent l'angle Qna, la quantité sn eût été facile à déterminer. (Remarquons en paſſant que cette différence eſt nulle, lorſque l'angle Qna eſt de 90 degrés, ou lorſque l'aſtre eſt au premier vertical). Ainſi (les circonſtances étant favorables) cette méthode de déterminer la latitude, dans un vaiſſeau qui conſerve ſa marche progreſſive, exige que l'une des hauteurs obſervées ſoit priſe au paſſage de l'aſtre au premier vertical. Puiſque cet angle n'eſt pas connu dans le cas que nous conſidérons, il faut chercher sn d'une autre maniere. Soient prolongés juſqu'à 90 deg. & l'arc as & l'arc az ; alors l'arc rt qu'ils comprennent entr'eux, eſt la meſure de l'angle naz des deux verticaux, & cet angle eſt égal à celui des 2 horiſons ſucceſſifs de l'obſervateur. Car deux cercles qui ſont perpendiculaires à deux autres, forment enſemble un angle égal à celui des deux derniers plans. L'arc rt eſt donc de 9' ; mais on peut faire cette proportion (puiſqu'il eſt parallele à sz), $rt:sz::1:ſin.\,az$ ou $sz = rt.ſin.az$. On peut d'ailleurs dire, dans le triang. snz, que $sn^2 = nz^2$ (ou rt^2) $- zs^2$: donc $ns = rt.coſ.az$. On auroit démontré que $ns = rt\ coſ.an$, ſi l'arc sz, au

lieu d'être décrit par le point z, l'eût été par le point n. La valeur de ns, dans la question supposée, est donc de 5′ 26″. C'est cette quantité qu'il faut ajouter à la distance observée de l'astre au zénith n, pour avoir sa distance az au zénith z. L'arc az est donc de 52° 59′ 26″, & son complément, qui est la hauteur reduite de l'astre, doit ainsi être supposée de 37° 0′ 34″. C'est la valeur de l'arc as (fig. 97. G).

La déclinaison du soleil au moment de la premiere observation, avoit pour complément un arc uP de 84° 56′ 45″, & au moment de la 2e, sa distance au pole Pa étoit de 84° 54′.

C'est avec toutes ces données qu'on doit chercher le complément zP de la latitude du vaisseau d'observation; & voici les détails de ce calcul.

Soit abaissé de a un arc ax perpendiculairement sur Pu; on doit, pour déterminer le segment Px, faire cette proportion ci-jointe;

1 . . . . *c*	0,0000000
: *cos*. uPa (41° 51′)	9,8720945
:: *tang*. Pa (84 54)	1,0494033
: *tang*. Px	0,9214978

& on trouve que l'arc Px est de 83° 10′ 30″; par conséquent le segment ux est de 1° 46′ 15″. C'est avec ces segmens qu'il faut calculer le côté au & l'angle Pua. Le premier peut être déterminé par cette proportion,

cos. Px. (83° 10′ 30″). . . *c*.	0,9250475
: *cos*. xu. (1 46 15). . . .	9,9997930
:: *cos*. Pa. (84 54 0). . . .	8,9488739
: *cos*. au. [41 36 33]. . . .	9,8737144

(en ajoutant les logarithmes des termes qui doivent être des facteurs, & les complémens arithmétiques de ceux qui doivent être des diviseurs).

L'angle P*ua* eſt donné par cette autre proportion,

$$
\begin{array}{ll}
\textit{ſin. Px } [83^\circ 10' 30''] \ldots\ldots c & 0,0030885 \\
:\textit{ſin. xu } [\ 1\ \ 46\ \ 15\ ] \ldots\ldots & 8,4899859 \\
::\textit{cot. P } [41\ \ 51\ \ \ 0\ ] \ldots\ldots & 0,0478497 \\
:\textit{cot.Pua } [88\ \ \ 0\ \ 36\ ] \ldots\ldots & 8,5409241
\end{array}
$$

Si on conſidére le triangle *zua*, dont les trois côtés ſont connus, pour y calculer l'angle *zua*, la formule qui doit donner cet angle eſt celle-ci, $cof.za = cof.zu.cof.ua + ſin.zu.ſin.ua.cof.zua$, ou $ſin.as = ſin.uf.cof.au + cof.uf.ſin.au.cof.zua$. On peut à la place de $cof.zua$, écrire $1 - 2ſin.\frac{1}{2}zua^2$, & on doit dire que $2cof.uf.ſin.au.ſin.\frac{1}{2}zua^2 = ſin\,(uf+au) - ſin.as$. On ſait auſſi quelle eſt la différence des ſinus de deux angles (121); ainſi $cof.uf.ſin\,au.ſin.\frac{1}{2}zua^2 = cof.\frac{1}{2}s.ſin.(\frac{1}{2}s - as)$ (en repréſentant par *s* la ſomme des trois arcs *uf*, *au* & *as*). On peut donc faire la proportion,

$$
\begin{array}{ll}
\textit{ſin. au } [41^\circ 36' 33''] \textit{ſin. uf } [61^\circ 1' 0''] \left\{ \begin{array}{l} C.\ 0,3167157 \\ C.\ 0,1778011 \end{array} \right. & \\
:\textit{cof. } \frac{1}{2} s\ [69^\circ\ 49'\ 3''] \ldots\ldots\ldots & 9,5378398 \\
::\textit{ſin. } [\frac{1}{2} s - as]\ [32^\circ\ 48'\ 29''] \ldots\ldots & 9,7338602 \\
:\textit{ſin } \frac{1}{2} zua^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 19,7662168 \\
\textit{ſin. } \frac{1}{2} zua\ [-49^\circ 49' 13''] \ldots\ldots\ldots & 9,8831084 \\
\&\ zua = \ \ 99^\circ 38' 26'' &
\end{array}
$$

Connoiſſant ainſi la valeur des angles *zua* & P*ua*, leur différence, ou l'angle *zu*P, eſt néceſſairement de 11° 37′ 50″. Alors dans le triangle *zu*P, on connoît un angle & les deux côtés *zu* & *u*P; Par conſéquent on peut y calculer le côté cherché *z*P. On employe ici la même formule que précédemment, $cof.zP = ſin.uf.cof.up + cof.uf.ſin.up.cof.zup = ſin.(uf+up) - 2cof.uf.ſin.up.ſin.\frac{1}{2}zup^2$. Ainſi pour trouver *coſ z*P, ou le ſinus de la latitude *z*Q, il faut calculer d'abord un angle Q, dont

le sinus est égal à $2\cos. uf.\sin. up.\sin.\frac{1}{2}zup^2$, & on le trouve par cette proportion,

1	c	0,0000000
: cos. uf [61° 1′] sin. up [84° 56′ 45″]		9,6853432 9,9983081
:: 2. [sin. ½ zup] [5° 48′ 55″]². . .		0,3010300 18,0114038
: sin. Q [0° 34′ 4″].		7,9960851

Enfin comme on peut dire alors que $\sin. zQ = \sin.(uf+up) - \sin. Q$, on peut en conclure que $\sin. zQ = 2\cos.\frac{1}{2}R.\sin(\frac{1}{2}R-Q)$ (en nommant R la somme des arcs *uf*, P*u* & Q); par conséquent $\sin. zQ$ doit être connu par la proportion suivante.

1	C.	0,0000000
: 2 cos. ½ R (73° 15′ 55″). . .		0,3010300 9,4593034
:: sin. (½ R-Q) (72° 41′ 50″). .		9,9798880
: sin. zQ (33° 21′ 17).		9,7402214

La latitude du vaisseau dans lequel ont été faites les observations supposées, est donc de 33° 21′ 17″.

Telle est la méthode détaillée qu'il faut suivre pour conclure la latitude d'un vaisseau, de la mesure de deux hauteurs du soleil & de l'intervalle de tems qui sépare ces observations. Elle seroit la même, si l'astre observé étoit une étoile. Il faudroit aussi la suivre, dans le cas, où, à bord d'un vaisseau, on observeroit au même moment les hauteurs de deux étoiles connues, dont l'une seroit vue au point *a* (fig. 97. G), & l'autre au point *u*. L'angle *uPa* n'auroit pas alors pour mesure un intervalle de tems écoulé entre des observations, mais la différence des ascensions droites des deux étoiles observées; (Différence que les catalogues des étoiles servent à faire connoître exactement). Au reste, les formules de calcul à employer dans ce cas particulier, se-

roient parfaitement ſemblables à celles qui ont été préſentées dans l'exemple précédent, & elles conduiroient de la même maniere à la détermination de la latitude du vaiſſeau d'obſervation.

172. Si dans ce dernier cas un ſeul obſervateur eſt obligé de prendre ſucceſſivement la meſure des hauteurs de deux étoiles; il lui reſte enſuite à calculer la hauteur qu'auroit eu l'une de ces étoiles (la ſeconde, par exemple), au moment où la premiere a été obſervée. Il faut alors non ſeulement que l'intervalle de tems qui ſépare les obſervations ſoit très-court & connu; mais auſſi que deux ou pluſieurs hauteurs du 2e aſtre ſoient meſurées exactement, afin qu'on puiſſe conclure, de la différence de ſes hauteurs & de celle des tems, la correction qu'il convient de faire à une des hauteurs obſervées pour la reduire à ce qu'elle eût été au moment de l'obſervation du 1.er aſtre.

Imaginons qu'on ait obſervé dans un même lieu, 2 diſtances au zénith za & zu d'un même aſtre; & qu'on veuille connoître quelle a dû être ſa diſtance au même zénith lorſqu'il étoit au point m de ſon parallele, ou à telle heure intermédiaire, connoiſſant d'ailleurs le tems écoulé entre les obſervations ſuppoſées. Les intervalles de tems donnés ou obſervés ſont les meſures des ang. aPu, mPu & mPa. Soit h une diſtance za de l'aſtre au zénith. On repréſentera zu par h-m, & zm par h-x; de ſorte que m & x ſont les différences des diſtances zu & zm avec za. Soit $zPa = p$, faiſons auſſi $zPm = p-r$, & $zPu = p-q$. Soient enfin $zP = l$, & Pa, ou Pu, ou Pm, $= d$. Car on peut ſuppoſer que la déclinaiſon du ſoleil ou de l'aſtre ne doit pas changer ſenſiblement, ſi l'intervalle de temps qui ſépare les obſervations eſt très-petit.

En conſidérant les trois triangles zup, zmp, zap, la formule qui exprime le rapport entre les trois côtés d'un triangle & un de ſes angles, fournit trois équations, qui ſont, la premiere, $cof.h = cof.l.cof.d + fin.l.fin.d.cof.p$; la 2.e, $cof.(h-m) = cof.l\,cof.d + fin.l.fin.d.cof.(p-q)$; & enfin la 3.e, $cof.(h-x) = cof.l\,cof.d + fin.l.fin.d.cof.(p-r)$.

Remarquons que les quantités q, r, m qui sont données, ainsi que la quantité x qui est cherchée, sont suposées très-petites : ainsi on peut dire que $cos.(p-q)$, par exemple, est égal à $cos.p+q.sin\,p$. Alors en raisonnant de même pour les autres cosinus qui sont dans ces équations, celles-ci doivent se reduire, la seconde à (A) $cos.h+m.sin.h=cos.l.cos.d+sin.l.sin.d(cos.p+q\,sin.p)$; & la 3.ᵉ à (B) $cos.h+x.sin\,h=cos\,l.cos\,d+sin\,l\,sin.sin.d\,(cos.p+r.sin\,p)$. Si on retranche les équations [A] & [B] l'une de l'autre, l'équation résultante est $[x-m].sin.h=sin.l.sin.d\,sin.p[r-q]$; & en retranchant de [A] la premiere de toutes ces équations, la différence est $m.sin.h=sin.l.sin.d.q.sin.p$. Enfin si on divise l'une par l'autre ces deux équations résultantes, on en conclut [après toutes les reductions nécessaires] que $qx=rm$, ou que $q{:}m{::}r{:}x$. Les différences des hauteurs sont donc proportionnelles aux intervalles des tems, & on en conclut qu'une hauteur moyenne correspond à l'heure moyenne de plusieurs hauteurs mesurées rapidement.

Un exemple va faire connoître l'application de cette regle. On a observé, à 9′ 20″ d'intervalle de temps, deux hauteurs d'un astre qui différent de 2° 13′, & on demande qu'elle devoit être la différence de la premiere hauteur, à celle qui auroit été observée après un intervalle de 5′ 15″ de tems. La regle précédente indique qu'il faut faire cette proportion, 9′20″:5′15″:2°13′:x (en nommant x la différence cherchée). On trouve que la variation de la hauteur devoit être de 1° 15′; & c'est cette quantité qui doit être ajoutée ou ôtée à la premiere hauteur, selon que l'astre monte ou descend sur l'horison.

C'est par ce moyen simple qu'on rend simultanées les hauteurs de deux astres; & si nous avons développé ses bases, c'est parce qu'il est utile à employer dans plusieurs circonstances qui deviennent communes dans la marine; ou parce qu'il doit paroître nécessaire d'observer plusieurs hauteurs d'un même astre, dans un intervalle de tems qui soit court & bien mesuré, pour en conclure, plus sûrement que par une seule observation

directe, la hauteur de cet aſtre, à un inſtant donné du même intervalle de tems.

173. Nons avons fait connoître (165) combien il eſt important pour la détermination des longitudes terreſtres, de ſavoir trouver l'heure des obſervations aſtronomiques qu'on fait en mer; & cette heure qu'on compte à bord d'un vaiſſeau eſt toujours facile à calculer.

Voici un exemple. Etant par $16^{\circ} 10'$ de latitude nord, on meſure en mer la hauteur du ſoleil, qui, corrigée complettement, eſt de $18^{\circ} 50' 20''$: la diſtance du ſoleil au pole N, dans ce même moment, eſt $76^{\circ} 20'$; & on demande l'heure de cette obſervation.

Soit formé, pour le point u, qui eſt ſuppoſé le lieu du ſoleil, le triangle zpu (fig. 97. G), dont les trois côtés ſont connus (parcequ'ils repréſentent, comme on le ſait, les diſtances de l'aſtre, ſoit au pole, ſoit au zénith, & le complément de la latitude du vaiſſeau). On peut y calculer l'angle horaire zPu, par une formule déjà développée ailleurs, & qui peut être tansformée en celle-ci, $\sin. Pu. \cos. zQ. \sin. \frac{1}{2} zPu^2 = \cos. \frac{1}{2} s \sin. (\frac{1}{2} s\text{-}uf)$; en ſuppoſant que s repréſente la ſomme des arcs zP, Pu & uf, ou des trois côtés du tri. indiqué. On peut donc faire cette proportion.

$\sin. Pu. (76^{\circ} 20') \cos. zQ (16^{\circ} 10')$.	C.	0,0175226
	C.	0,0124737
$: \cos. \frac{1}{2} s (55^{\circ} 40' 10'')$		9,7512533
$:: \sin. (\frac{1}{2} s\text{-}uf) (36^{\circ} 49' 50'')$		9,7777534
$: \sin. \frac{1}{2} zPu^2$		19,5590030
$\sin. \frac{1}{2} zPu (37^{\circ} 0' 14'')$		9,7795015

& on trouve que l'angle horaire zPu eſt de $74^{\circ} 0' 28''$, ou que ſa valeur en tems eſt de 4 h. $56' 2''$.

Si une étoile eût été obſervée à l'oueſt du méridien, on auroit trouvé l'heure de l'obſervation, ou en ajoutant à ſon angle horaire zPu, calculé comme auparavant, l'heure du paſſage de cette étoile au méridien du vaiſ-

ſeau; ou en prenant la différence de ces quantités, ſi l'étoile n'avoit pas encore paſſé au méridien.

On doit remarquer que ſi on compare cette heure obſervée avec celle qui eſt indiquée par une montre quelconque, au moment de l'obſervation, il eſt aiſé d'en conclure l'avancement ou le retard de cette montre ſur le tems vrai. C'eſt auſſi en répétant à différens jours, de ſemblables obſervations & comparaiſons, qu'on parvient à connoître, non ſeulement l'avancement ou le retard d'une montre ſur le tems vrai, mais auſſi la conformité de ſon mouvement ou ſes différences avec le tems moyen. Par exemple, ſuppoſons que par une obſervation du ſoleil (faite le 24 mai 1787 au matin, ſur un vaiſſeau mouillé; qui eſt par 28° 28′ de latitude nord, & à 1 h. 14′ 24″ de longitude dans l'oueſt de Paris), on ait trouvé que l'heure vraie étoit alors 7 h. 39′ 55″ à bord du vaiſſeau; & par conſéquent, ſuivant l'eſtimation, 8 h. 54′ 17″ à Paris. Mais à Paris, le midi moyen retardoit ſur le midi vrai, le 23 mai, de 3′ 39″; & le 24 du même mois, de 3′ 34″,1: par conſéquent à 8 h 54′ 17″ du matin du 24, le retard ſur le ſoleil devoit être de 3′ 34″,7. C'eſt cette quantité qu'il faut retrancher de 8 h. 54′ 17″, pour avoir l'heure moyenne comptée à Paris, au moment de l'obſervation faite ſur le vaiſſeau. Il étoit donc 8 h. 50′ 42″,3; & comme au même moment, l'heure marquée par la montre marine étoit 10 h. 35′ 17″, la différence de ces heures, qui eſt 1 h. 44′ 34,7, indiquoit l'avancement de cette montre, à l'égard du tems moyen marqué à Paris au même moment. Si le 31 du même mois & le matin, une nouvelle hauteur du ſoleil obſervée au même lieu, a fait connoître que le tems vrai ſur le vaiſſeau devoit être 10 h. 9′ 56″, tandis que la montre marquoit 13 h. 8′ 1″, on en conclut que l'heure vraie à Paris étoit au même moment 11 h. 24′ 20″. Cherchons actuellement le tems moyen qui correſpond à ce tems vrai, ſous le méridien de Paris. Si on conſulte les tables, le midi moyen retardoit à Paris ſur le midi vrai, le 30, de 2′ 54″4, & le 31, de 2′ 46″2; ainſi ce retard ne devoit être que

de 2′ 46″,4 au moment de l'obſervation ſuppoſée. Si on retranche cette quantité de l'heure vraie de Paris, le reſte 11 h. 21′ 33″,6 étoit l'heure moyenne de Paris, & elle différoit de l'heure marquée par la montre marine au même inſtant, de 1 h. 46′ 27″,4; par conſéquent cette différence n'étant pas égale à celle 1 h. 44′ 34″,7, qui avoit été déterminée le 24 mai, l'accélération de la montre avoit été de 1′ 52″,7 pendant 170 h. 32′ 44″, ou ſon accélération journaliere (en ſuppoſant ſa marche uniforme) étoit de 15″,9. De telles obſervations & ces calculs peuvent donc faire connoître, dans tous les tems, la marche d'une montre marine, ou d'une pendule quelconque, par rapport au temps moyen.

Si l'art de l'horlogerie étoit aſſez perfectionné pour produire des montres dont le mouvement fût toujours uniforme, & fût rendu indépendant de toutes les cauſes qui à la mer tendent à le troubler; de telles montres ne ceſſeroient d'indiquer aux navigat. l'heure moyenne qu'on compteroit ſous le méridien pour lequel elles auroient été reglées. Alors l'heure moyenne qu'on doit compter à bord du vaiſſeau où elles ſeroient embarquées, étant aiſée à déterminer par les obſervations indiquées précédemment; & l'uniformité ou les inégalités de la marche de ces montres pouvant être reconnues par des obſervations, dans tous les lieux de relâche d'un vaiſſeau; ces montres préſenteroient le moyen le plus ſimple de découvrir les longitudes en mer. Juſqu'à l'époque, où l'induſtrie humaine pourra donner à ces ouvrages le degré de perfection qu'on leur deſire encore; les navigateurs ne doivent ceſſer de conſulter le ciel directement pour la recherche de leur longitude; & pluſieurs moyens peuvent être employés pour cette détermination importante.

174. Les almanachs nautiques indiquent les phénomenes céleſtes qui peuvent être obſervés tous les jours de l'année, ainſi que l'heure qui eſt comptée à Paris au moment de leur apparition; & ces phénomenes ſont des éclipſes, du ſoleil, de la lune, des ſatellites de Ju-

piter, des occultations d'étoiles par la lune, des passages de planetes sur le soleil, &c.

Parmi ces observations, il en est qui ne sont pas susceptibles de donner toujours les résultats les plus précis. Dans les éclipses de lune, l'ombre de la terre est si mal terminée, qu'il en résulte toujours quelque incertitude sur le vrai moment des phases. Entre les satellites de Jupiter, il n'y a que le premier dont les éclipses peuvent être prédites avec la précision d'une minute. Les éclipses du soleil, les occultations des étoiles par la lune, & les passages des planetes sur le disque du soleil, sont, il est vrai, des phenomenes dont l'observation peut conduire surement à la détermination de la différence en longitude des lieux d'observations; mais c'est par des calculs longs & compliqués. D'ailleurs, plusieurs de ces éclipses dépendent de la situation de l'observateur; & la lune, par exemple, qui paroît aux yeux d'un habitant du globe passer devant une étoile, ne la cache pas à tel autre habitant de la terre. Il n'en est pas de ces éclipses comme de celles de la lune: car cet astre, alors privé de lumiere, paroît tel en même tems à tous les points de l'univers.

Les phénomenes dont nous venons de parler semblent être autant de signaux placés dans le ciel, pour annoncer aux navigateurs le moment où une pendule reglée à Paris, marque telle heure déterminée. Ainsi les navigateurs étant attentifs à observer ces phénomenes, ainsi qu'à découvrir l'heure à laquelle ils les apperçoivent, peuvent, par la différence des tems qui sont comptés à Paris & à bord d'un vaisseau, dans le même moment de la durée, conclure la longitude de ce vaisseau à l'égard de Paris.

Au reste ces derniers phénomenes arrivent trop rarement pour les besoins de la marine; ils sont trop difficiles d'ailleurs à observer exactement: car au milieu d'une mer agitée, il n'est pas possible de conserver longtems un astre dans le champ d'une lunette qui a une certaine longueur; & cependant il est presque toujours nécessaire de se préparer à voir un phénomene

annoncé, quelque moment avant celui où il doit arriver, afin de bien saisir l'instant de son apparition.

Tous ces motifs doivent donc engager les navigateurs à s'occuper d'observations plus fréquentes & plus faciles pour parvenir à découvrir la longitude d'un vaisseau. Ces observations sont celles des distances de la lune à une étoile ou au soleil, parce qu'elles peuvent remplir complettement les vues des hommes de mer. En effet la lune, comme on le sait, fait sa révolution autour de la terre; & si on la compare à une étoile, pour connoître le tems qui s'écoule entre son passage vis-à-vis de cette étoile, & son retour au même point, on trouve que ce tems est de 27 j. 7 h. 43′ 12″. Ce qui fait voir que si chaque jour son mouvement étoit uniforme, la lune parcourroit dans le ciel un arc de 13° 10′ 35″ ou 32′ 56″ par heure. Sa distance à une étoile peut donc varier alors d'une quantité très-sensible dans un tems très-court; & par conséquent on doit penser que si elle est observée dans deux points de la terre (qui n'ont même qu'une petite différence en longitude), sa distance au soleil ou à une étoile ne peut paroître la même à la même heure dans chaque lieu. Il est donc évident que si en mer on observe, à une heure connue, la distance vraie de la lune au soleil ou à une étoile; & si un almanach nautique indique d'ailleurs l'heure à laquelle cette distance a dû avoir lieu à Paris, la différence des heures comptées sur le vaisseau & à Paris, à l'époque de l'observation, doit être la longitude du vaisseau à l'égard de Paris.

Examinons par conséquent comment en mer les navigateurs doivent diriger & leurs observations & leurs calculs, lorsqu'ils se proposent d'employer les distances de la lune au soleil ou aux étoiles dans la recherche des longitudes terrestres.

Ils savent que les hauteurs des astres sont altérées par la dépréssion de l'horison, par la réfraction & par la parallaxe. Ainsi *ua* (fig. 97. G) étant supposée la distance apparente de deux astres dans le ciel, ne peut être regardé comme étant leur distance réelle: & pour conclure celle-ci de la premiere, il faut connoître toute

l'influence de la réfraction & de la parallaxe sur la distance vraie. Les corrections qu'il convient d'appliquer à une telle mesure, sont, comme on sait, dépendantes des distances des astres au zénith du lieu de l'observation. C'est pourquoi au moment où la distance de la lune à un astre est observée, il faut mesurer les hauteurs des astres comparés. On ne peut donc en mer employer à la détermination des longitudes terrestres, la mesure des distances de la lune aux astres, sans faire trois observations simultanées, qui sont celles des distances des astres, soit entr'eux, soit au zénith du lieu. Les circonstances peuvent ne pas permettre à trois observateurs de se réunir, pour s'occuper de concert & au même moment des trois observations annoncées; alors un seul observateur peut les faire séparément. Mais il doit répéter plusieurs fois celles des distances; & il doit multiplier aussi celles des hauteurs de ces astres, pour reduire celles-ci plus aisément à ce qu'elles eussent été au moment de l'observation d'une des distances. La réduction de ces hauteurs doit être exécutée par la méthode qui a été indiquée précédemment [172]. Si on recommande d'ailleurs de mesurer plusieurs fois la distance de la lune à l'astre qui lui est comparé, & dans tous les cas; c'est parce que la distance moyenne qu'on en conclut mérite une plus grande confiance que le résultat d'une observation unique, qui peut être mêlée d'erreurs qu'on n'a pas lieu de soupçonner.

Nous allons faire connoître par un exemple tous les détails de cette opération. La facilité de reduire les observations dans tous les cas à un même moment, permet de borner ces développemens au seul cas ou trois observateurs en mer ont mesuré en même tems & à plusieurs reprises, l'un plusieurs distances du bord de la lune au bord du soleil; le second autant de hauteurs du soleil, & le troisieme un même nombre de hauteurs de la lune.

Six distances des bords de ces deux astres ont été mesurées en mer, le 26 avril 1787 à 5 heures du soir, & leur distance moyenne a été trouvée de 116° 8′ 50″. Six hauteurs du soleil & de la lune ont aussi été obser-

vées au moment de la mesure des distances, & d'un point du vaisseau qui étoit élevé de 16 pieds au-dessus du niveau de la mer : de sorte que la hauteur moyenne du bord inférieur de la lune a été trouvée de 44° 15′ 25″, & celle du bord inférieur du soleil de 18° 40′ 55″. Le vaisseau étoit alors par 16° 10′ de latitude nord, & sa longitude à l'ouest de Paris étoit estimée 27°. On demande sa longitude réelle, d'après les observations annoncées.

Il faut chercher la distance vraie des astres comparés, ou les corrections qui doivent être appliquées à leur distance apparente observée; & comme la connoîssance des tems ne présente que pour Paris les diametres de ces astres, ainsi que leur parallaxe; il faut, pour les déterminer par ces tables, calculer quelle heure il étoit à Paris, au moment de l'observation faite à bord. La longitude du vaisseau à l'ouest de Paris, étoit estimée de 27°, ou de 1 h. 48′, à raison de 15° par heure. Ainsi au moment de l'observation supposée, on comptoit à Paris 6 heur. 48′. En consultant les tables, qui donnent, pour le midi de chaque jour à Paris, les diametres du soleil & de la lune, on peut aisément en conclure ces mêmes diametres, pour l'époque de 6 h. 48′ du soir du 26 avril. Ainsi par des parties proportionnelles, on trouve qu'à une telle heure à Paris, le demi-diametre de la lune devoit être de 15′ 43″, & celui du soleil de 15′ 56″ Ces demi-diametres étant ajoutés à la distance observée des bords de ces astres, la somme 116° 40′ 29″ est la distance apparente de leurs centres. Ensuite on fait à cette distance les corrections qui dépendent des déviations des rayons visuels à l'égard du plan de l'instrument, & du défaut de parallélisme des faces des miroirs (corrections qui s'élevent à 46″, & qui tendent à diminuer la distance observée), & on obtient enfin la distance apparente des centres, qui est de 116° 39′ 43″.

Les hauteurs observées des deux astres doivent être diminuées chacune de 4′ 3″, qui sont l'effet de la dépression de l'horison; & elles sont reduites ainsi à 44°

11′ 22″ pour la lune, & 18° 36′ 52″ pour le soleil. Si on les augmente aussi des demi-diametres de ces astres; la hauteur apparente du centre de la lune, est de 44° 27′ 5″, & celle du centre du soleil est de 18° 52′ 48″.

On réduit ces dernieres hauteurs aux hauteurs vraies des mêmes astres, en les corrigeant des effets de la parallaxe & de la réfraction; & comme la réfraction fait paroître trop grandes les hauteurs que la parallaxe rend trop petites; l'excès de la parallaxe sur la réfraction de cet astre, doit être seul ajouté à sa hauteur apparente, pour que la somme représente sa hauteur vraie. La parallaxe horisontale de la lune au moment de l'observation, est, suivant les tables, de 56′ 55″, & la quantité 39′ 50″ est l'excès de la parallaxe sur la réfraction, relativement à sa hauteur observée; par conséquent la hauteur vraie du centre de la lune est 45° 6′ 55″. La parallaxe du soleil, qui est relative à sa hauteur, est plus petite que la réfraction correspondante à cette même hauteur. Ainsi leur différence 2′ 29″ doit être retranchée de la hauteur apparente, pour qu'elle soit changée en hauteur vraie du centre de cet astre. Celle-ci est par conséquent de 18° 50′ 9″.

On doit remarquer que ces corrections dernieres rendent la hauteur apparente de la lune plus petite que sa hauteur vraie; & qu'elles font un effet contraire sur la hauteur apparente du soleil; ainsi représentons par *is* (fig. 94. G) la distance apparente des centres des deux astres, en supposant la lune en *i*, à une distance apparente *iz* du zénith *z* de l'observateur, & le soleil en *s*, à une distance *sz* du même zénith. Soit l'arc *i*L égal à l'excès de la parallaxe sur la réfraction de la lune, alors L est le lieu vrai du centre de la lune dans le ciel; comme celui du soleil est en M, si l'arc *s*M est l'excès de la réfraction sur sa parallaxe. L'arc LM qui passe par les deux points L & M, est donc la distance vraie des centres des deux astres comparés, & leurs distances réelles au zénith *z* sont L*z* & M*z*. C'est cet arc LM qu'il faut actuellement se proposer de dé-

terminer, par le moyen de toutes les données précédentes.

Considérons le triangle sphérique zis. Ses trois côtés sont connus, & il a un angle z en commun avec le triangle sphérique zLM, dans lequel nous devons calculer le côté LM. Nommons a la hauteur apparente du soleil, & A sa hauteur vraie: soient b & B celles de la lune: soient enfin d & D les distances apparentes & vraies des centres de ces deux astres. La formule que nous avons développé ailleurs, & qui exprime les rapports des trois côtés d'un triangle sphérique avec un de ses angles, fournit une équation pour chacun des triangles zis & zLM. Dans le premier on peut dire, $cos. d = sin.a. sin.b + cos.a. cos.b. cos.z$; & dans le second, $cos. D = sin.A. sin.B + cos. A. cos. B. cos.z$. En égalant les valeurs qui résultent de chacune pour $cos.z$, on a l'équation suivante, $(cos.d - sin.a. sin.b) cos.A. cos.B = (cos.D - sin.A. sin.B) cos.a. cos.b$. Si à l'un & l'autre membre on ajoute la quantité $cos.a. cos.b. cos.A\, cos.B$, on transforme l'équation précédente en celle-ci, $(cos.d + cos.(a+b))\, cos.A. cos.B = (cos.D + cos.(A+B))\, cos.a. cos.b$, ou $2 cos.A. cos.B. cos.\frac{1}{2}(a+b+d) cos.(\frac{1}{2}S - d) = (cos.D + cos. A+B) cos.a. cos b$. Supposons que la quantité $2 cos.A. cos. B. cos \frac{1}{2}(a+b+d) cos.(\frac{1}{2}S - d)$, soit égale à $cos.Q. cos.a. cos.b$; alors on a $cos.Q - cos.(A+B) = cos.D$; & par conséquent $cos.D = -2 sin.\frac{1}{2}(A+B+Q)\, sin.(\frac{1}{2}R - Q)$; [En représentant par R la somme des arcs A, B & Q, comme on a représenté par S celle des arcs a, b & d]. La distance vraie peut donc être aisément déterminée par le moyen des logarithmes, comme on peut s'en convaincre en appliquant les formules précédentes à la question proposée ci-dessus. Nous avons vu que pour calculer le cosinus de la distance vraie, il faut connoître la valeur d'un angle Q supposé, & on peut la trouver par la proportion suivante, qui est tirée de l'équation $2 cos.A. cos.B. cos.\frac{1}{2}S.\ cos.(\frac{1}{2}S - d) = cos.Q. cos.a. cos.b$.

$cos. a\,(18^\circ\,52'\,48'')\;cos. b\,(44^\circ\,27'\,5'')$. $\left\{\begin{array}{l} C.\ \dot{0},0240178 \\ C,\ \dot{0},1463961 \end{array}\right.$

$:2\,cos. A\,(18^\circ\,50'\,9'')\;cos. B\,(45^\circ\,65'\,5'')$. . $\left\{\begin{array}{l} 0,3010300 \\ 0,8486094 \\ 9,9760965 \end{array}\right.$

$::cos. \frac{1}{2}s\,(89^\circ\,59'\,48'')\;cos. (\frac{1}{2}s\text{-}d)\,(26^\circ\,39'\,50'')$ $\left\{\begin{array}{l} 5,7647561 \\ 9,9511696 \end{array}\right.$

$:cos. Q\,[89^\circ\,59'\,39'']$. 6,0120755

& enfin on détermine $cos. D$ en mettant en proportion les facteurs des membres de l'équation $cos. D = -2 sin. \frac{1}{2} [A+B+Q]\, sin. (\frac{1}{2}R\text{-}Q)$, sous la forme suivante.

1 . . . . C. $\dot{0}$,0000000

$:2\ sin. \frac{1}{2}R\,(76^\circ\,58'\,21'')$. . . $\left\{\begin{array}{l} 0,3010300 \\ 9,9886758 \end{array}\right.$

$::sin. (\frac{1}{2}R\text{-}Q)\,(13^\circ\,1'\,18'')$. . . 9,3527988

$:\text{-}cos. D\,[116^\circ\,2'\,33'']$. 9,6425046

On doit remarquer que la valeur de $cos. D$ étant négative, comme l'indique l'équation précédente, la distance vraie D est le supplément de la valeur de l'angle, dont le cosinus a pour logarithme celui qui résulte de toute l'opération. La distance vraie des centres de la lune & du soleil étoit donc, au moment de l'observation, de 116° 2′ 33″, & dans ce même moment on devoit compter à bord du vaisseau 4 h. 56′ 2″, comme on le trouve par le procédé indiqué précédemment, en calculant l'angle horaire du soleil, par le moyen, de la hauteur vraie [18° 50′ 9″] de cet astre, de sa déclinaison boréale présumée [13° 39′ 56″], & de la latitude nord [16° 10′] du vaisseau.

Actuellement il s'agit de connoître à quelle heure à Paris la distance de la lune au soleil étoit telle qu'elle a été trouvée de 116° 2′ 33″. La connoissance des tems facilite cette recherche, en présentant pour chaque jour

à Paris, & de 3 heures en 3 heures, les diſtances réelles des centres de la lune & du ſoleil. On y annonce que le 26 avril 1787, à 6 heures du ſoir, la diſtance de ces aſtres étoit de 115° 39′ 5″, & qu'à 9 heures, elle étoit augmentée de 1° 30′ 4″. On doit donc faire la proportion ſuivante 1° 30′ 4″ : 23′ 28″ :: 3 h ou 180′ : x (x repréſente le tems qu'il a fallu à la lune pour augmenter ſa diſtance au ſoleil de 23′ 28″). & on conclut que cette quantité x eſt de 46′ 54″. On comptoit donc à Paris 6 h. 46′ 54″, lorſque la lune étoit à 116° 2′ 33″ du ſoleil; c'eſt-à-dire, au même moment où on comptoit à bord du vaiſſeau 4 h. 56′ 2″. La différence de ces heures, qui eſt 1 h. 50′ 52″, étoit donc la longitude du vaiſſeau, dans l'oueſt de Paris, au lieu de l'obſervation; & cette longitude exprimée en degrés étoit de 27° 43′ O.

Lorſqu'on détermine la longitude d'un vaiſſeau, par les diſtances de la lune aux étoiles; les hauteurs de ces aſtres, qui deviennent néceſſaires pour la réduction de leur diſtance apparente à leur diſtance vraie, ſont rarement faciles à meſurer pendant la nuit. Le bord de l'horiſon, auquel on doit les comparer, eſt éloigné & n'eſt pas toujours viſible, & ſouvent il eſt incertain. Alors, par des obſervations convenables & déjà indiquées, on regle une bonne montre à ſecondes, pendant le jour qui précede, ou pendant celui qui ſuit l'obſervation. Par ce moyen, on peut ſavoir l'heure vraie à laquelle on meſure la diſtance des aſtres comparés; Et on peut calculer les hauteurs qui n'ont pu être obſervées. On parvient à connoître celle-ci en employant les angles horaires & connus des deux aſtres, ainſi que leurs déclinaiſons & la latitude du vaiſſeau. Ces premiers calculs ſervent à déterminer les hauteurs vraies des aſtres, & on en conclut enſuite leurs hauteurs apparentes. Enfin avec ces quantités, on calcule comme précédemment, & la diſtance vraie des aſtres, & la longitude cherchée du vaiſſeau.

275. *Corrections de la poſition eſtimée des vaiſſeaux en mer.* Toutes les obſervations aſtronomiques qui viennent d'être indiquées ne ſont devenues néceſſaires,

qu'à cause de l'incertitude, qui toujours est malheureusement, attachée aux mesures mécaniques de la route d'un vaisseau, ainsi que de sa direction. Celles des longit. terrestres exigent, d'après l'exposé précédent, un plus grand concours de circonstances favorables que celles qui servent à déterminer les latitudes; & souvent on est borné à ces dernieres, parce que les occasions de faire les premieres ne peuvent se présenter aussi fréquemment. C'est pourquoi il est utile aux navigateurs, qui par l'observation de leur latitude, ont reconnu des erreurs dans leur estime, de savoir corriger leur longitude estimée; d'autant plus que celle-ci ne peut être défectueuse que par l'influence des mêmes causes.

Nous supposons avec raison que les longitudes & les latitudes étant exactement observées, méritent toute la confiance des marins, & qu'elles doivent servir à vérifier celles qui n'ont été qu'estimées. Ainsi les erreurs que des observat. astronomiques peuvent faire reconnoître dans l'estime de la latitude d'un vaisseau, ne peuvent être douteuses: & elles doivent faire présumer qu'on en a dû commettre dans l'estime de la longitude. Cherchons par conséquent comment, des premieres erreurs reconnues, on peut conclure la correction qu'il faut faire à la longitude estimée d'un vaisseau, pour qu'elle devienne sa longitude vraie. On sait qu'étant donné le chemin d'un vaisseau en latitude, on détermine son changement en longitude, par la proportion suivante; le rayon est à la tangente du rhumb de vent, comme la différence des latitudes croissantes de départ & d'arrivée est au chemin en longitude qui correspond à la route. C'est pourquoi, si on doit s'attacher dans la pratique de la navigation, à mesurer exactement le rhumb de vent, ou la direction de la route d'un vaisseau, on doit remarquer aussi avec attention toutes les causes d'erreur qui peuvent déguiser le véritable rhumb de vent. Car, plus cet angle est exactement déterminé, & plus la latitude est observée avec soin; plus aussi on peut compter sur la longitude que ces élémens servent à calculer.

Nommons d la différence ae (fig. 50) estimée des

latitudes de l'arrivée & du départ d'un vaiſſeau; ſoit l le changement eſtimé en longitude; ſoit c la longueur eſtimée de la route, & nommons r le rhumb de vent préſumé. Repréſentons, par p l'erreur en latitude, par q celle qui eſt faite ſur la meſure de la route, & par e celle qu'on a pu faire ſur la grandeur du rhumb de vent. Enfin, pour abréger le diſcours, donnons au tri. aeb le nom de triangle eſtimé, & au triangle feo celui de triangle corrigé. Dans celui-ci on peut dire $1:cof.(r+e)::c+q:d+p$; donc $(d+p)=(c+q)cof.(r+e)$. On ſait auſſi que dans le triangle aeb, on a l'équation $d=c.cof.r$; ainſi retranchant ces équations l'une de l'autre, on parvient à celle-ci, $p=c(cof.(r+e)-cof.r)+q.cof.(r+e)=2c.fin.\frac{1}{2}(2r+e)\ fin.\frac{1}{2}e+q\ cof.(r+e)$. Si l'angle r eſt très-conſidérable, ſon coſinus alors eſt très-foible; & le produit $q.cof.(r+e)$ peut par conſéquent être négligé à l'égard de $2c.fin.\frac{1}{2}(2r+e)\ fin.\frac{1}{2}e$, ſans qu'il en réſulte une différence ſenſible dans la valeur de p. Cette erreur p en latitude, qu'on peut alors dire être égale à $c(cof(r+e)-cof.r)$, ne paroît donc dépendre, dans ce cas particulier, que de la ſeule ereur faite ſur le rhumb de vent eſtimé. Mais ſi au contraire l'angle r eſt très-petit, ſon coſinus eſt très-grand & ſon ſinus très-petit; c'eſt pourquoi dans cette nouvelle ſuppoſition, la valeur de p eſt proportionnelle à celle de $q.cof.(r+e)$ ou de $q.cof.r$. Elle eſt donc dépendante alors de l'erreur q qui a pu être faite ſur la longueur de la route, parceque l'erreur commiſe ſur le rhumb de vent peut être négligée ſans inconvénient. C'eſt par ces raiſons qu'on confirme l'opinion générale qui eſt adoptée par les navigat., de n'attribuer qu'aux erreurs du rhumb de vent, celle qui eſt faite en latitude, lorſque la direction de cette route eſt voiſine de la ligne Eſt & Oueſt; & de ne faire dépendre que des erreurs de la route, celle qui eſt faite ſur un air de vent peu éloigné de la ligne nord & ſud. Dans le premier cas, on doit trouver l'erreur ſur le rhumb de vent, par l'équation $p=c[cof.(r+e)-cof.r]$, qui donne $c.cof.[r+e]=p+c.cof.r=p+d$: Donc on peut faire cette proportion ſimple, $c:p+d::1:cof.(r+e)$; ou la

ou la longueur de la route, eſt au chemin obſervé en latitude, comme le rayon, eſt au coſinus du rhumb de vent corrigé.

Par exemple, on a couru 134 lieues ſur un air de vent qui eſt peu éloigné de l'oueſt, & le chemin obſervé en latitude eſt de 1° 51′, ou de 111 milles. Si on réduit les 134 lieues en milles, on doit dire, ſuivant la regle indiquée, $402:111::1:cof(r+e)$, & le rhumb de vent corrigé eſt alors de 73° 58′ 20″. C'eſt après avoir ainſi déterminé cet angle, qu'on cherche enſuite le chemin en longitude, en employant dans la proportion connue, & cet angle, & la différence obſervée des latitudes croiſſantes de départ & d'arrivée.

Les mêmes conſidérations conduiſent à conclure que ſi le rhumb de vent eſt eſtimé très-petit, il doit entrer tel qu'il a été meſuré, dans le calcul du chemin du vaiſſeau en longitude; en faiſant uſage d'ailleurs, pour trouver ce dernier, de la différence obſervée des latitudes. Si dans ce dernier cas on ſe propoſoit cependant de chercher l'erreur qui a pu être commiſe dans la meſure de la route; elle eſt indiquée par l'équation $p = q.cof.r$, ou par la proportion $q:p::1:cof.r$; c'eſt-à-dire que l'erreur ſur la route eſt à celle qui a été faite en latitude, comme le rayon, eſt au coſinus du rhumb de vent eſtimé.

Lorſque l'air de vent ſur lequel un vaiſſeau s'eſt avancé dans l'eſpace, ne permet pas d'attribuer l'erreur en latitude excluſivement, à celle, ſoit du rhumb de vent, ſoit de la route; alors il faut partager cette erreur ſur la latitude en 2 parties. On regarde l'une de ces parties comme dépendante de l'erreur ſur la route; tandis que l'autre eſt cenſée réſulter de l'erreur ſur le rhumb de vent. Remarquons que ce partage doit être tel, que ſi les erreurs de la route & de l'air de vent paroiſſent, d'après l'examen de toutes les circonſtances de la navigation, devoir être toutes deux poſitives, alors l'erreur que des cauſes inconnues ont pu produire ſur la meſure de la route, doit avoir été diminuée en raiſon de la plus grande ouverture de l'angle du rhumb de vent.

Repréſentons par *a* l'erreur partielle en latitude qui

est attribuée à la route, & par *p-a* celle qui dépend du rhumb de vent. Supposons que *dec* soit le tri. estimé (fig. 50), en conservant la dénomination *p* à l'erreur totale *fd* en latitude, dont la partie *fa* ou *a* est due à la route, tandis que la partie *ad* ou *p-a* est l'effet seul de l'erreur commise sur le rhumb de vent. C'est cette derniere qu'il importe de connoître, pour calculer la longitude corrigée du vaisseau; & nous devons remarquer que la quantité *q*, ou l'erreur de la route *ec*, étant représentée par *zo*, on doit avoir la proportion $q:a::1:cos.(r+e)$. Car on ne peut supposer, comme on l'a fait, que *zo* est l'erreur sur la route, sans que *ze* soit égal à *ec*; & sans que *af* soit la portion *a* de l'erreur en latitude, qui correspond à l'erreur commise sur la route. Le rapport de *zo* à *fa* est celui du rayon au cosinus de de *feo* ou de $(r+e)$: donc $a=q.cos.(r+e)$. Si on substitue cette valeur de $q.cos.(r+e)$ dans l'équation générale $p=c(cos.(r+e)-cos.r)+q.cos(r+e)$, elle devient $p=c.cos.(r+e)-ccos.r+a$; & par conséquent $c.cos.(r+e)=p-a+c.cos.r=p-a+d$. On peut donc trouver l'angle du rhumb de vent corrigé $(r+e)$ par la proportion suivante $c:d+p-a::1:cos.(r+e)$; c'est-à-dire que la route estimée est au chemin observé en latitude, diminué de l'erreur attribuée à la route, comme le rayon, est au cosinus du rhumb de vent corrigé.

Par exemple, un vaisseau parti de 52° 40′ N, est arrivé par 54° 22′ suivant une observation, & après avoir couru 113 milles estimés entre le nord & l'ouest. L'erreur de l'estime en latitude a été reconnue plus petite de 18′ que celle qui a été observée. On croit devoir en attribuer 3′ à l'erreur commise dans l'estime de la route, & on demande quel est le rhumb de vent corrigé. Il faut alors faire cette proportion, $113':1°24'+15'$ ou $99'::1:cos.(r+e)$, & on trouve que le vrai rhumb de vent est de 28° 49′ 30″. C'est avec ce nouvel air de vent qu'on calcule le changement en longitude, en faisant la proportion convenable.

Si dans cette circonstance on avoit besoin de connoître l'erreur de la route estimée, les mêmes formules rendent cette recherche très-facile. Car on a tou-

jours $p=c.cos.(r+e)-c.cos.r+q\cdot cos.(r+e)$ ou $(c+q)(d+p-a)=c(p+d)$, d'où on conclut la proportion $d+p-a:p+d::c:c+q$; c'est-à-dire que le chemin observée en latitude & diminué de l'erreur en latitude qui est attribuée à la route, est au chemin observé en latitude, comme la route estimée est à la route corrigée. L'application de cette regle à la question proposée, fait connoître que la route corrigée a dû être de 116,7 milles.

Cette erreur sur la route, ainsi que celle qu'on reconnoît avoir été faite sur le rhumb de vent, doivent attirer l'attention des navigateurs. Car elles peuvent donner des indices de certains courans de la mer, ainsi que de leurs directions. D'ailleurs des observations de ce genre étant faites souvent par divers navigateurs, & dans un même parage, deviennent autant d'avertissemens qui servent à mieux diriger les vaisseaux dans les mers, dont les mouvemens ont été ainsi connus.

176. *Déclinaison de l'aiguille aimantée.* La connoissance de la véritable direction de la route étant, comme on voit, extrémement importante pour décider de la position réelle d'un vaisseau en mer, les navigateurs ne sauroient donner trop de soins à prévenir les faux jugemens qu'ils peuvent en porter : & une des sources principales des erreurs qu'ils ont à craindre dans leur estime, est l'ignorance de la véritable déclinaison de l'aimant, ou de l'angle que la direction d'une aiguille aimantée forme avec celle du méridien d'un vaisseau, à chaque point de sa route. Cet angle n'est pas le même dans les divers lieux du globe. Sa grandeur change annuellement, & même elle éprouve des variations diurnes. Cependant la boussole est l'unique instrument qui soit & qui puisse être aujourd'hui consulté par les marins pour diriger les routes des vaisseaux. Une raison de sureté & de prévoyance engage donc à déterminer la variation de la boussole, dans toutes les occasions qui sont favorables à de telles recherches.

L'astronomie offre des moyens qui apprennent à juger de la véritable déclinaison de l'aiguille aimantée. En effet, imaginons tracées (fig. 55) sur l'horison SONE

d'un observateur, la ligne SN qui représente la direction du plan du méridien, & une ligne OE qui est dirigée de l'est à l'ouest. Si la direction de l'aiguille forme avec SN un angle quelconque, la variation est égale à la grandeur de cet angle. Ainsi on peut déterminer cette variation à terre, par le moyen d'une méridienne SN, dont on auroit déterminé les points par des observations astronomiques, telles que celles des hauteurs correspondantes. Un tel moyen n'est pas praticable en mer, & voici ceux qui conviennent à la situation toujours changeante d'un navigateur. Considérons un astre connu, & qui n'ayant aucune déclinaison, parcourt l'équateur EMO par son mouvement diurne. Comme il se leve au vrai point d'est E, supposons qu'en mer on observe avec une boussole à quel point de la circonférence de la rose, cet astre correspond à son lever. Le point observé sur cette rose doit être le vrai point d'est de l'horison, & l'arc qui peut être compris entre ce point & le point d'est magnétique, est la variation de l'aimant. Si cet arc est QE; c'est-à-dire si le point d'est de la boussole est en Q, & si l'astre à son lever a été relevé en E; le nord de l'aiguille doit se trouver dans l'ouest du pole nord du globe, à une distance qui égale QE. La variation de l'aiguille est donc alors d'un nombre de degrés égal à QE, & elle est nommée nord-ouest ou NO. Si au contraire l'astre paroissoit se lever au point E à une distance E*f* d'un point *f* qu'on suppose le point d'est magnétique, le nord de l'aiguille seroit alors placé dans l'est du pole nord du monde. La variation de l'aiguille seroit donc alors nommée nord-est par cette raison, & sa valeur seroit celle de l'arc E*f*. Un pareil raisonnement conduiroit à de semblables conséquences, si l'observation étoit faite au moment du coucher d'un astre, au-lieu de l'être à celui de son lever.

Si la déclinaison d'un astre n'est pas nulle, & si son parallele diurne est représenté par *umrn*, parce que sa déclinaison est *um*; alors cet astre paroit se lever en *m*. Son amplitude ortive est l'arc *m*E de l'horison qui est compris entre le point de son lever & le vrai point d'est

E. Supposons qu'au moment où il paroît sur l'horison, on mesure l'arc Qm qui est compris entre le point m de son lever & le point d'est de la boussole. Cet arc Qm est son amplitude magnétique, & sa différence QE avec l'amplitude réelle mE est la variation de l'aiguille. Par exemple, si en consultant la boussole on reconnoît qu'à son lever un astre a 10° d'amplitude magnétique du côté du nord, tandis que son amplitude vraie est de 15°: alors le point d'est de la boussole est à 5° au nord du point d'est du monde, ou le nord de l'aiguille est de 5° dans l'ouest du nord du monde: la variation seroit donc dans cette supposition de 5° NO.

Tels sont les raisonnemens qui doivent servir à déterminer la variation de l'aimant. Toujours il faut comparer l'amplitude magnétique d'un astre connu à son amplitude réelle; ainsi il faut savoir calculer celle-ci & observer la premiere. L'observation indiquée est facile parce qu'elle consiste à juger avec précision du point de la rose auquel correspond un astre qui paroît dans le contour de l'horison. Le calcul de l'amplitude réelle est aussi très-simple. On a même formé des tables de ces arcs dont la grandeur dépend & de la déclinaison de l'astre, & de sa hauteur, & de la latitude du vaisseau d'observation. Voici les bases de ces tables.

Imaginons 1° un arc za [fig. 95. G] qui est le complément de la hauteur h de l'astre placé au point a; 2° un arc Pa nommé D qui est le complément de la déclinaison de ce même astre; & 3° un arc zP [passant par les poles z & P de l'horison & de l'équateur] qui est le complément de la latitude l du vaisseau. Ces trois côtés du triangle zaP sont supposés connus: car le côté za est de 90°, puisque l'astre a est réellement dans l'horison. Soit enfin nommée A l'amplitude vraie am, qui est le complément de l'arc aR mesure de l'ang. azP, parce que le point m est le vrai point d'est. Alors dans le triangle zaP, on peut appliquer la formule [153] démontrée ailleurs qui conduit à cette équation $cos.D = sin.h.sin.l + cos.h\ cos.l.sin.A$; & comme h est zéro, son sinus égale 0, & son cosinus égale 1: cette équation devient donc celle-ci $cos.D = cos.l.sin.A$; c'est-à-dire

que l'amplitude vraie d'un aſtre connu, dans un lieu déterminé, eſt toujours le quatrieme terme de cette proportion ; *coſ.l*:*coſ*.D::1:*ſin*:A : ou le coſinus de la latitude d'un vaiſſeau ; eſt au ſinus de la déclinaiſon d'un aſtre, comme le rayon, eſt au ſinus de l'amplitude de cet aſtre. [Cet arc *am* auroit pu être calculé dans le tri. particulier *am*Q, mais la proportion à faire alors auroit encor été la même].

Suppoſons que le 23 avril 1787, on ait relevé le ſoleil couchant à 19° 30′ au nord de l'oueſt magnétique, dans un vaiſſeau qui étoit par 30° de latitude nord & 50° à l'oueſt de Paris. Si par le calcul indiqué, ou par les tables, l'amplitude vraie du ſoleil eſt trouvée de 14° 44′, on doit juger qu'elle differe de l'amplitude obſervée de 4° 46′ ; par conſéquent le nord de l'aiguille eſt avancé de cette quantité dans l'oueſt du pole Nord du monde ; c'eſt-à-dire que la variation eſt de 4° 46′ NO.

Ce calcul ſuppoſe, comme on l'a déjà dit, que l'aſtre eſt placé dans l'horiſon ; ainſi on ne peut regarder comme exacte la variation qui eſt conclue de l'obſervation de l'amplitude magnétique, qu'autant que l'aſtre a été relevé à la bouſſole au moment où ſon centre étoit réellement dans l'horiſon. Ce moment, pour le ſoleil par exemple, eſt celui où ſon bord inférieur paroît élevé au-deſſus de l'horiſon ſenſible d'environ les deux tiers de ſon diametre ; parce que la réfraction fait paroître dans l'horiſon les aſtres qui ſont encore de 33′ au-deſſous de ce plan.

Il faut d'ailleurs ſavoir que les réfractions horiſontales ſont auſſi incertaines que leur cauſes ſont inconſtantes, & qu'il peut en reſulter des erreurs ſur la meſure de l'amplitude. Ainſi la variation de l'aimant ne peut être déterminée rigoureuſement, que lorſque le ciel eſt pur & l'horiſon ſans nuages. Dans la zone torride, de telles obſervations méritent, par cette raiſon, plus de confiance que celles qui ſont faites dans les latitudes élevées.

177. Ces inconvéniens & l'impoſſibilité trop fréquente d'appercevoir les aſtres au moment de leur le-

ver ou de leur coucher, laisseroient souvent aux navigateurs des doutes dangereux sur une des bases les plus essentielles du pilotage, s'il ne leur restoit quelqu'autre moyen de déterminer la variation de l'aimant. Ce moyen est l'observation de l'azimuth d'un astre connu. Soit un astre au point *e* de son parallele *men* & de son vertical *zea*; son azimuth est l'arc *Sa* de l'horison SONE. Ainsi supposons qu'on releve à la boussole l'air de vent, ou le point de la boussole auquel correspond cet astre, lorsqu'il est à la hauteur *ea*; la différence de cet azimuth observé ou magnétique, avec son azimuth réel *Sa*, est toujours la variation de l'aimant.

S'il est facile de relever à la boussole un astre qui est dans l'horison, & presque dans le plan de la rose, il n'en est pas de même lorsqu'il est placé à une certaine hauteur. L'agitation irréguliere que la mer communique à une boussole, & l'extrême difficulté d'assigner sur l'horison la section de ce plan avec le vertical de l'astre, ne permettent pas de faire avec beaucoup de succès les observations des azimuths des astres. On a imaginé, il est vrai, d'armer les boussoles destinées à ces observations, & de pinnules, & d'alidades, pour aider l'observateur à juger de la position du vertical d'un astre; mais on n'a pu réussir à faire disparoître toutes les incertitudes qui sont attachées à ces observations.

Remarquons d'ailleurs que la seule observation de l'azimuth d'un astre ne peut suffire pour la recherche de la variation. Car on doit faire, comme on l'a déjà annoncé, la comparaison de cet azimuth magnétique avec l'azimuth réel de cet astre; & celui-ci ne peut être calculé sans la connoissance de la hauteur réelle *ea* de l'astre relevé.

Cet azimuth réel *aS* est le supplément de la mesure de l'angle *ezP* dans le triangle *ezP*, dont on n'est supposé connoître que deux côtés seulement, savoir, *zP* le complément de la latitude du vaisseau, & *Pe* le complément de la déclinaison de l'astre. Ainsi il faut à la connoissance de ces côtés ajouter celle du côté *ez*, en mesurant la hauteur *ea*, pour rendre possible le calcul

de ezP. Deux obſervateurs doivent donc s'accorder parfaitement pour obſerver au même moment, l'un la hauteur de l'aſtre en e, & l'autre ſon azimuth. Remarquons à ce ſujet que ſi le ſecond obſervateur, au-lieu de relever directement l'aſtre, ne s'attachoit qu'a juger à la bouſſole la direction du plan du ſextant; au moment où le premier meſureroit la hauteur de l'aſtre, il apprécieroit peut-être plus ſûrement l'azimuth cherché. Car dans le moment de l'obſervation de la hauteur le ſextant eſt ſitué véritablement dans le plan vertical qui paſſe par l'aſtre. On faciliteroit d'ailleurs un ſemblable relevement, en garniſſant le limbe du ſextant de 2 regles un peu longues, qui, appliquées ſur ce limbe, prolongeroient le plan du ſextant dans ſa partie inférieure, & rendroient ainſi plus ſenſible la poſition du vertical d'un aſtre, au moment indiqué de l'obſervation de ſa hauteur.

Il ſeroit encore poſſible d'arriver au même but, en garniſſant une bouſſole de deux miroirs parfaitement pareils à ceux du ſextant, & dont les centres, placés dans un plan vertical, correſpondroient aux deux extrémités d'un des diametres de la roſe. Le petit miroir ſeroit fixé ſur un point du bord de la boîte, tandis que le grand miroir placé du côté oppoſé, & mobile ſur lui même, ſeroit ſuſceptible de prendre, comme dans le ſextant, toutes les poſitious convenables à l'égard du petit miroir. Celui-ci, ſemblable à celui du ſextant, auroit une partie non étamée, afin que l'image de l'aſtre qui ſeroit réfléchie du grand miroir ſur le petit, pût être comparée avec l'horiſon, par un obſervateur dont l'œil ſeroit placé à une pinnule vis-à-vis du petit miroir. De tels miroirs, qu'il ſeroit facile d'adapter ainſi à un compas de variation, rendroient très commode & très-ſure la meſure de l'azimuth d'un aſtre. On pourroit même par ce moyen ſuivre un aſtre dans ſon mouvement, & juger de ſon azimuth, au moment précis où un obſervateur meſureroit ſa hauteur.

Quel que ſoit celui de ces moyens qui fixe le choix d'un navigateur, ſuppoſons qu'il connoiſſe avec préciſion & l'azimuth magnétique, & la hauteur d'un aſtre

déterminé. Il faut qu'il calcule ensuite son azimuth réel, ou l'angle ezP, dans le triangle Pze dont les trois côtés sont alors connus. Conservons les dénominations précédentes, en nommant toujours D la distance du centre de l'astre au pole élevé, & employons la même formule. On a l'équation $cos. D = sin. h. sin. l + cos. h. cos. l. cos. z$; & comme $cos. z = 1 - 2 sin. \frac{1}{2} z^2$, ou $cos. z = 1 - 2 + 2 cos. \frac{1}{2} z^2 = 2 cos. \frac{1}{2} z^2 - 1$, on la transformera en celle-ci $cos. D = 2 cos. h. cos. l. cos. \frac{1}{2} z^2 - cos. (h+l)$; & enfin par des substitutions déjà indiquées ailleurs, elle deviendra de cette forme, $cos. h. cos. l. cos. \frac{1}{2} z^2 = cos. \frac{1}{2} (d+h+l) cos. \frac{1}{2} (h+l-d)$. Le terme cherché peut donc être trouvé par la proportion suivante [en nommant s la somme des trois arcs d, h & l]. $cos. h. cos. l : cos. \frac{1}{2} s :: cos. [\frac{1}{2} s - d] : cos. \frac{1}{2} z^2$. Voici une application de cette formule. Un vaisseau étant, le 14 juillet 1787, par 30° 43′ de latitude nord, & par 48° à l'ouest de Paris, on a observé à bord la hauteur du soleil, qui corrigée étoit de 7° 43′, & au même moment on a relevé au compas le centre de cet astre, qui a paru correspondre à 62° dans l'ouest du nord de l'aiguille. On demande quelle devoit être à cette époque & en ce lieu, la variation de l'aimant. [la distance du soleil au pole N étoit de 67° 8′].

On doit faire cette proportion.

$cos. l$ [30° 43′] $cos. h$ [7° 43′] . .	C. 0,0656512 C. 0,0039508
: $cos. \frac{1}{2} s$ [52° 47′]	9,7816339
:: $cos.$ [$\frac{1}{2} s$ - d] [14° 21′]	9,9862340
: $cos. \frac{1}{2} z^2$	19,8374699
$cos. \frac{1}{2} z$ (33° 58′ 10″)	9,9187349

L'angle azimuthal z est donc de 67° 56′ 20″, & l'azimuth magnétique étant de 62°, leur différence 5° 56′ 20″ est la variation NO de l'aiguille : car le nord de celle-ci étoit au moment de l'observation dans l'ouest du pole nord du monde, de 5° 56′ 20″.

Nous remarquerons enfin que les obſervations des azimuths doivent, autant qu'il eſt poſſible, être faites lorſque l'aſtre eſt ou dans le premier vertical ou peu éloigné de ce cercle. Alors ſon mouvement en hauteur eſt très-rapide, & ſon mouvement en azimuth très-lent; ainſi on peut plus facilement obſerver la poſition de ſon vertical ainſi que la hauteur de l'aſtre, & en conclure plus exactement, non ſeulement ſon azimuth vrai; mais auſſi la déclinaiſon réelle de l'aimant.

178. Lorſqu'un vaiſſeau ſe trouve à la vue d'une pointe de terre, ou d'une île, ou d'une montagne, ou d'un rocher, &c; dont il eſt important de connoître le giſſement, & dans un moment où il devient néceſſaire de déterminer avec préciſion la déclinaiſon de l'aimant; on peut y parvenir par des obſervations de diſtances, ainſi que d'azimuths, & par des relevemens. En effet ſoit i (fig. 100. G) le lieu du ſoleil, lorſque une île paroît en n, dans l'horiſon Qq d'un obſervateur dont le zénith eſt z. L'azimuth de l'île eſt l'arc noq (parce que Qzq eſt le méridien du lieu), & celui du ſoleil eſt oq. Le pole élevé P étant le pole nord, le ſoleil eſt ſuppoſé au midi de l'île; & pour connoître la variation de l'aimant, il faut comparer l'arc noq qui eſt l'azimuth réel de l'île, avec l'azimuth magnétique du même point. Cet arc noq eſt compoſé de l'azimuth oq du ſoleil & d'un arc on qui eſt la meſure de l'angle nzi. L'un doit être calculé dans le triangle Pzi; ce qui ne peut ſe faire qu'autant qu'on connoît & le complément zP de la latitude du lieu, & le complément Pi de la déclinaiſon du ſoleil, & le complément zi de ſa hauteur. De même le calcul de no, ou de l'angle nzi, dans le triangle nzi, exige qu'on connoiſſe les trois côtés de ce triangle, qui ſont, le premier zi déja déſigné, le ſecond zn qui eſt le complément de la hauteur de l'objet relevé, & enfin le troiſieme ni qui eſt la diſtance de cet objet au ſoleil.

On voit donc que dans cette recherche trois obſervateurs doivent ſe réunir pour obſerver au même moment, l'un la hauteur du ſoleil, l'autre la diſtance de cet aſtre à un point de l'île ſuppoſée, & le dernier l'air

de vent de la bouſſole ſur lequel eſt placé le point comparé de la même île. Employant enſuite les dénominations précédentes, & ſuppoſant de plus que l'angle nzi eſt repréſenté par O, la diſtance ni par n, & le complément de zn par m, on a l'équation ſuivante, dans le tri. Pzi, $cos.D = sin.h.sin.l. + cos.h.cos.l.cos.z$, ou $cos.h.cos.l.cos.\frac{1}{2}z^2 = sin.\frac{1}{2}[h+l-D]\,sin.\frac{1}{2}[h+l+D]$. Les trois côtés du triangle zni étant connus, on détermine l'angle nzi par une pareille équation, & on a $cos\,n = sin.m.sin.h + cos.m.cos.h\,cos.o$; mais en ſuppoſant que le point de l'île qui eſt relevé à la bouſſole & comparé au ſoleil, eſt au niveau de la mer, alors ſa hauteur m eſt nulle; $sin\,m = o$ & $cos.m = 1$: donc l'équation précédente ſe change alors en celle-ci $cos.n = cos.h.cos.O$. D'ailleurs ſi l'objet obſervé étoit élevé au-deſſus de l'horiſon, ſa hauteur meſurée ſeroit la valeur de m, & l'angle nzi ſeroit alors calculé par la formule générale.

L'exemple ſuivant va préſenter l'application de ces regles utiles. Un vaiſſeau étant par 30° 35′ de latitude ſud, & à la vue d'un cap qui ſe montre au niveau de la mer, on obſerve ſimultanément; 1.° la hauteur 34° 17′ du bord inférieur du ſoleil qui paroît dans l'eſt du méridien, avec une déclinaiſon de 7° 20′ nord; & 2.° la diſtance 65° 30′ de ce cap au bord le plus voiſin de l'aſtre; 3.° ce cap eſt relevé à 62° 30′ du ſud de l'aiguille de la bouſſole dans la partie de l'eſt. On demande & la variation de l'aimant & & le véritable giſſement de ce cap.

La hauteur apparente du centre du ſoleil eſt de 34° 33′, parce qu'au moment de l'obſervation, il a un demi-diametre de 16′, & ſa diſtance au cap eſt de 65° 46′. Comme le cap eſt ſuppoſé à fleur d'eau, ſa hauteur m eſt nulle, & on doit trouver par cette proportion $cos.h[34°\,33′]:cos.n[65°\,46′]::1:cos.o$, que la valeur de o ou de nzi eſt de 60° 7′. (Les arcs qui entrent dans cette proportion ſont employés ſans être corrigés, de la réfraction, de la parallaxe, & de la dépreſſion de l'horiſon; parce que leurs effets n'étant ſenſibles que dans le vertical de l'aſtre, ne changent pas la

valeur de l'angle nzi]. L'angle azimuthal Pzi eſt enſuite calculé lorſqu'on a corrigé, comme à l'ordinaire, la hauteur apparente du ſoleil. Ces corrections s'élevent à $6'$, & la hauteur réelle du centre du ſoleil eſt par conſéquent de $34^o\ 27'$. Le reſultat de la formule préſentée précédemment eſt donc que l'angle Pzi étoit de $125^o\ 49'$. Remarquons actuellement que l'azimuth vrai du cap relevé eſt l'arc Qn ou la différence des arcs Qo & on: ſa valeur eſt donc de $65^o\ 42'$; c'eſt-à-dire qu'au moment où l'aſtre a été obſervé du vaiſſeau, il répondoit au SE$\frac{1}{4}$E $9^o\ 27'$ E. Le relevement qui a été ſuppoſé en être fait à la bouſſole, le plaçoit à $62^o\ 30'$ du ſud de l'aiguille du côté de l'eſt; par conſéquent la différence $3^o\ 12'$ eſt la quantité dont le pole ſud de l'aimant eſt dans l'eſt du pole ſud du monde, ou la variation eſt de $3^o\ 12'$ NO.

Cette méthode de déterminer en mer & le giſſement d'un point quelconque, & la variation de l'aimant, a des applications auſſi nombreuſes qu'elles ſont utiles, & elle mérite particuliérement l'attention des navigateurs. A terre, comme nous l'avons dit, une ligne méridienne tracée exactement ſur un plan ſert à corriger les relevemens faits à la bouſſole, & comme il eſt à-propos que les navigateurs connoiſſent la maniere de décrire cette ligne, nous allons préſenter quelques vues générales ſur cet objet.

On ſait qu'un aſtre, depuis le moment de ſon lever en m (fig. 55) acquiert toujours plus de hauteur à meſure qu'il s'approche du méridien zus; & qu'après ſon paſſage à ce dernier cercle, ſa hauteur diminue de la même maniere juſqu'à ſon coucher n. On ſait auſſi [fig. 36] que les ombres d'un corps qui eſt éclairé par le ſoleil, ſont toujours égales toutes les fois que cet aſtre a une même hauteur au-deſſus de l'horiſon, & que le centre de chacune de ces ombres eſt dans le vertical qui paſſe par les centres de ce corps & du ſoleil. Ainſi du point o comme centre, ſoit décrite ſur un plan horiſontal BDCE une circonférence $cibqmz$, & ſoit planté verticalement en ce point o un ſtile ao. Après ces préliminaires, ſuppoſons qu'on marque avant

midi le point *b* de cette circonférence où paroît se terminer l'ombre *ob* du stile *oa*; & qu'après le passage du soleil au méridien, on marque aussi le point *c* de la même circonférence, qui est l'ombre du sommet *a* du même stile *oa*. Le milieu *i* de l'arc *bc* & le centre *o* de la circonférence doivent alors être deux points de la méridienne qu'on se propose de tracer sur ce plan, (en supposant néanmoins que dans l'intervalle des observations du matin & du soir, la déclinaison du soleil n'a pas changé sensiblement). En effet on sait que dans le triangle P*ze* (fig. 55) la valeur de l'angle *z* est donnée par la formule générale, $cos.D = sin.l.sin\,h + cos\,l.cos\,h.cos.z$. Cette équation démontre donc que dans un même lieu, & le soleil conservant une même déclinaison, les valeurs de l'angle *z* sont égales toutes les fois que la hauteur du soleil est la même; par conséquent les longueurs des ombres observées [fig. 36] étant égales avant & après midi, l'arc *bc* qui les sépare doit être le double de l'azimuth que le soleil a dû avoir au moment de chaque observation. le milieu de cet arc doit donc indiquer le point *i* vers lequel étoit dirigée l'ombre *oi* du stile, lorsque le soleil étoit dans le méridien, ou la position *iom* de la ligne méridienne cherchée. On voit qu'une telle ligne étant ainsi tracée, on peut juger aisément si une aiguille aimantée a la direction du méridien terrestre, ou si elle s'en écarte; & dans ce dernier cas, on peut mesurer non-seulement sa déclinaison, mais aussi reconnoître dans quel sens elle a lieu.

179. *Flux & reflux de la mer.* L'astronomie est non seulement utile aux navigateurs pour rectifier les erreurs de leur estime, & pour indiquer leur position au milieu des mers les plus étendues, mais elle peut encore les guider & les diriger, lorsqu'à leur approche des côtes, ils ont besoin pour les aborder avec sureté, de la connoissance des marées. Car elle peut servir à trouver le tems où les eaux doivent affluer abondamment sur ces rivages, & ceux où ils doivent refluer des ports vers la mer.

Tous les hommes qui habitent les côtes de l'océan ou des grandes mers, ont remarqué, sous le nom de

flot & de jusant, des courans reguliers, périodiques, & plus ou moins rapides, qui chaque jour élevent & abaissent les eaux de la mer à l'égard de leur niveau naturel. Ces mouvemens & leurs variétés ont été observés de tout tems dans des mers vastes & libres, telles que celles du nord, du sud & de l'Inde; mais on ne les connoît pas, ou ils se montrent foiblement dans les mers petites & étroites, telles que les mers Méditerranée, Caspienne & Baltique. Par-tout où les marées sont sensibles, leur regularité & leurs retours périodiques ont frappé tous les observateurs. Tous ont remarqué que le moment de la haute mer est toujours le même à chaque pleine ou nouvelle lune; & c'est ainsi qu'appuyés sur une longue expérience, ils ont reconnu que ces mouvemens de la mer ont des relations constantes avec ceux de la lune.

Ces rapports de concordance ne peuvent être qu'indiqués ici, & nous ne pouvons faire connoître à présent que le rapport des mouvemens de la lune avec les marées de toutes les mers. Ailleurs nous expliquerons (autant qu'il peut être convenable à l'instruction de tout homme de mer) pourquoi chaque jour il y a deux flux & deux reflux, pourquoi les eaux s'élevent plus haut aux époques des nouvelles & pleines lunes que dans toute autre position de cet astre; pourquoi parmi ces dernieres grandes marées, celles des équinoxes sont les plus considérables; pourquoi dans certains parages les courans des marées ont des directions si différentes des directions générales; pourquoi les hauteurs des marées different si étrangement dans divers points du globe; pourquoi enfin l'heure de la pleine mer aux nouvelles & pleines lunes, ou l'établissement des ports, est variable suivant les rivages des mers. Ici nous devons nous circonscrire dans des bornes établies par les convenances, & nous ne devons considérer que les rapports des marées avec l'astronomie, pour l'utilité de la navigation.

Un vaisseau est-il devant une côte ou un port? il est important que l'heure de la haute mer à un jour proposé soit connue du navigateur qui le dirige, soit pour profiter du courant de la marée, soit pour juger

exactement de son influence sur la route prolongée de ce vaisseau; & l'astronomie fournit le moyen de remplir ces vues.

Déjà nous avons dit que l'heure de la haute mer dans un port quelconque, est toujours la même aux jours de pleine & nouvelle lune. l'Expérience a prouvé aussi que le moment de la pleine mer retarde assez regulièrement d'un jour au suivant, depuis la conjonction jusqu'à l'opposition de la lune, ou depuis la nouvelle lune jusqu'à la pleine lune suivante. Après avoir ainsi annoncé les mouvemens de la mer, comparons les avec ceux de la lune. Cet astre tourne réellement autour de la terre, indépendamment de son mouvement apparent & journalier (qui est relatif à la rotation du globe sur lui-même); & si le tems de sa révolution absolue, ou à l'égard des étoiles, est de 27 j. 7 h. 43′ 12″, il s'écoule un intervalle de tems plus considérable entre deux pleines lunes ou deux nouvelles lunes consécutives. Cette derniere révolution est de 29j 12 h. 44′ 3″; c'est-à-dire que si dans un certain jour du mois, la lune passe au méridien d'un lieu en même tems que le soleil, elle ne se trouve avec lui au même méridien, qu'après environ 29 jours & demi. Son passage au méridien, à chaque jour intermédiaire, retarde aussi sur le soleil; & de tout le tems qu'il faut à celui-ci pour parcourir dans le ciel, par son mouvement diurne, un arc de 12° 11′ 27″, qui est le mouvement moyen relatif & diurne de la lune à l'égard de cet astre. Ce tems est de 48′ 45″ $\frac{4}{5}$, ou à-peu-près de 49′ (toutes ces quantités sont moyennes parce qu'elles sont les seules qu'on puisse employer dans des regles générales).

Remarquons actuellement que l'intervalle de tems qui sépare une nouvelle & une pleine lune qui se suivent est d'environ 15 jours; que les retards journaliers des marées, pendant ces 15 jours, sont à peu près uniformes & reguliers, & qu'ils forment ensemble une somme de 12 h. Par conséquent le retard moyen de la marée d'un jour sur celle du jour précédent, doit être de 49′ à-peu-près. Ce retard est donc à-peu-près égal à celui du passage de la lune au méridien (dans un certain jour) sur le pas-

ſage du même aſtre qui a eu lieu le jour précédent. Cependant cette correſpondance n'eſt pas telle que l'heure de la pleine mer dans un port ſoit exactement celle du paſſage de la lune au méridien de ce port. Car alors l'établiſſement ſeroit le même pour chaque port, & il ſeroit indiqué par l'heure de midi, ce qui eſt contraire à toutes les obſervations des hommes de mer, & ſur-tout à celles des inégalités biſarres qu'on a remarqués dans les établiſſemens des ports de différentes côtes.

Les réflexions précédentes conduiſent ainſi à deux méthodes propres à être employées pour déterminer l'heure moyenne de la marée à un jour donné; dans un port indiqué. On peut la trouver, en ajoutant à l'heure de l'établiſſement de ce port, ſoit autant de fois 49′ qu'il y a de jours écoulés à cette époque, depuis la derniere nouvelle ou pleine lune; ſoit l'heure du paſſage de la lune au méridien de ce port.

Les almanachs nautiques facilitent de telles opérations: car ils indiquent & les époques des nouvelles & pleines lunes ou des ſygygies, & l'heure des paſſages de la lune aux méridiens ſoit de Paris ſoit de Londres, &c. Ainſi ſuppoſons qu'un navigateur ſoit intéreſſé à ſavoir l'heure de la pleine mer à un jour donné, dans un port dont l'établiſſement eſt connu. S'il conſulte la connoiſſance des tems, il y trouve l'heure qu'on comptoit à Paris le jour auquel eſt arrivée la derniere ſygygie; alors ſi le port propoſé eſt ſous le méridien de Paris, il doit multiplier 49′ par le nombre des jours écoulés, depuis cette ſygygie, & la ſomme de ce produit ajouté à l'établiſſement du port propoſé, eſt l'heure moyenne de la pleine mer dans ce même port. Mais ſi ce port eſt dans l'eſt ou dans l'oueſt de Paris, l'heure de la ſyzygie annoncée pour Paris n'eſt pas l'heure qu'on comptoit dans ce port à la même époque, & on la connoît par la différence des longitudes de ces deux lieux, qu'on reduit en tems, à raiſon de 15° par heure. Par ce moyen, on peut juger la diſtance qui ſépare le moment pour lequel on calcule la marée de celui de la derniere ſyzygie. Mais il ne ſuffit pas de ſavoir calculer ainſi l'heure de la pleine mer à un jour

donné

donné dans un port proposé, il faut aussi, pour faire une application convenable d'un tel résultat, connoître l'heure qu'on compte dans ce port, au moment où toute autre circonstance peut permettre de l'aborder; on la détermine par l'observation de la hauteur d'une étoile ou du soleil, étant connues d'ailleurs, & la déclinaison de l'astre observé, & la latitude du lieu.

Un navigateur peut ne pas employer dans cette recherche l'age de la lune, ou l'époque de la syzygie qui est la plus voisine du jour pour lequel il calcule la marée. Car s'il sait l'établissement, ainsi que la position du port proposé, il peut recourir à un autre moyen pour trouver, avec plus de précision que par la premiere méthode, l'heure de la pleine mer. Il doit chercher à connoître l'heure du passage de la lune au méridien de ce port pour le jour donné, parce que la somme de l'heure de ce passage & de celle de l'établissement, doit être l'heure de la pleine mer dans ce port. Sait-il par les tables l'heure du passage de la lune au méridien de Paris, il doit calculer celle de son passage au méridien du port dont la longitude est donnée. Il faut donc qu'il fasse cette proportion; 24 h. sont à la différence des longitudes de Paris & du port, comme la différence des passages consécutifs de la lune au méridien de Paris, ou d'un jour à l'autre, est à un nombre de minutes & de secondes, qui est la différence des heures qu'on doit compter aux momens des passages de la lune aux méridiens de Paris & du port. En effet, si la lune emploie 24h. 48′ de tems à revenir d'un jour à l'autre au méridien de Paris, & par conséquent à parcourir 360°, il lui faut, pour s'avancer du méridien de paris à celui du port, un tems qui est proportionnel à la différence des longitudes des lieux.

Cette différence des momens des passages étant calculée par la proportion indiquée, doit être ensuite ajoutée à l'heure du passage de la lune au méridien de Paris, si celui-ci est dans l'est du port, ou elle doit en être retranchée, s'il est dans l'ouest; & la somme ou la différence de ces quantités est l'heure du passage de la lune au méridien du port. Enfin la somme de l'heure

de ce paſſage & de l'établiſſement, eſt l'heure de la pleine mer dans le port propoſé. Le navigateur, après ces premiers calculs, doit en faire auſſi pour s'aſſurer de l'heure qu'on compte dans ce port, ou à bord de ſon vaiſſeau, à l'époque où il ſe propoſe de l'aborder; & ce n'eſt qu'avec toutes ces connoiſſances qu'il peut choiſir le moment convenable pour remplir ſans inconvénient un projet dont l'exécution dépend de la marée.

Les heures des marées qui ſont ainſi calculées ne ſont pas les heures réelles auxquelles elles arrivent ſurtout aux quadratures, & on trouve dans les tables les corrections qu'on doit faire à ces premiers reſultats, pour parvenir à de plus juſtes. Cependant elles peuvent ſuffire pour les beſoins ordinaires de la navigation. D'ailleurs le calcul le plus rigoureux ne conduit pas même à déterminer la minute de l'heure de la pleine mer, telle que la nature l'indique dans les divers points des mers. Car les vents & les courans y produiſent des variétés très-irrégulieres, par leur force & leur direction; & nous en citerions des exemples ſi nous parlions des cauſes générales & des circonſtances particulieres des marées.

Un navigateur ſe propoſe-t-il de déterminer l'établiſſement inconnu d'un port où il relâche? il lui ſuffit d'obſerver le moment d'une ſeule marée, même dans toute autre époque que celle d'une ſyzygie, pour conclure cet établiſſement, en obſervant d'ailleurs le paſſage de la lune au méridien, ou en déterminant le moment de ce paſſage par des obſervations convenables. Car la différence de l'heure de la pleine mer, à l'heure de ce paſſage, eſt toujours l'heure très-approchée de l'établiſſement d'un port. Le tems dont nous parlons eſt toujours celui qu'on compte dans le port ſuppoſé. C'eſt pourquoi on le meſure avec une montre bien reglée, ou on le connoit en obſervant la hauteur du ſoleil ou de quelque étoile, comme on l'a dit précédemment.

Si les circonſtances ne permettent pas d'obſerver le moment où la lune paſſe au méridien, il faut calculer ce moment, qu'on détermine aiſément, lorſqu'on con-

noît d'ailleurs la longitude de ce port à l'égard de Paris, & la forme d'un tel calcul a déjà été indiquée.

Dans le cas où la lune seroit sur l'horison au moment de la pleine mer, il suffiroit d'observer la hauteur de cet astre. On concluroit son angle horaire, ou sa distance au méridien du lieu ; & cette distance reduite en tems, à raison de 15, 5 deg. par heure, seroit à-peu-près l'heure de l'établissement du port supposé.

Si nous avons dit qu'on doit observer la hauteur de la lune pour déterminer sa distance au méridien du lieu, c'est parce que dans le triangle zPe, formé par des arcs menés du pole P & du zénith z à la lune qui est en e, on connoît alors les trois côtés : car le complément zP de la latitude est supposé donné ; le complément Pe de la déclinaison de la lune peut être aussi calculé & d'après la longitude estimée du port à l'égard de Paris, & d'après la déclinaison que les tables indiquent pour Paris. Ainsi la hauteur ea de la lune étant observée, on peut calculer dans le triangle zPe, l'angle horaire zPe de cet astre. Remarquons que la valeur de cet angle est d'autant plus exacte que la longitude attribuée à ce port est mieux établie.

On reduit cet angle en tems, d'abord à raison de 15 degrés par heure, & on trouve ainsi à-peu-près de combien d'heures & de minutes la lune, au moment de l'observation, ou au moment de la pleine mer, étoit éloignée du méridien du lieu. Mais cet intervalle de tems doit être calculé exactement, ainsi il faut chercher combien cet astre doit varier en ascension droite pendant qu'il parcourt la mesure de l'angle horaire trouvé, & l'ajouter à cet angle, ou l'en retrancher, selon que ce mouvement tend à approcher ou à reculer la lune du méridien du lieu.

Par exemple ; un vaisseau étant dans un port dont la latitude nord est de 15° 10′, & la longitude estimée à l'ouest de Paris de 45° 30′ ; on a observé dans la soirée du 21 avril 1787, & au moment de la pleine mer, la hauteur de la lune. On a trouvé que la hauteur réelle de son centre étoit de 42° 9′ ; & son angle horaire, en supposant sa déclinaison de 24° 24′ nord au mo-

ment de l'obſervation, a été trouvé de 50° 10′ 30″ ou de, 3 h. 20′ 42″. La pleine mer étoit donc arrivée dans ce port lorſque la lune étoit à cette diſtance du méridien. Cependant ce reſultat n'eſt pas parfaitement exact; car pendant ces 3 h. 20′ 42″ la lune par ſon mouvement en aſcenſion droite, s'étoit rapprochée du méridien du lieu de 2° 14′; le moment du paſſage de la lune à ce méridien étoit donc plus éloigné du moment de l'obſervation qu'il n'eſt indiqué par les 3 h. 20′ 42″, & cet excès eſt égal au tems qu'il faut à 2° 14′ de la ſphere céleſte pour paſſer au méridien, c'eſt-à-dire qu'il eſt de 8′ 56″. La pleine mer eſt donc arrivée dans ce port à 3 h. 29′ 38″ après le paſſage de la lune au méridien du lieu, & te ſtl'établiſſement de ce port.

C'eſt ainſi que, par des obſervations aſtronomiques, choiſies & convenables aux circonſtances, les navigateurs peuvent parvenir dans tous les tems à déterminer d'une maniere très-approchée, ou l'établiſſement d'un port, ou l'heure de la marée (à un jour donné), lorſque l'établiſſement eſt connu.

Si un vaiſſeau eſt porté ſur une terre nouvelle dont l'exiſtence étoit ignorée, l'analogie doit alors ſervir de guide à l'homme de mer, pour eſtimer & l'heure de la marée ſur cette île, & la force, & la direction, & l'étendue d'un tel courant. Il doit comparer la ſituation de cette terre, à celle de toutes les côtes connues; & dans ce parallele il doit avoir égard non-ſeulement à la grandeur des mers environnantes, mais auſſi à la diſtance, comme à l'expoſition des grands continens les plus voiſins. C'eſt par de telles comparaiſons qu'il peut juger des marées qui doivent ſe faire ſentir dans un port inconnu. Par exemple, ſi ce port eſt peu ouvert à la grande mer, s'il eſt placé ſur la côte occidentale ou d'Europe, ou d'Afrique, depuis la Manche juſqu'au cap de Bonne-eſpérance; on pourroit prononcer d'après les établiſſemens des autres ports de cette côte, que la pleine mer doit y avoir lieu environ 3 h. après le paſſage de la lune à ſon méridien.

Si le port ſuppoſé inconnu étoit ſitué ſur la côte orien-

tale d'Amérique, l'expérience conduiroit à penſer que le moment de la pleine mer ne doit pas y arriver plutôt que 5 h. après le paſſage de la lune au méridien, tandis que ſur la côte occidentale du même continent les heures des marées ſont à-peu-près telles qu'on les obſerve ſur la côte occidentale des continens de l'Europe & de l'Afrique. Dans la Manche, & juſques à l'extrêmité de la mer d'Allemagne, il y a de trop grandes variétés entre les heures des marées pour les préſenter ſous un point de vue général: car ſur cet eſpace des différences conſidérables ſont placées à de ſi petites diſtances, qu'il eſt des points de ces bras de mer pour leſquels l'établiſſement eſt de 4 h., tandis que pour d'autres il eſt de 12 h. Ces différences étonnantes proviennent de ce que dans ces parages deux marées ſe combattent & ſe combinent enſemble. Toutes deux viennent de l'océan, & tandis que l'une s'avance par la Manche, l'autre qui ſe jette dans la mer d'Allemagne en paſſant à travers les îles Shetland, Ferro, &c. vient contrarier les effets de la premiere. Le canal de Briſtol offre les mêmes phénomenes. Dans les mers de l'Inde les marées ſont foibles, mais les courans ſont très-rapides & ils varient d'ailleurs en raiſon de la ſituation des côtes ainſi que du cours des mouſſons. D'ailleurs dans ces mers & dans celle du ſud les obſervations ont été peu nombreuſes, mais lorſqu'elles auront été multipliées ſur pluſieurs points, & faites avec toute la préciſion néceſſaire, leur recueil ſervira à juger avec approximation des marées qui peuvent avoir lieu dans un port, ou dans une île, dont l'établiſſement ſeroit inconnu. L'expérience & l'aſtronomie peuvent donc ſe prêter mutuellement des ſecours importans que l'homme de mer doit ſavoir employer & diriger, non ſéparément, mais concurremment, pour exercer la navigation, avec autant de sureté que de ſuccès.

[illegible]

[illegible] que le [illegible] [illegible]

[illegible] des [illegible] [illegible] quoi [illegible]

[illegible] qu'il [illegible] de [illegible]

[illegible] que [illegible]

[illegible] de [illegible] Ces [illegible]

[illegible] de [illegible] et tandis que [illegible]

[illegible] qui se jette dans la mer [illegible]

[illegible] à travers [illegible]

[illegible] les effets de [illegible]

[illegible]

LA SCIENCE
DE
L'HOMME DE MER.

SECTION QUATRIEME.

MÉCANIQUE.

180. LA ſcience nommée *mécanique*, a pour objet les effets de toutes les puiſſances naturelles, qui, par une action immédiate, ou à l'aide de machines, ſont ſuſceptibles de produire, d'altérer, ou de détruire le mouvement d'un corps quelconque. Elle conſidere ces effets, ſoit dans un état iſolé, ſoit dans un état de combinaiſon. Elle embraſſe ainſi les mouvemens de tous les genres, leur direction, leur meſure, leurs rapports, & leurs loix; non-ſeulement lorſqu'ils ſe déployent librement, mais auſſi lorſqu'ils ſont contrariés, lorſqu'ils tendent ſeulement à naître & lorſque des machines ſervent à les modifier, ainſi qu'à les varier.

L'homme de mer, ne peut donc exercer ſon art avec un ſuccès aſſuré, s'il ne poſſede cette ſcience utile. Car ſans ceſſe il eſt entouré de puiſſances diverſes, dont l'action s'exerce ſur le vaiſſeau dont il dirige la marche : & leurs effets, importent non-ſeulement à ſa ſûreté, mais auſſi à l'heureuſe exécution de ſes projets. La gravité,

par exemple, tend conſtamment à précipiter au fond de la mer les bâtimens flottans, tandis que la preſſion de l'eau repouſſe ces corps vers la ſurface. Le vent les preſſe de s'avancer dans l'eſpace, & l'eau par ſa réſiſtance modere l'effet de cette action. Des courans, des lames, les frappent, les entraînent ſur diverſes directions; & d'autres forces ſervent, ſoit à détruire ces impulſions, ſoit à produire d'autres effets qui deviennent favorables ou contraires. L'action du vent ou de l'eau eſt employée à communiquer du mouvement aux bâtimens de mer; c'eſt pourquoi des moyens mécaniques ſont devenus néceſſaires pour cette communication, & un homme de mer doit ſavoir en faire uſage, pour augmenter ou diminuer au beſoin les effets de ces cauſes, comme pour les rendre toujours convenables aux circonſtances. Ces moyens ſont des mâts, des vergues, des voiles, des cordages, des poulies, des ancres, des rames, un gouvernail, &c. Enfin un vaiſſeau pour être propre à certaine deſtination connue, doit être doué de pluſieurs qualités eſſentielles; & ſa forme, ainſi que ſa ſolidité, & l'arrangement de toutes les parties qui le compoſent, ou dont il eſt chargé, ne peuvent être déterminés, que par la connoiſſance des puiſſances qui doivent agir ſur lui au milieu des mers; ainſi que par celle de leur influence relative, dans toutes leurs combinaiſons poſſibles.

Les applications de la mécanique, s'étendent donc par des ramifications infinies, à la figure de la carene des vaiſſeaux, à leur chargement, à l'art de la manœuvre; & de telles relations, en indiquant ainſi le caractere, les objets & les limites de la mécanique de l'homme de mer, preſcrivent en même tems, tout ce qui doit être diſcuté dans ce traité, c'eſt-à-dire, tous les principes de cette ſcience, dont l'uſage peut être utile ou néceſſaire à la marine.

181. L'ordre méthodique exige que nous conſidérions d'abord, dans un certain état d'abſtraction, les effets poſſibles, iſolés, ou combinés de puiſſances quelconques; c'eſt-à-dire ſans égard à la nature, & de ces puiſſances, & des corps ſur leſquels elles agiſſent. Enſuite nous chercherons ceux que doivent produire les forces phiſiques qui nous ſont connues dans la nature, en faiſant

les applications néceſſaires des premieres conſidérations abſtraites. Il ſera facile alors d'en conclure, en général, (autant que l'état actuel de la ſcience de la mécanique peut le permettre) les effets variés de l'action du vent; les loix, de la réſiſtance, de la preſſion, & de l'impulſion de l'eau; la forme de la carene; & les baſes, de la ſtabilité des vaiſſeaux, ainſi que des autres qualités qui leur ſont eſſentielles, telles que celles de bien marcher, de peu dériver, de gouverner facilement, & de faire des oſcillations douces & régulieres. Il ſera facile auſſi d'indiquer les regles, de l'arrimage, de la mâture, de la voilure, de la figure des ancres; les diſpoſitions les plus avantageuſes de tous les cordages qui ſont partie du gréement, & enfin tous les grands préceptes de l'art, de manœuvrer ou de mouvoir un vaiſſeau, de le diriger, de le gouverner; de modérer ſa vîteſſe progreſſive, de l'altérer, de la détruire; & de produire comme de modifier convenablement toutes ſortes de mouvemens de rotation. C'eſt ainſi par conſéquent, que nous établirons ſolidement les fondemens néceſſaires du traité complet de l'art de la marine.

182. *Des forces en général.* On n'a pu, juſqu'à préſent, parvenir à connoître quelle eſt la nature du mouvement dont les corps nous paroiſſent animés. On ignore comment une vîteſſe quelconque leur eſt communiquée; mais on ſait, que le mouvement exiſte dans l'univers, qu'il eſt varié dans ſa grandeur comme dans ſa direction, qu'il s'altere, qu'il s'éteint, & qu'il reçoit auſſi des accroiſſemens & des diminutions plus ou moins conſidérables, puiſque nous voyons des corps tranſportés dans divers ſens & avec différente vîteſſe, des lieux qu'ils occupent, dans de nouveaux lieux de l'eſpace. Suppoſons donc qu'il eſt dans la nature un mode invariable pour la communication du mouvement; & donnons le nom de *forces* à toutes les cauſes qui peuvent changer l'état des corps. étendons auſſi ce même nom à d'autres cauſes qui ſont capables, ou d'empêcher le mouvement de naître, ou de le retarder par des dégrés plus ou moins ſenſibles. Parmi toutes ces cauſes, il en eſt qui ont en elles-mêmes un principe d'action, & qui ſe déployant ſans obſtacle,

communiquent du mouvement à un corps. Telles ſont la gravité, le vent, les courans, &c. Il en eſt d'autres qui ne ſont que des obſtacles au mouvement, & dont l'exiſtence ainſi que l'énergie ſont abſolument nulles lorſque le mouvement n'a pas lieu. Celles-ci ne tendent qu'à diminuer & à éteindre la vîteſſe des corps, par-tout où elle peut devenir ſenſible. Telles ſont la réſiſtance de l'eau, le frottement, &c.

Si ces dernieres cauſes ont auſſi reçu le nom de *forces*; ſi on leur attribue ce caractere de reſſemblance avec les puiſſances qui ont une énergie propre, c'eſt qu'elles ne peuvent être comparées les unes ainſi que les autres, que par les effets qu'elles produiſent & jamais par l'intenſité de leur action. Cependant il eſt à propos de diſtinguer les dernieres par le titre particulier de *forces motrices*, en donnant aux autres celui de *forces réſiſtantes.*

183. Le mouvement d'un corps ne ſe manifeſte que par ſa tranſlation d'un lieu dans un autre de l'eſpace. Ainſi il ne peut être apprécié qu'en comparant, les poſitions changeantes d'un tel corps, à des points fixes & déterminés. De telles recherches, pour être ſimples, n'auront pas d'abord pour objet, les corps tels que la nature les préſente à nos ſens, mais ſeulement les parties élémentaires des corps. Nous pouvous regarder en effet une maſſe ſolide quelconque comme un aſſemblage de corpuſcules qui ſont, & ſéparables les uns des autres, & ſuſceptibles d'avoir ou un même mouvement, ou une vîteſſe différente; & chaque corpuſcule peut être conſidéré comme l'*unité* qui ſert à meſurer la maſſe d'un corps quelconque.

Dans cet état ſuppoſé des choſes, ſouvenons-nous d'avoir démontré (154) que le lieu d'un point dans l'eſpace eſt indiqué par ſes diſtances à trois lignes, qui perpendiculaires entr'elles, ſe rencontrent en un point commun. Ainſi en comparant un corpuſcule à de telles lignes, on peut juger, par la conſtance, ou par la variation de ſes diſtances à ces *axes*, ſoit de ſon repos, ſoit de ſon mouvement relatif ou réel, ſoit enfin de la direction, comme de la grandeur de la vîteſſe dont il eſt animé.

Si un corpuscule n'a été & n'est sollicité au mouvement par aucune force motrice, il doit être dans un parfait repos, & il doit même y persévérer puisqu'il ne peut de lui-même se donner aucune vîtesse. Alors il ne cesse d'être placé à une même distance de tous les points fixes de l'espace. Mais supposons qu'il soit poussé par une force, qui exerce sur lui une action instantanée, & qui après cette impulsion l'abandonne à lui-même, alors il doit s'avancer progressivement dans l'espace. Il doit changer, de lieu, & de distance aux points fixes environnans. Son mouvement (que de lui-même il ne peut modifier en aucune maniere) doit le porter successivement sur divers points d'une même ligne droite; & il doit parcourir, sur cette ligne, pendant des tems égaux, des parties dont la longueur est la même. Ensuite nulle cause n'étant supposée faire varier cet état de mouvement, parce qu'aucune force nouvelle ne vient agir sur ce corpuscule; sa vîtesse, qui est indiquée par l'espace qu'il parcourt pendant un tems déterminé, doit être constante & n'éprouver aucun changement, soit dans sa grandeur, soit dans sa direction.

La vîtesse, qui est communiquée à un corpuscule par une force instantanée, doit donc être constante, uniforme, & rectiligne; lorsque cet effet n'est contrarié ni par des obstacles, ni par d'autres forces particulieres & incidentes. Remarquons aussi que plus cette vîtesse est rapide, plus aussi est étendu l'espace parcouru par le corpuscule dans un intervalle de temps donné. Ainsi pour comparer les vîtesses des corps, il faut ne considérer leur mouvement que pendant une portion de la durée, telle qu'une seconde, qui sera prise pour *unité*; car alors l'espace parcouru par chaque corpuscule pendant cette unité de tems, dévient une mesure sensible, indicative & commode de la vîtesse de chacun de ces points solides. Représentons par u cette petite partie de l'espace, qui est parcourue dans l'unité de tems, & qui est nommée la vîtesse du corpuscule. Soit aussi e l'espace parcouru pendant un tems t, qui est un nombre d'unités de tems ou de secondes. Alors si on considere que l'uniformité de la vîtesse du corpuscule consiste en ce que la route faite par ce point solide pendant un

tems t, n'eſt autre choſe que celle qu'il fait dans une ſeconde, & qui eſt répétée autant de fois qu'il y a de ſecondes dans t; on eſt conduit à cette proportion, $u : e :: 1 : t$ ainſi $ut = e\,1$; c'eſt à dire que la vîteſſe uniforme d'un corpuſcule eſt toujours égale à l'eſpace qu'il parcourt dans un temps déterminé, multiplié par le rapport de l'unité de tems, au tems donné. Cette égalité convient à toute ſorte de mouvemens uniformes, & ſa généralité permet de comparer enſemble les vîteſſes différentes de corpuſcules égaux. En effet, ſi cette équation, pour le mouvement uniforme d'un certain corpuſcule, eſt repréſenté par $e = ut$, tandis que pour un autre elle eſt $E = VT$; alors on peut dire, $ut : VT :: e : E$. Les eſpaces E & e (parcourus uniformément par deux corpuſcules qui ſont ſollicités au mouvement par des forces motrices différentes) ſont donc dans le rapport composé, & de celui des vîteſſes & de celui des tems employés à parcourir ces eſpaces donnés. C'eſt pourquoi, ſi les tems ſont les mêmes, les eſpaces ſont proportionnels aux vîteſſes; & ſi les eſpaces ſont égaux, les vîteſſes ſont en raiſon inverſe des durées des mouvemens.

C'eſt ainſi qu'un vaiſſeau, dont le ſillage eſt regardé comme uniforme, eſt ſuppoſé s'avancer d'une lieue dans l'eſpace pendant l'intervalle d'une heure, lorſqu'il fait 3 nœuds dans 30″; car alors les intervalles de 30″ & de 60′ ſont proportionnels aux eſpaces qui ſont parcourus avec une vîteſſe uniforme. C'eſt la même raiſon qui autoriſe à comparer les vîteſſes de deux bâtimens par le nombre de nœuds qu'ils filent pendant 30″ de tems, parce qu'alors la durée de leur mouvement eſt ſuppoſée la même.

184. Soit A (fig. 51) le lieu qu'occupoit un corpuſcule au moment où une force motrice inſtantannée a agi ſur lui; & ſoit Ar la ligne droite qu'il a parcourue uniformément à raiſon de cette impulſion pendant un tems donné t. Si cette ligne eſt partagée en autant de parties égales, At, ty, yr, qu'on compte de ſecondes dans t; on voit que le corpuſcule devoit être, au point t à la fin de la 1.re ſeconde; en y à la fin de la 2.e; en r à la fin de la 3.e, & ainſi ſucceſſivement; de ſorte que ſon mouvement, en ſe prolongeant ſans obſtacle, l'auroit tranſ-

porté dans l'eſpace par des pas égaux, d'un point à divers autres plus éloignés ſur la même ligne droite.

Imaginons un plan CDAB ſur lequel eſt tracée cette route A r du corpuſcule & ſuppoſons en A trois lignes perpendiculaires entr'elles, telles que AD, AB & une troiſieme qui ſoit perpendiculaire au plan DABC des deux autres. A meſure que le corpuſcule s'avance ſur Ar, ſa diſtance à chacun des axes ſuppoſés, varie à chaque pas. Eſt-il en t: ſa diſtance à DA eſt ts; & en r, elle eſt rn. A l'égard de AB, cette diſtance eſt d'abord tz, & enſuite r q. Enfin à l'égard de l'axe, qui en A eſt perpendiculaire au plan DABC, elle varie de At, à A r; c'eſt-à-dire, qu'elle eſt alors égale à la route réelle du corpuſcule.

185. Ces diſtances & leurs variations peuvent auſſi être conſidérées ſous un point de vue, autre que celui qui les rend néceſſaires à la détermination du lieu du corpuſcule dans l'eſpace. Car le mouvement de celui-ci ne nous devient ſenſible, que par ſa tranſlation d'un lieu dans un autre. Ainſi on peut dire que le corpuſcule qui de A s'avance en r, & qui en même tems s'éloigne parconſéquent de la quantité rn, à l'égard de l'axe AD, a une vîteſſe rn relativement à ce même axe. La partie rq peut auſſi être regardée comme la meſure de la vîteſſe relative du même corpuſcule à l'égard de AB. D'ailleurs le mouvement réel Ar étant uniforme, les vîteſſes relatives rn & rq, doivent avoir le même caractere d'uniformité; c'eſt-à-dire, que les diſtances du corpuſcule aux axes AD & AB, doivent changer réguliérement & uniformement, comme ſa poſition ſur la ligne Ar, ou comme ſa diſtance à l'axe qui eſt perpendiculaire au plan DABC. En effet à cauſe des triangles ſemblables Ats & Arn, on peut dire At : Ar : : ts : rn : : As : An; mais At: Ar : : $1''$: t; donc ts : rn : : As : An : : $1''$: t. Les variations des diſtances du corpuſcule aux axes AD & AB ſont donc proportionnelles aux tems. Ainſi ſes vîteſſes relatives ſont uniformes comme ſa vîteſſe réelle.

Remarquons que le lieu r qui eſt occupé ſur le plan DABC par ce corpuſcule, à un inſtant de la durée du mouvement, n'exige pour être déterminé, que la connoiſſance

de la vîtesse réelle A*r*, & d'une de ses vîtesses relatives telles que *rn* ou *rq*. Car alors dans le tri-rectangle A*rn*, on peut calculer A*n* ou *rn*, & parconséquent déterminer la distance du corpuscule à deux axes perpendiculaires entr'eux. De même étant données ses vîtesses relatives *rn* & *rq*, on peut en conclure sa vîtesse réelle A*r*. On peut aussi calculer, dans le même triangle avec de pareilles données, l'un ou l'autre des angles *r*A*n* & *nr*A, c'est-à-dire, l'angle que la direction du corpuscule forme avec l'un ou l'autre des axes AD & AB. La direction, & la route uniforme d'un corpuscule, peuvent donc être déterminées, ou en rapportant à trois axes perpendiculaires entr'eux les lieux qu'il occupe successivément dans l'espace, ou en combinant ses vîtesses relatives à l'égard de ces mêmes axes.

Un corpuscule est-il sollicité au mouvement par deux forces directement opposées, dont l'une lui feroit parcourir A*t* dans l'unité de tems, tandis que l'autre seroit capable de le porter de *t* en A en sens contraire : ce corpuscule ne doit pas sortir du lieu où il étoit placé. Car alors il n'y a pas de raison pour qu'il s'avance, dans un sens plutôt que dans un sens contraire. Tout corpuscule qui reçoit au même moment l'impulsion de deux forces égales & directement opposées, doit donc persévérer dans l'état où il étoit avant l'action de ces forces. C'est aussi par la même raison que deux forces inégales, & directement opposées, agissant instantanément sur un corpuscule, ne doivent produire qu'un effet proportionné à la différence des forces motrices. Si au contraire deux ou plusieurs forces agissent dans le même sens & au même instant sur un corpuscule, il est évident que chacune doit produire tout l'effet dont elle est capable, puisqu'elles ne se gênent nullement dans leur action. Ce corpuscule doit donc alors se mouvoir comme s'il eût reçu l'impulsion d'une force unique, qui seroit équivalente aux deux forces particulieres qui lui sont réellement appliquées, ou qui seroit égale à la somme de ces mêmes forces.

186. Imaginons actuellement que deux forces qui agissent instantanément sur un corpuscule, ne soient dirigées, ni dans un même sens ni dans des sens con-

traires, mais ſuivant des lignes qui forment un angle, & telles que les lignes Aq & An (fig. 60). Quelle doit être alors la route de ce point ſolide ? elle ne peut être qu'une ligne droite, ſoit parce que l'impulſion eſt inſtantanée, ſoit parce qu'après l'action ſimultanée des deux forces motrices, le point, abandonné à lui-même, ne peut obéir qu'à l'action unique qui réſulte de la combinaiſon de ces forces. Ce corpuſcule doit donc ſe trouver, après le moment de l'impulſion, dans un état de mouvement quelconque; & comme de lui-même, il ne peut ni altérer ſa vîteſſe, ni l'augmenter, ni varier ſa direction, ce point doit tracer dans l'eſpace une ligne droite, & la parcourir uniformement. Il ne reſte donc qu'à chercher & la direction de cette ligne & ſa longueur, pendant l'unité de tems. Soit A le lieu du corpuſcule lorſqu'il eſt dans l'état de repos; & ſuppoſons qu'il ſoit ſollicité non-ſeulement par une force inſtantanée, qui agiſſant ſeule lui feroit parcourir An dans l'unité de tems, mais auſſi par une autre force qui ſeule le tranſporteroit de A en q dans le même tems. Aucune de ces forces ne tend ainſi à éloigner le corpuſcule d'un plan qu'on imagine paſſer par les lignes An & Aq. Ce point ne peut donc ſe mouvoir que ſur une ligne droite tracée ſur ce même plan. Soit AmT la direction indéfinie de cette ligne. Soit priſe auſſi la même ligne pour un des trois axes perpendiculaires auxquels doit être rapporté le lieu du corpuſcule, après la durée d'une unité de tems; tandis que zp, perpendiculaire à Am, dans le plan nAq eſt choiſi pour être le 2.e de ces axes. Le 3.e eſt une ligne perpendiculaire en A au plan nAq. On voit que ſi le corpuſcule n'eut été ſollicité au mouvement que par la force qui lui eut fait parcourir Aq dans l'unité de tems, il auroit eu, à l'égard de Am, une vîteſſe relative repréſentée par qr ou Ap (en ſuppoſant que qr ſoit une ligne abaiſſée perpendiculairement de q ſur Am) (185). De même ſa vîteſſe relative à l'égard de l'axe Am eut été no ou az, s'il n'eut été ſollicité qu'à tracer la ligne An pendant l'unité de tems. C'eſt pourquoi au moment où les deux forces ſuppoſées agiſſent enſemble ſur le corpuſcule, celui-ci reçoit une tendance à s'éloigner

de Am, 1.° d'une quantité Ap avec une vîteſſe relative dirigée de A en p; & 2.° d'une quantité Az avec une vîteſſe relative dirigée de A en z. Ces deux tendances contraires doivent ſe balancer & ſe détruire mutuellement dans la combinaiſon inſtantannée des deux forces motrices, puiſque le corpuſcule eſt ſuppoſé ſuivre la ligne Am ſans s'en écarter. Ainſi il faut que ces deux tendances ſoient égales, afin qu'il n'y ait pas de raiſon pour que le corpuſcule ſe porte, ſur la droite de Am, plutôt que ſur ſa gauche. La vîteſſe relative, no ou Az = an *ſin.* nAm; & la vîteſſe relative qr ou Ap qui lui eſt égale, eſt exprimée par Aq. *ſin.* qAm. On a donc l'équation néceſſaire, An. *ſin.* nAm = Aq. *ſin.* qAm qui conduit à cette proportion An : Aq :: *ſin.* qAm : *ſin.* nAm. Remarquons qu'une telle proportion eſt celle qu'on feroit dans un parallélogramme qui auroit pour côtés les lignes An, Aq, & pour diagonale Am. On doit donc conclure de cette comparaiſon que la direction de la route d'un corpuſcule, qui eſt ſollicité au mouvement par deux forces inſtantannées, eſt celle de la diagonale d'un parallelograme dont les côtés repréſentent, la direction, & l'effet de chacune des forces motrices, pendant l'unité de tems.

La longueur de la route du corpuſcule (dans le même état des choſes) devient auſſi aiſée à déterminer. Car ſi la force Aq agiſſoit ſeule ſur le corpuſcule qui eſt ſuppoſé en repos en A, elle l'éloigneroit de A ou de l'axe zAp, pendant l'unité de tems, d'une quantité qp ou Ar; & la force An ſeule agiſſante, l'éloigneroit de zAp d'une quantité nz ou Ao. Ce corpuſcule, au moment où la combinaiſon des forces a lieu & où il va commencer à changer d'état, a donc une tendance pour s'éloigner de A non ſeulement d'une quantité Ar, mais auſſi d'une quantité Ao. Ces deux tendances ſont dirigées dans un même ſens; elles concourent enſemble ſans ſe gêner réciproquement; & comme on ne ſuppoſe aucune force étrangere qui puiſſe troubler l'effet réſultant des deux forces An & Aq, il s'enſuit que le corpuſcule doit s'éloigner du point A, ou de l'axe pAz, & qu'il doit parcourir pendant l'unité de tems ſur la direction de la ligne Amt, un eſpace égal à la ſomme (Ao + Ar). Ces deux dernieres lignes forment

ensemble la diagonale entiere Am du parallélogramme déjà cité. Car les triangles mno & rAq sont égaux, comme ayant, des côtés égaux Aq & nm, ainsi que des angles égaux chacun à chacun; mo est donc une ligne égale à Ar. C'est pourquoi, en réunissant ces résultats, la diagonale Am représente non seulement la direction, mais aussi la longueur de la route qui est parcourue pendant l'unité de tems, par un corpuscule; lorsque celui-ci est sollicité au même moment par deux forces motrices, qui séparément le transporteroient, l'une de A en q & l'autre de A en n, pendant la même unité de tems.

Le corpuscule supposé se meut donc, comme s'il étoit sollicité par une force motrice unique qui seroit capable de lui donner une vîtesse Am. On peut, donc à la considération de deux forces composantes An & Aq, substituer celle de leur résultante Am; & réciproquement on peut décomposer au besoin une force telle que Am, en deux forces partielles, telles que Aq & An, inclinées l'une à l'autre sous un angle quelconque nAq. Plusieurs forces dont les directions seroient placées dans un même plan peuvent donc être réduites aussi à une seule force résultante, en les combinant successivement les unes avec les autres, d'après la théorie précédente.

187. La composition & la décomposition des forces peuvent être variées a l'infini; mais dans tous les cas, il y a des rapports déterminés entre deux forces composantes & leur résultante. Car on a toujours cette suite de rapports égaux Am : Aq : An :: $\sin.$ Anm ou $\sin.\ n$Aq : $\sin\ n$Am : $\sin.\ m$Aq. Nommons a, b, & c, les angles nAq, nAm, mAq, on peut dire (A) Am : Aq : An :: $\sin. a : \sin. b : \sin. c$. On sait d'ailleurs que (118) $\sin. a = 2 \sin. \frac{1}{2} a \cos. \frac{1}{2} a$; que $\sin. b + \sin. c = 2 \sin. \frac{1}{2} (b + c) \cos. \frac{1}{2} (c - b)$ & que $\sin. c - \sin. b = 2 \sin. \frac{1}{2} (c - b) \cos. \frac{1}{2} (b + c)$; cette proportion conduit donc à la suivante, Aq + An : $\sin. b + \sin. c$ :: Am : $\sin. a$; ou (B) Am : Aq + An :: $\cos. \frac{1}{2} a : \cos. \frac{1}{2} (c - b)$; parce que $(c + b) = a$. On peut dire aussi (C) Am : An — Aq :: $\sin. \frac{1}{2} a : \sin. \frac{1}{2} (c - b)$.

C'est à l'aide de ces proportions qu'on peut déterminer l'une de ces forces, & sa direction, lorsque les données sont suffisantes. Elles font voir aussi que les forces com-

posantes, concourant à pousser un corpuscule dans le même sens, ou sur une même direction, leur résultante est alors comme on l'a dit (185) égale à la somme des composantes. Car alors dans la proportion, $a = o$ ainsi que c, b, & la différence $c - b$ de ces angles. On en conclut donc que $\text{A}m = \text{A}n + \text{A}q$.

Si les forces composantes sont directement contraires; c'est à dire si l'une tend à pousser le corpuscule de A en z, & l'autre de A en p, alors l'angle $a = 180^\circ$. Le corpuscule ne peut donc, dans ce cas, se mouvoir, ni à droite, ni à gauche de la ligne $z\text{A}p$ des directions des forces motrices, mais seulement dans le sens de la plus grande des composantes; ainsi $c - b = 180^\circ = a$; & la proportion (C) fait voir alors que $\text{A}m = \text{A}n - \text{A}q$. La résultante est donc nulle, lorsque les deux composantes sont égales; ou elle est représentée par leur différence si elles sont inégales.

Deux forces composantes, suivant ces proportions, produisent d'ailleurs un effet $\text{A}m$, d'autant plus différent de la somme ($An + Aq$) qu'elles approchent plus de l'égalité, en supposant que la valeur de a ne soit ni nulle ni de 180°; car dans le cas où elles sont égales, $b = c$, ou $cos. \frac{1}{2} (c - b) = I$ & dans tout autre cas, ce cosinus est plus petit que le rayon. Enfin la direction de la résultante Am, dans le premier cas, partage l'angle a en deux parties égales.

188. D'autres rapports lient encore ensemble, & les deux forces composantes dont les directions sont inclinées l'une à l'autre, & la force qui résulte de leur combinaison. Nous avons dit qu'un corpuscule qui est sollicité par une force motrice instantanée, à parcourir $\text{A}q$ dans l'unité de tems, ne peut lui obéir sans s'éloigner, d'une ligne $\text{A}m$ donnée dans l'espace, à une distance qr. Mais si on compare le corpuscule sur chaque point d'une telle route $\text{A}q$ avec un point tel que u, par exemple; sa distance au point u varie sans cesse pendant ce mouvement, & il est un instant où elle est la plus petite, c'est-à-dire, un *minimum*. Cet instant est celui où le corpuscule se trouve sur l'extrémité i, d'une ligne ui abaissée perpendiculairement de u sur $\text{A}q$ (95). Si du même point u,

on abaisse aussi des perpendiculaires, l'une us sur An, & l'autre up sur Am; on voit que ce corpuscule, n'obéissant uniquement qu'à l'une où l'autre des forces Am ou An, ne s'approcheroit jamais de u dans son mouvement, à une distance plus petite que les lignes us & up. Nommons ces distances s, p; & représentons par i la distance ui. Nous allons démontrer qu'elles sont toujours telles qu'en les multipliant par les lignes respectives, An, Am, Aq, (qui représentent les effets des forces composantes & résultantes, dans l'unité de tems) on a toujours l'équation $(s.\ An + i.\ Aq) = p.\ Am$. En effet soit menée la ligne Au nommée d, qui fait avec Aq, un angle uAq nommé o. Alors l'angle $uAm = (o + c$ & l'angle $uAn = (o + a)$. Les divers triangles iuA, puA, suA, donnent les valeurs suivantes $i = d.\ sin.\ o$; $p. = d.\ sin.\ (o + c)$; & $s = d.\ sin.\ (o + a)$. Soient multipliées, la 1.re par Aq; la 2.e par Am; & la 3.e par An, on peut dire alors que, $Aq.\ i + An.\ s - Am.\ p = Aq.\ d.\ sin.\ o + An.\ d.\ sin.\ (o + a) - Am.\ d.\ sin.\ (o + c)$ (118). Mais on a vu que (187) $Am.\ sin.\ c = An.\ sin.\ a$; ainsi l'équation précédente se réduit à, $Aq.\ i + An.\ s. - Am.\ p = d.\ sin.\ o\ (Aq + An.\ cos.\ a - Am.\ cos.\ c)$. Abaissons des points n & m, des lignes perpendiculaires sur Aq, telles que nf & mz; alors on forme des triangles Anf & Amz, dans lesquels $Af = An\ cos.\ a$, & $Az = Am.\ cos.\ c.$ d'ailleurs en comparant les triangles Anf & mqz qui sont égaux (comme ayant un côté égal adjacent à deux angles égaux) on en conclut que $Af = qz$. Substituant enfin ces valeurs dans la derniere équation, il en résulte que $Aq.\ i + An.\ s - Am.p = d.\ sin.\ o\ (Aq + Af - (Aq + Af)) = o$; ou $Aq.i + An.s = Am.p$ (D). La somme des produits, de chaque force composante multipliée par la distance du point donné à sa direction, est donc égale à celui de la force résultante multipliée par la distance de sa direction au même point. Donnons à chacun de ces produits, le nom de *moment* de la force à laquelle il est relatif, & on voit que ces momens doivent varier comme la position du point u qui sert de terme de comparaison. Remarquons que si ce point u est placé dans l'angle mAq alors la ligne ui est dirigée sur Aq, dans un

sens opposé à celui où nous venons de la considérer. Cette ligne devroit donc avoir alors un signe contraire dans l'équation générale (D) qui deviendroit ainsi, $An. S - Aq. i = Am. p$. car les autres perpendiculaires *us* & *up*, ne changeroient pas de position. Si *u* est situé dans l'angle *nAm*, alors les lignes *up* & *ui*, changent de direction & par conséquent de signe. C'est pourquoi l'équation (D) est alors $Aq. i - An. S = Am. p$. Enfin le point *u* est-il placé sur la direction d'une des forces composante ou résultante, le moment d'une telle force doit être nul à l'égard de *u*. Ainsi soit *u* sur la ligne *Am*, on doit avoir l'équation, $An. S = Aq. i$. C'est à dire que les momens des deux composantes, à l'égard d'un point quelconque de la direction de leur résultante, sont toujours égaux. *u* est-il sur *Aq*, le moment de la force *Aq* devient nul, & on a $An. S = Am. p$. Enfin si *u* étoit sur *An*, on diroit que $Aq. i = Am. p$.

189. Les forces composantes *An* & *Aq*, sont-elles parallelles entr'elles ; l'angle *nAq* devient nul, & leur résultante *Am* (comme on l'a vu) est alors égale, on a la somme ($An + Aq$) des composantes, si celles-ci sont dirigées dans le même sens, on a leur différence si leurs directions sont contraires. Nous devons aussi établir, entre les momens des forces paralleles comparées, des rapports fondés sur les démonstrations relatives aux forces composante ou résultante, qui sont inclinées entr'elles. Remarquons dans cette application, que les perpendiculaires abaissées d'un point tel que *u*, sur les directions de deux forces paralleles, sont alors placées sur une seule & même ligne. Représentons par *ri* & *fl* (*fig. 61*) les directions de deux forces paralleles & composantes *i* & *l*; & par *z*S celle de leur résultante S. Cherchons le lieu de cette derniere. Si du point *k* on mene une ligne *kr*, perpendiculaire aux directions *ri* & *fl*, on doit dire $i. kr + l. kf = (i + l)\, p$. Si on eut choisi un autre point *c* éloigné comme *k*, de *ri* & *lf*; on auroit eu $i. ci + l. cl = (i + l)\, P$ (en nommant *p* & P les distances de la résultante ($i+l$) à *k* & *c*). Mais d'après ces deux équations $p = P$, puisque $ci = kr$, & $cl = kf$; ainsi la résultante de deux forces paralleles est parallele à celles-ci. Comme

les compoſantes ſont ſuppoſées ici, agir dans le même ſens, & qu'on peut changer l'équation précédente en celle-ci $(i+l)\ kf+i.\ fr=(i+l)\ zk$, le point z par lequel paſſe la réſultante, eſt ſitué néceſſairement dans l'intervalle qui ſépare les directions des forces compoſantes. Deux forces paralleles ſont-elles dirigées en ſens contraire; l'une ſuivant sz, & l'autre ſuivant fm, leur réſultante nommée R (qui eſt égale à la différence des forces sz & fm nommées z & m) doit auſſi leur être parallele, & ſa direction paſſe à une diſtance x du point k, qui eſt indiquée par l'équation $z.\ zk-m.\ fk=\text{R}.\ x=(z-m)\ x$, ou $(z-m)\ fk+z.\ zf=(z-m)\ x$. La diſtance x eſt donc plus grande que la ſomme des lignes $(fk+zf)$. La réſultante R n'eſt donc pas placée, comme dans les cas précédens, dans l'intervalle qui ſépare les compoſantes, mais au delà de cet eſpace, comme en r, & du côté de la plus grande compoſante. D'ailleurs il eſt à propos de remarquer que puiſque $\text{R}=z-m$, il s'enſuit que $z=\text{R}+m$; ou que la compoſante z eſt plus grande alors que R, de toute la valeur de la compoſante oppoſée m.

190. Tous ces détails, ces rapports, ces réſultats ſont de la plus haute importance; on peut en faire un uſage fréquent en exerçant l'art de la marine; ainſi il eſt bon de placer ici quelques réflexions générales qui peuvent faciliter les applications de cette théorie.

Quelque ſoit la direction d'une force qui ſollicite un corpuſcule au mouvement, on peut toujours la décompoſer, en trois forces paralleles à trois axes perpendiculaires entr'eux, chacune à chacun. Car ſoit ai, la direction d'une force donnée (fig. 36) & ſoient NC, DC, & CE, les trois axes qui ſervent de termes de comparaiſon. Si on abaiſſe de a, une perpendiculaire ao ſur le plan DCEB de deux de ces axes; ſi on mene auſſi la ligne io; la force repréſentée par ai, peut être décompoſée en deux forces partielles repréſentées par ao & ai. La premiere eſt parallele à l'arc NC, & la ſeconde peut être encore décompoſée en deux forces partielles ib & iz qui ſont paralleles, l'une à l'axe CE, & l'autre à DC. Ainſi une force motrice dirigée d'une maniere quelconque

peut être regardée comme la résultante de trois forces, qui ſont paralleles à trois axes perpendiculaires entr'eux.

Ajoutons à ces conſidérations, que deux forces ayant des directions qui ſeroient perpendiculaires entr'elles, ne pouroient ni ſe nuire, ni ſe favoriſer dans leur action. En effet un corpuſcule n'eſt-il ſollicité au mouvement que par l'une de ces forces, il n'en reçoit aucune tendance à ſe mouvoir ou à s'avancer ſur la ligne qui indique la direction de la ſeconde force. La vîteſſe que celle-ci tend à lui communiquer, ne peut donc être augmentée ni diminuée par l'action de la premiere, & réciproquement. La poſition d'un corpuſcule dans l'eſpace, après un certain tems, peut donc être déterminée, en calculant ſucceſſivement ſa diſtance à chacun de trois axes ſuppoſés d'après l'effet particulier que peut produire chaque force perpendiculaire à chacun des axes. On peut donc dire auſſi qu'un tel corpuſcule ſollicité par pluſieurs forces ne peut reſter dans l'état de repos, qu'autant que les forces compoſantes qui le ſollicitent parallélement à chacun des axes, ſe détruiſent mutuellement & ſéparement. S'il faut donc calculer les effets que produiſent ſur un corpuſcule les actions de diverſes forces qui lui ſont appliquées ſous des directions quelcônques, il ſuffit de décompoſer chacune de ces forces en trois autres qui ſoient perpendiculaires entr'elles, ou à trois axes, & de conſidérer ſéparement celles qui ſont paralleles à un de ces axes, indépendamment de celles qui le ſont aux deux autres axes. Les trois réſultantes qu'on obtient ainſi font connoître l'état réél du corps, lorſqu'il obéit à ces forces combinées enſemble. Par de tels moyens on ſimplifie la recherche de la route d'un corpuſcule dans l'eſpace; & on détermine facilement les changemens qu'éprouvent ſes diſtances à trois axes, quelque puiſſe être le nombre des forces qui produiſent ſa vîteſſe.

191. Juſqu'à preſent nous n'avons conſidéré qu'un ſeul corpuſcule ſollicité au mouvement, & il reſte à connoître l'effet des forces motrices, ſur un corps ſolide, ou ſur l'aſſemblage de pluſieurs corpuſcules qui ſont liés invariablement les uns aux autres.

Quelque puiſſe être l'organiſation d'un corps, on peut toujours

toujours imaginer que dans l'intérieur de sa masse, il y a un point autour duquel ses parties matérielles sont disposées réguliérement ou dans un ordre tel, qu'en faisant passer par ce point un plan quelconque, la somme des momens des masses partielles & élémentaires, qui sont d'un même côté (à l'égard d'un tel plan) est égale à celle des momens des autres masses élémentaires qui sont placées du côté opposé, relativement au plan supposé. C'est un tel point, qui dans les corps pesans est nommé le centre de gravité, & qui recevra ici le nom de *centre de masse*. (On entend par le moment d'un corpuscule, à l'égard d'un plan donné, le produit de la masse de ce corpuscule multipliée par sa distance à ce plan).

192. Supposons pour un instant, que les parties intégrantes d'un corps soient toutes réunies à son centre de masse. Si alors cet assemblage est sollicité au mouvement par une force F appliquée immédiatement au point central; si cette force d'ailleurs n'est capable que de communiquer une vitesse V à un corpuscule m; ce corps entier, qui est composé d'un nombre nm de corpuscules égaux, & dont la masse est $M = nm$, ne peut pas sous l'impulsion de F prendre une vîtesse aussi grande que V. Il faut alors que la force F se partage entre tous les corpuscules m, qui sont supposés réunis, ensemble, & inséparablement, au point central. Comme d'ailleurs aucune raison ne peut porter à penser qu'un tel partage puisse être inégal, il s'ensuit, que la vîtesse particuliere u de chacun de ces corpuscules doit être la même, & que l'infériorité de u, à l'égard de V, doit être dans le rapport de m à nm ou M. On doit donc dire $V : u :: nm : m$: ainsi $mV = Mu$. Déjà nous avons dit que la force F ne peut être déterminée & mesurée que par l'effet qu'elle peut produire; c'est pourquoi l'énergie de cette force doit être proportionnelle, non seulement au degré de vîtesse qu'elle communique à un corps, mais aussi à la grandeur de la masse du corps qu'elle met en mouvement. L'expression de cette force F est donc la quantité mV ou celle Mu qui est égale à la premiere.

Considérons cette force F, comme s'étant consumée entiérement à produire le mouvement du corps M, alors celui-ci, animé de la vitesse u qui lui est communiquée,

semble avoir reçu une puissance qui le rend capable d'agir lui-même avec un effort, égal à la force qui lui a été totalement transmise. Sous ce point de vue, cette force potentielle d'un corps en mouvement, doit donc aussi être représentée par Mu; & c'est par cette raison qu'on donne le nom de *force d'un corps*, ou de *quantité de mouvement*, au produit de la masse M de ce corps, multipliée par la vîtesse commune u de chacune de ses parties intégrantes.

193. Supposons que, dans un tel corps, les parties élémentaires qui viennent d'être envisagées comme réunies en un point central, soient disposées réguliérement autour de ce même point à diverses distances; & de maniere que celui-ci ne cesse pas d'être le centre de masse de leur assemblage, quelque puisse être son organisation. Dans cet état des choses, les parties du systême sont aussi supposeés être liées ensemble indissolublement; & même on pourroit regarder comme égaux, leurs momens (comparés deux à deux) à l'égard du centre de masse. Ce corps inflexible est-il sollicité au mouvement par une force instantannée F qui est appliquée sur un quelconque de ses élémens? Les parties de ce corps, quelque soit leur vîtesse particuliere, doivent conserver les mêmes distances respectives, soit entr'elles, soit à l'égard du centre de masse, puisqu'elles ne peuvent être séparées les unes des autres. C'est pourquoi le mouvement de ces diverses parties, est-il dirigé sur des lignes paralleles, la même vîtesse progressive doit animer chacun de ces élémens ainsi que le centre de masse; & si leur vîtesse est différente, ils peuvent chacun être regardés comme ayant deux vîtesses partielles, (186) dont l'une progressive, seroit parallele à la direction de la force motrice F; & dont l'autre, emportant chaque élément, le feroit tourner autour d'un axe qui dirigé par le centre de masse feroit perpendiculaire au plan où se trouvent, & le centre, & la direction de F. Un tel corps, ainsi que ses éléments, obéissant à l'action de F, peuvent donc être considérés comme ayant un mouvement progressif parallele à celui du centre de masse, & un mouvement de rotation autour d'un axe qui passe par ce centre. La roideur du corps, ou l'inaltérable liai-

ſon de ſes parties exige même que la vîteſſe progreſſive de chaque élément ſoit parfaitement la même, & que leur vîteſſe de rotation ſoit proportionnelle à leur diſtance à l'axe indiqué.

Après ces conſidérations générales, ſoit *ri* (*fig.* 61) la direction de la force F qui eſt appliquée dans le ſens *ri* au point *i* d'un corps M dont le centre de maſſe eſt *z*. Cherchons les effets qu'elle peut produire ſur ce corps, c'eſt à dire les vîteſſes progreſſive & gyratoire qu'elle lui communique. Suppoſons-la compoſée de petites forces *f*, qui ſoient, en même nombre *n*, que les parties élémentaires *m* du corps M; de ſorte que $F = nf$ comme $M = nm$; & de ſorte que ſi le corps eſt diviſé en petites maſſes partielles *bm*, *am*, *qm*, &c, la force F ſoit auſſi regardée comme partagée en petites forces telles que *bf*, *af*, *qf*, *&c.*

194. Conſidérons dans F une partie *bf*, & partageons-la en deux parties égales. Décompoſons enſuite $\frac{1}{2}bf$ en deux forces paralleles, dont l'une dirigée ſuivant *fl* ſoit appliquée en *l* à une maſſe partielle *bm* du corps M, & dont l'autre eſt dirigée en ſens contraire, & ſuivant *ck*, qui eſt auſſi éloignée que *ri*, de *fl*. Soit menée la ligne *kr* perpendiculaire à *ri*; on peut déterminer la force partielle L qui agit en *l*, en diſant $\frac{1}{2}bf : L :: fk : rk :: 1 : 2$; ainſi $L = bf$. Le corpuſcule *bm*, qui eſt en *l*, eſt donc ſollicité au mouvement par une force qui eſt proportionnelle à ſa maſſe.

La décompoſition de la partie *bf* de la force F appliquée en *r* la rend donc équivalente à trois forces paralleles. La premiere eſt celle dont on vient de parler & qui, égale à *bf*, agit ſuivant *fl* ſur *bm*. La 2e. $= \frac{1}{2}bf$ & elle agit en *i* dans le ſens *ri*; la troiſieme $= \frac{1}{2}bf$ eſt dirigée ſuivant *ck*, ou dans une direction contraire à celle des deux premieres. L'oppoſition de ces deux dernieres, leur égalité, & leur parallélisme, démontrent ainſi la nullité abſolue de leur réſultante, (187), ainſi elles ne peuvent donner aucun mouvement progreſſif ou parallele à *ri*, ni à une ligne *kr* qu'on peut regarder comme une verge inflexible qui unit les points d'application de ces forces, ni au corps auquel cette ligne peut être conſidérée comme liée indiſſolublement. Mais ces deux forces

composantes, qui ne sont pas, directement opposées, ou qui sont appliquées dans des points différents du corps tels que r & k, tendent à faire tourner ce corps. Cette rotation ne doit même avoir lieu qu'autour du centre z ou d'un axe qui dirigé par ce centre est perpendiculaire au plan riz, parce que les parties de ce corps inflexible doivent conserver les mêmes distances, & entr'elles, & à cet axe, & au centre z. Par la même raison, la composante bf qui agit sur la partie bm ou sur le point f de la verge inflexible kr, tendent aussi à faire tourner ce corps autour du même axe, mais dans un sens contraire à l'effet des deux autres composantes, & son moment à l'égard de cet axe est $bf.zf$. Les moments des deux autres forces sont $\frac{1}{2} bf.zr$ & $\frac{1}{2} bf.kz$ la somme de ces momens qui se combinent pour produire la rotation du corps, & qu'on trouve en retranchant, celui qui tend à faire tourner le corps dans un sens, de ceux qui sollicitent le corps en sens contraire, se réduit à, $\frac{1}{2} bf\,(zr+kz) - bf.zf = bf.zr$. Si ce corps n'étoit donc sollicité que par une force bf appliquée en un point différent de z, sa rotation seroit produite par une force dont le moment est $bf.zr$, & quoique cette force ne soit appliquée qu'à un point de la verge inflexible kr, cette verge & ses points, ne peuvent tourner autour de z, sans entraîner le point l ou la partie bm dans le même mouvement à cause de leur intime liaison.

195. Si on fait les mêmes raisonnemens pour un autre élément am du corps, on doit trouver, que sa vîtesse progressive paralelle à ri, est due à une force partielle af qui est proportionnelle à sa masse; & que le corps doit être sollicité à se mouvoir autour de l'axe indiqué de rotation, par une force dont le moment est $af.zr$; de sorte qu'en étendant cette théorie à tous les éléments du corps inflexible M; on doit voir que la force motrice F agissant sur ce corps lui communique un mouvement de rotation qui est proportionnel au moment $nf.zr = F.zr$; c'est à dire au produit de cette force par sa distance au centre de masse z.

196. Quant à la vîtesse progressive que doivent prendre & ce corps, & chacune de ses parties, sous l'impulsion

instantannée de F; elle est telle que les distances respectives de ces parties ne peuvent être altérées. En effet supposons que les parties *bm* & *am* eussent été, libres, & sollicitées, par des forces proportionnelles à leur masse, telles que *bf*, *af*, à prendre l'une une vîtesse *u* & l'autre une vîtesse V, on auroit eu les équations (192) $bmu = bf$, & $amV = af$. On auroit donc pu dire $af : bf :: am\ V : bmu$; mais, $af : bf :: am : bm$, ainsi $u = V$. La vîtesse de *am* auroit donc été égale, à celle de *bm*, ainsi qu'à celle de toute autre partie du corps *m*. puisque ces parties, étant libres & sollicitées par des forces proportionelles à leur masse, se seroient mues avec une égale vîtesse progressive; il s'ensuit que liées indissolublement entr'elles, elles doivent aussi, sous la même impulsion, se mouvoir progressivement comme si elles étoient indépendantes les unes des autres. Car alors elles ne peuvent ni se gêner dans leurs mouvements, ni tendre à changer leurs distances réciproques. On doit aussi en conclure que $nmau = naf$ ou que $Mu = F$ (192). On voit par conséquent qu'un corps inflexible M qui est sollicité par une force instantanée F excentrique reçoit la même vîtesse progressive qui lui auroit été communiquée, si cette force F eut été immédiatement appliquée au centre de masse *z*, & si toutes les parties de ce corps eussent été réunies dans ce point central. Ainsi lorsqu'une force motrice & instantanée, est appliquée à un point quelconque [différent du centre de masse] d'un corps; on peut déterminer la vîtesse progressive de celui-ci, ou de son centre de masse, en considérant cette force comme agissant immédiatement sur ce centre. Celui-ci doit donc se mouvoir (183) comme on l'a dit précédemment, non seulement avec uniformité, mais aussi sur une ligne parallele à la direction de la force.

Cette force est-elle excentrique, ou sa direction ne passe-t-elle pas par le centre de masse, on voit aussi qu'elle fait prendre au corps M, en outre d'une vîtesse progressive, une vîtesse de rotation autour d'un axe qui, dirigé par le centre de masse, est perpendiculaire au plan où se trouvent & ce centre & la direction de la force. Elle fait naître d'ailleurs ce dernier mouvement en agissant avec un moment qui est le produit de cette force par sa

diſtance au centre de maſſe. Il s'enſuit donc que la direction de F paſſant par ce centre, le corps ne peut tendre alors à tourner ſur lui-même, & il ne prend qu'une ſimple vîteſſe progreſſive. Ces deux mouvemens, l'un progreſſif & l'autre gyratoire, peuvent donc exiſter & être conſidérés, l'un indépendamment de l'autre, dans un ſeul & même corps libre. En effet, un tel corps, ſous l'impulſion d'une force excentrique F, a-t-il reçu ce double mouvement, le progreſſif peut être anéanti par une force S=F qui ſeroit appliquée en ſens contraire au centre de maſſe, ſans que la vîteſſe de rotation éprouve aucune altération. Celle-ci peut auſſi être détruite ſans cauſer aucun changement dans la vîteſſe progreſſive, par l'action ſimultanée de deux forces contraires S, qui ſeroient chacune égale à F, & qui ſeroient appliquées, l'une au centre de maſſe & l'autre à une diſtance de ce centre égale à celle, de la force F contre laquelle elle agiroit en ſens oppoſé. C'eſt pourquoi lorſqu'il s'agit par conſéquent de déterminer les effets d'une force F ſur un corps, on peut calculer ſéparément, & la vîteſſe progreſſive du centre de maſſe comme ſi le corps ne tournoit pas, & celle de rotation du corps autour d'un axe qui paſſe par ce centre, comme ſi cet axe étoit fixe.

197. Nous avons dit plus haut comment on détermine (ſans avoir égard au mouvement de rotation du corps ſur lui-même) la vîteſſe progreſſive qu'une force F peut communiquer à ſon centre de maſſe; il reſte donc à indiquer la vîteſſe particuliere de rotation qui peut être imprimée par la même force F à chaque élément du corps M autour d'un axe A qui paſſe par le centre de maſſe (en ſuppoſant celui-ci immobile).

Un élément m d'un tel corps décrit dans l'unité de temps, autour de A, un arc, qui par ſa longueur devient la meſure de ſa vîteſſe, & qui a pour rayon la diſtance de m à l'axe A de rotation. Donnons le nom de *vîteſſe angulaire* du corps à celle d'un élément m qui eſt éloigné de A, à une diſtance que nous regarderons comme l'unité de diſtance; & déſignons, cette vîteſſe par R, & cette diſtance par 1. Alors la vîteſſe de rotation r, de tout autre élément m, qui eſt placé à une diſtance s de A;

& la vîteſſe R, doivent être proportionnelles aux rayons des arcs décrits en même temps par les deux élémens ſuppoſés (115). On peut donc dire $r : R :: s : 1$ ou $Rs = r$, & $mr = mRs$. Mais mr repreſente la force partielle qui feroit capable de donner à m une vîteſſe r, ainſi le moment de cette force à l'égard de A eſt $mrs = mRs^2$. En raiſonnant de même ſur la rotation de tous les éléments de M, on doit trouver que la ſomme des momens des forces partielles qui appliquées à chaque élément communiqueroient directement à chacun ſa vîteſſe initiale de rotation, eſt égale au produit de la vîteſſe angulaire R du corps, multipliée par la ſomme des produits de chaque partie de ce corps par le quarré de ſa diſtance à l'axe A de rotation. Repréſentons par MB^2 la ſomme de ces derniers produits, & déſignons-la par le nom de *moment d'inertie* du corps M à l'égard de l'axe A de rotation. Remarquons auſſi que la ſomme des momens des forces partielles (qu'on a regardées comme appliquées ſéparément à chaque élément pour le ſolliciter à tourner autour de A) doit être égale, au moment de la réſultante de ces mêmes forces, ou à celui de la force F qui produit la rotation du corps. C'eſt pourquoi D étant la diſtance de F à l'axe A, on a l'équation, $FD = RMB^2$. On voit donc que pour déterminer la vîteſſe angulaire d'un corps qui eſt ſollicité au mouvement par une force F excentrique, il faut chercher 1° le moment de cette force, & 2° le moment d'inertie du corps à l'égard d'un axe qui paſſant par le centre de maſſe eſt perpendiculaire au plan où ſe trouvent & ce centre & la direction de F. Enſuite on diviſe le 1er de ces momens par le ſecond, & le quotient eſt la valeur de R.

198. Puiſqu'une force excentrique F qui ſollicite un corps au mouvement, communique à chacun de ſes élémens une vîteſſe progreſſive u, & une vîteſſe de rotation r, autour d'un axe A du centre de maſſe; il doit donc y avoir dans l'eſpace, à l'intérieur, ou à l'extérieur de ce corps, un point à l'égard duquel, les élémens du corps, dans leur double mouvement ne changent pas de diſtance pendant l'unité de tems. Ce point, quelque part qu'il ſoit placé, peut être conſidéré comme lié au corps

par une ligne immatérielle; & ſa ſituation doit être telle, qu'en participant au double mouvement communiqué à ce corps, il tende à s'avancer dans un ſens, en raiſon de ſa vîteſſe progreſſive, autant qu'il eſt entraîné en ſens contraire par ſa vîteſſe de rotation. C'eſt au milieu de cette contrariété d'impulſions qu'un tel point, doit reſter néceſſairement en repos, & paroître le centre autour duquel le corps tourne librement, comme à l'égard d'un point fixe, pendant l'unité du temps. Un tel point, par cette raiſon a reçu le nom de *centre ſpontané de rotation*. Soit P ſa diſtance à l'axe de rotation; & repréſentons par e la vîteſſe de rotation qui lui eſt communiquée, on a (197) $e = RP = u$ (parce que les vîteſſes u & e doivent être égales & contraires pour produire le repos du centre ſpontané dont nous cherchons la diſtance P). Subſtituons, dans l'équation $RMB^2 = FD$, la valeur de F qui eſt mu; & dans celle-ci la valeur de u qui eſt RP, on aura cette derniere équation $RMB^2 = MuD = MD.RP$; ou $MB^2 = MDP$. On en conclut que $P:1::MB^2:MD$; & c'eſt cette proportion qui ſert ainſi à determiner la diſtance P du centre de maſſe à l'axe ſpontané de rotation, ou à l'axe autour duquel le corps ſemble tourner de lui-même & librement.

199. Si une nouvelle force q agiſſoit ſur le même corps & à une diſtance d du centre de maſſe, on diroit auſſi $p:1::MB^2:MD$, (en nommant p la diſtance du centre de maſſe au nouvel axe ſpontané de rotation). Ainſi en comparant cette proportion à la précédente, on peut dire $P:p::Md:MD::d:D$. On voit donc qu'un corps étant ſollicité au mouvement, ſucceſſivement par deux forces différentes qui ne ſont dirigées, ni ſur le centre de maſſe, ni ſur un même point, les centres ſpontanés de rotation, dans les deux cas, ſont placés à l'égard du centre de maſſe, à des diſtances, qui ſont réciproquement proportionnelles aux diſtances des forces motrices.

200. Si pluſieurs forces ſollicitent enſemble au mouvement, un corps ſolide & par divers points qui ſoient différens du centre de maſſe, l'action de chacune tend à produire deux effets diſtincts ſur ce corps, une vîteſſe progreſſive, & une vîteſſe de rotation autour du centre de maſſe. La vîteſſe progreſſive que ce centre

reçoit de la réunion ou de la combinaiſon de ces forces eſt celle qui lui ſeroit communiquée par ces mêmes forces, ſi elles lui étoient immédiatement appliquées, ſuivant leur propre direction. Quant à la recherche de la vîteſſe angulaire R d'un tel corps autour de ſon centre de maſſe, elle devient facile après ce qui a été dit précédemment (197) ſur l'effet d'une force unique F qui eſt excentrique. Car ſuppoſons, pour un moment, qu'il ſoit prouvé que des forces motrices qui agiſſent ſur un corps, (quelque ſoient, leur nombre, leur direction, & leur énergie) ſe réduiſent toutes à deux ſeules forces, dont l'une eſt dirigée par le centre de maſſe, & dont l'autre ne paſſe pas par ce centre. Alors nommons, *C* la réſultante des forces compoſantes & *centrales*, ou qui paſſent par z; & E la réſultante des autres forces compoſantes & excentriques. Le moment de *C* à l'égard du centre & de l'axe de rotation eſt néceſſairement nul : & comme le moment d'une force doit être égale à la ſomme des momens de ſes compoſantes, le moment de chaque force motrice ſuppoſée, doit être uniquement égal à celui de ſa compoſante excentrique. Il s'enſuit donc que le moment de la réſultante E, qui doit auſſi être égal à la ſomme des momens de toutes les forces compoſantes excentriques, équivaut à la ſomme des momens de toutes les forces motrices à l'égard du centre de maſſe. (On entend, & on entendra déſormais que la ſomme de ces momens eſt formée, & par l'addition de ceux des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens, & par la ſouſtraction des momens des forces qui ſollicitent le même corps en ſens contraire). C'eſt pourquoi la vîteſſe angulaire R qu'un corps M eſt ſollicité à prendre autour d'un axe A qui paſſe par le centre de maſſe z, en vertu de l'action de pluſieurs forces excentriques, doit être déterminée par l'équation $R.MA^2 = ED$; en repréſentant par ED, la ſomme des momens de toutes les forces motrices, & par MA^2 le moment d'inertie du corps M à l'égard de l'axe A de rotation.

201. Démontrons actuellement la propoſition ſuppoſée. Soit z (fig. 77) le centre de maſſe d'un corps qui eſt ſollicité au mouvement par une force dirigée ſuivant *xd*. Imaginons auſſi une ligne arbitraire zi, & un plan ABCD,

qui passe par un point *d* de la direction *xd*, de maniere que *zi* soit perpendiculaire à ce même plan. Alors soit décomposée la force représentée par *xd* en deux autres, dont l'une *de* soit parallele a *zi* & dont l'autre *dg*, soit située dans le plan *AC*. Si par le point *i* on fait passer un autre plan auquel *zi* soit perpendiculaire ; & si on mene une ligne *zdl* par le centre de masse & par le point *d* qui est l'interjection de *xd* avec le plan AC ; la composante *de* peut être elle-même décomposée en deux autres forces paralleles *ln* & *z b*. De même la 2[e] composante *dg* peut l'être aussi en deux forces paralleles *lm* & *zc*. Si on raisonne également sur chaque force motrice qui sollicite un corps M au mouvement & dont la direction traverse en un point variable *d* le plan AC ; on voit que chacune de ces forces peut être regardée comme composée de quatre forces, dont deux sont dirigées par le centre de masse *z* (telle que *zb* & *zc*) & dont les deux autres sont l'une parallele à *zi*, tandis que l'autre est dans un plan auquel *zi* est perpendiculaire.

Toutes les forces telles que *ln* (que nous nommons *excentriques*, comme ci-devant, pour les distinguer des forces telles que *zb* & *zc* qui reçoivent le nom de *centrales*), & qui sont perpendiculaires au même plan, en divers points, peuvent se réduire à une seule résultante *op* qui leur est parallele. Les forces *excentriques* telles que *lm*, qui sont toutes dans un même plan auquel *zi* est perpendiculaire, peuvent aussi avoir pour résultante une seule force *rt* qui leur est parallele & qui est placée dans le même plan. Dans cet état de choses, soit abaissée du point *o* sur *zi* une perpendiculaire qui, placée dans le même plan où est *rt*, rencontre cette derniere direction en un point *r*. Soit tirée aussi par le centre de masse *z* & par ce point *o*, une ligne qui parvienne, à un point *s*, aussi éloigné que le point *r*, de la ligne *zi* ; alors si on mene une ligne *qsr*, elle doit être parallele à *op* ; & on peut décomposer les forces *op* en deux autres paralleles, dont l'une passe par *z*, & l'autre par *s*. Celle-ci dirigée suivant *rs*, peut alors se combiner avec la force *tr* dont elle rencontre la direction en *r*; & les deux forces *tr* & *rs* peuvent enfin être réduites à la résultante unique *ry*. De

cette maniere, toutes les forces motrices qui ſont ſuppoſées agir inſtantanément, & enſemble, ſur un même corps m, & en divers points, peuvent être réduites à deux ſeules forces, dont l'une paſſe par le centre de maſſe z, tandis que l'autre eſt *excentrique*. La recherche de la vîteſſe angulaire d'un tel corps doit donc être faite, (ainſi que nous l'avons annoncé) comme celle de l'effet d'une force E unique & *excentrique* ; & cette vîteſſe eſt donnée par l'équation citée précédemment.

202. Si un corps, ſollicité au mouvement par une force F, eſt retenu par un axe fixe qui le traverſe en un point t (fig. 60) & s'il ne lui eſt permis que de tourner autour de cet axe, & non autour du centre de maſſe y, alors ſa vîteſſe angulaire, dans cet état forcé, ne peut plus être la même que ſi le corps étoit libre. Cette vîteſſe étant R (pour la diſtance I d'un corpuſcule m à l'axe t) ; celle d'un autre corpuſcule m, placé à une diſtance x de cet axe, doit être xR ; & mxR eſt la force motrice qui eſt capable de donner à m cette vîteſſe xR. Le moment de cette force particuliere eſt donc mx^2R, & la ſomme des momens de toutes les forces partielles, qui animent toutes les parties du corps M (197), doit être égale au moment de la force F à l'égard de t. Nommons, MT^2 le moment d'inertie du corps, relativement à l'axe t ; & FC, le moment de la force motrice F ; on a néceſſairement l'équation $RMT^2 = FC$ qui ſert à déterminer la viteſſe angulaire du corps lorſqu'on connoît les autres quantités qui entrent dans cette équation.

Si le corps eût été libre, alors les momens indiqués euſſent été différens ; parce qu'ils euſſent été pris à l'égard du centre de maſſe. Ainſi en comparant ces deux états du corps, on voit, dans celui de liberté, que le point où paſſe l'axe t auroit eu une viteſſe de rotation, qui eſt détruite, dans le ſecond état, par la réſiſtance que doit oppoſer l'axe fixe t. Mais il eſt ſouvent important, que cet axe n'éprouve que le moindre effort poſſible ; ainſi examinons comment on doit diriger la rotation d'un corps autour d'un axe fixe, de maniere qu'elle s'exécute comme ſi le corps étoit parfaitement libre, ou de maniere que cet axe ne ſupporte aucune charge.

203. Supposons que le corps sollicité au mouvement, est, par exemple, une lame mince & solide, dont la forme est un parallélogramme A*nmq* (fig. 60), & qui est forcée de tourner autour d'un axe perpendiculaire au plan A*nmq*, en un point *t*, dont le lieu est à une distance *ty* du centre de masse *y*. La force excentrique F, qui produit le mouvement de cette lame, agit en *r*, & elle est dirigée suivant *qr*. Imaginons actuellement une seconde lame, qui soit parfaitement égale & semblable à la premiere A*nmq*, qui soit invariablement réunie à celle-ci, mais placée de l'autre côté de *t*, & qui ait son centre de masse situé en T, à une distance T*t* du point *t*, égale à *yt*, sur le prolongement, du plan ainsi que de la diagonale de A*nmq*. Imaginons aussi, que (toutes les parties de cette seconde lame étant disposées à l'égard de *t* comme le sont celles de la premiere) une seconde force, égale à F, & dirigée dans le plan commun de ces lames parallélement à la direction de *qr*, mais en sens contraire, agisse sur le point Y à une distance Y*t*=*rt* ; alors le centre de masse de cet assemblage, ou de cette double lame, est nécessairement en *t*. La résultante des deux forces F & — F est nulle. Ainsi le point *t* doit rester immobile ; & le corps doit tendre à tourner autour de l'axe en *t*, avec la plus grande liberté, sans que cet axe ait à détruire par sa résistance l'action d'aucune force résultante. Quant à la vitesse angulaire que cette double lame doit prendre autour de l'axe T, elle est donnée par l'équation $2.R.MT^2 = 2.F.C$ parce qu'il y a égalité, entre les momens des forces opposées F, comme entre les momens d'inertie de l'une & l'autre lame à l'égard de l'axe qui est en *t*. Cette équation se réduit à $R.MT^2 = F.C.$ Elle est donc la même que celle qui a été trouvée précédemment ; & cette ressemblance fait voir que chacune de ces lames tourne autour de l'axe *t*, comme si elle étoit isolée & sans liaison réciproque sous l'impulsion d'une force F égale & semblablement placée. Elle fait voir de plus que, si l'addition d'une seconde lame égale & d'une seconde force excentrique, ne change pas le mouvement de rotation de la premiere lame ; elle est utile pour empêcher que l'axe de rotation ne supporte

un effort confidérable, que par fa réfiftance il devroit détruire dans le cas où une feule de ces lames tourneroit autour de lui. On voit donc dans l'arrangement des deux corps fuppofés le procédé qu'on doit fuivre pour empêcher qu'un axe de rotation, tel que celui d'un cabeftan, d'une roue, &c. fupporte une charge nuifible pendant qu'on met en action & ces machines & toutes celles qui leur reffemblent.

204. La viteffe angulaire d'un corps dépend ainfi, toutes chofes égales d'ailleurs, du moment d'inertie de ce corps à l'égard de l'axe autour duquel il fait une rotation quelconque. Examinons par conféquent, & comment on détermine le moment d'inertie d'un corps, & comment ce moment peut varier fuivant les divers axes auxquels il eft relatif. Soit *a* (fig. 36) le lieu d'un corpufcule *m*. *ai* eft fa diftance (126) à une ligne *bc* (qui eft fuppofée un axe A de rotation, fitué fur le plan DE) on a l'équation $ai^2 = ao^2 + oi^2$; lorfque *ao* eft la diftance de *a* au plan DE, & *oi* celle du même point à un autre plan qui paffant par *bc* feroit perpendiculaire au premier. Ainfi on trouve le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe *bc*, en ajoutant enfemble les produits de chaque partie de ce corps, multipliée par le quarré de fa diftance à deux plans perpendiculaires entr'eux, qui paffent l'un & l'autre par l'axe fuppofé de rotation.

Doit-on chercher le moment d'inertie d'un vaiffeau (fig. 75. G.) (en le fuppofant homogene) à l'égard d'un axe *ab* qui paffe par fon centre de maffe *i*. Il faut imaginer deux plans *dbga* & *acb* perpendiculaires entr'eux & ayant l'axe *ab* pour fection commune. Alors on confidere ce bâtiment comme décompofé en tranches très-minces qui foient paralleles aux deux plans conventionnels, chacun de ceux-ci fera nommé *horizontal* & *vertical*. On fait une fomme des produits de chaque tranche horizontale par le quarré de la diftance de fon centre de maffe au plan *dbga* qui leur eft parallele. On forme auffi celle des produits de chaque tranche verticale par le quarré de la diftance de fon centre de maffe au plan vertical *aibc*; & ces fommes réunies préfentent le moment d'inertie d'un vaiffeau entier homogene à l'égard

d'un axe tel que *ab*. La ſuppoſition d'une très-petite épaiſſeur de ces tranches permet ſeule de trouver, avec autant d'exactitude que de facilité dans la pratique, le moment d'inertie diun bâtiment de mer comme nous le démontrerons ailleurs.

Mais on ne peut conſidérer un vaiſſeau comme homogene ; & il eſt au contraire compoſé, ſoit dans ſa coque, ſoit dans ſon gréement, ſoit dans ſa charge, d'une infinité de parties hétérogenes dont les formes autant que les poſitions reſpectives ſont entiérement variées. Comme un tel ſujet eſt important à approfondir, & qu'il doit être bien connu d'un homme de mer à cauſe des rotations continuelles qui ſont communiquées à un vaiſſeau ou par des lames, ou par les vents, ou par le gouvernail, ou par les voiles, nous allons joindre ici quelques réflexions utiles ſur les momens d'inertie.

205. Nous diſons 1° que ſi on connoît le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe A qui paſſe par ſon centre de maſſe, on peut en conclure celui qu'il doit avoir à l'égard de tout autre axe parallele au premier. Soient en effet, *a* le lieu de l'élément, d'un corps dont le centre de maſſe eſt en *c*, & deux axes paralleles *icg* & *edf* (fig. 78) qui ſont dans un même plan *ciedfg*. Si, de *a* on abaiſſe ſur ce plan une perpendiculaire *ab*, & ſi de *b* on mene, la ligne *bcd* perpendiculaire aux deux axes, ainſi que les lignes *ac* & *ad*, ces dernieres ſont les diſtances de *a* aux deux axes ſuppoſés. D'après cette conſtruction, on peut dire que $ab^2 = ac^2 - cb^2 = ad^2 - (bc + cd)^2$, ou $ac^2 + cd^2 + 2.bc.cd = ad^2$. En raiſonnant de même ſur chaque élément d'un corps M, on voit que le moment d'inertie de M, à l'égard de *ef*, eſt compoſé 1° de ſon moment d'inertie à l'égard de l'axe *ig*, qui paſſe par ſon centre de maſſe; 2° du produit de ſa maſſe totale par le quarré de la diſtance *cd* des deux axes ſuppoſés; & 3° de la ſomme des produits du double de cette derniere diſtance multipliée par le moment de chaque élément, à l'égard d'un plan, qui paſſeroit par le centre *c*, & auquel les axes ſeroient paralleles. Ce dernier moment eſt, comme on ſait, le produit de chaque élément multiplié par ſa diſtance au plan indiqué, & il eſt né-

cessairement nul, puisqu'il en est ainsi de la somme des momens de toutes les parties d'un corps à l'égard d'un plan quelconque qui passe par son centre de masse. On doit donc conclure que le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe A quelconque est égal à la somme, du moment d'inertie qu'il peut avoir à l'égard d'un axe parallele à A qui passe par le centre de masse, & du produit de la masse totale de ce corps multipliée par le quarré de la distance des deux axes paralleles.

206. L'utilité de cette derniere proposition est de faciliter le calcul du moment d'inertie d'un vaisseau à l'égard de son centre de masse. En effet supposons que M,N,P,Q soient les masses des différentes parties qui composent un vaisseau, & que leur centre de masse particulier soit éloigné d'un axe o, qui passe par le centre commun de masse ou par celui du vaisseau, à des distances x,y,z, & s. Imaginons aussi que dans le centre de masse de chacune des parties du vaisseau il y ait un axe parallele à l'axe commun o à l'égard duquel on cherche le moment d'inertie. Alors on doit calculer séparément le moment d'inertie de chaque masse partielle à l'égard de son axe particulier parallele à o; & si on les représente par Ma^2, Nb^2, Pc^2, Qd^2, le moment d'inertie du vaisseau, ou celui de l'assemblage de toutes les parties, à l'égard de l'axe o est, $M(a^2+x^2)+N(b^2+y^2)+P(c^2+z^2)+Q(d^2+s^2)$. De cette maniere on peut facilement déterminer le moment d'inertie d'un corps aussi irrégulier & aussi hétérogene que l'est un vaisseau. On voit d'ailleurs que les quantités a,b,c,d, étant supposées infiniment petites (ce qui a lieu dans un bâtiment, lorsqu'on donne peu d'épaisseur aux tranches qui le composent & qui sont paralleles à l'axe donné de rotation) le moment d'inertie est, comme on l'a annoncé plus haut (204), représenté assez exactement par $Mx^2+Ny^2+Pz^2+Qs^2$, en négligeant les autres termes qui sont très-petits comparativement à ceux-ci.

207. Imaginons qu'un bâtiment soit partagé en deux parties quelconques, dont les masses sont M & N, qui ont les points a & d (fig. 78) pour centres de masse particuliers, & le point m pour centre commun de masse. Soit demandé le moment d'inertie de ce vaisseau à l'é-

gard de l'axe *ig* qui passe par *m*. On doit considérer dans le centre de chaque masse partielle M & N, des axes, tels que *ao* & *ef* qui soient paralleles à *ig*. Soit Ma^2 le moment d'inertie de M à l'égard de *ao*; & Nb^2 celui de N à l'égard de *ef*. Soit aussi menée par *d* une ligne *db* perpendiculaire à l'axe *ig*. Alors par la démonstration précédente le moment d'inertie G de tout le vaisseau est $Ma^2+Nb^2+M.bc^2+N.dc^2$. Mais la propriété du centre commun de masse autorise à dire que $M.bc=N.dc$, ou que $(M+N)\,bc=N.db$, ou enfin que $(M+N)\,dc=M.bd$. Le moment total G est donc $Ma^2+Nb^2+(M+N)bc.dc$; mais on a $(M+N)^2dc.bc=N.M.db^2$ (en multipliant l'une par l'autre les deux dernieres équations précédentes) donc $G=Ma_2+Nb+T.db^2$ (en faisant $N.M=T(M+N)$. Soit enfin *d* la distance *ad* des centres de *m* & *n*, & nommons *i* l'angle de *ad* avec *ig*, alors $db=d.\mathit{sin}\, i$; & $G=Ma^2+Nb^2+T.d^2\mathit{sin}.i^2$. C'est par cette équation, qu'étant donné, le moment d'inertie d'un vaisseau, & celui d'une de ses parties M, on peut en conclure celui du reste N de ce vaisseau à l'égard d'un même axe qui passe par le centre commun de masse; étant connues d'ailleurs les quantités T, *d*, & *i*. Cette même équation fournit aussi le moyen de déterminer les changemens que peuvent opérer dans le moment d'inertie d'un vaisseau, ou l'addition, ou la soustraction, ou le déplacement d'un corps P dans ce vaisseau. Car la masse du bâtiment, dans le cas de l'addition de P, doit être regardé comme composé de P+V. Si on connoît le moment d'inertie Pt^2 de P à l'égard d'un axe A de rotation qui passe par son centre de masse particulier, & Vm^2 celui du vaisseau avant l'addition de P à l'égard d'un axe, parallele à A, & passant par son centre de masse. Si *x* est enfin la distance des centres de masses de P & V, alors le moment d'inertie du vaisseau augmenté du corps P est $Pt^2+Vm^2+x^2\mathit{sin}.i^2Q$ (en supposant que $(V+P).\ Q=VP$). Cette valeur, comparée à celle Vm^2, fait connoître l'avantage ou le désavantage, (suivant les circonstances) de l'addition d'un nouveau corps à la charge d'un vaisseau. On calculeroit de même l'effet, de la soustraction, ou du déplacement d'un corps quelconque, sur Vm^2. Ainsi ces principes sont

ſont très-utiles & trés-néceſſaires dans la pratique de l'art de la marine, ſoit pour diriger l'arrimage d'un vaiſſeau, ſoit pour en corriger les défauts, ou en augmenter les avantages; ſoit enfin pour déterminer, par la recherche des momens partiels d'inertie de tous les objets qui compoſent un vaiſſeau, le moment total d'inertie de ce bâtiment à l'égard d'un axe donné.

208. Il y a ſans doute, dans un corps, un nombre immenſe d'axes poſſibles de rotation, même en ne conſidérant que ceux qui ſont aſſujettis à paſſer par le centre de maſſe; & le calcul du moment d'inertie à l'égard de chacun, ſeroit trop pénible, ſi on vouloit l'exécuter directement dans tous les cas qui peuvent ſe préſenter. Cependant de tels momens ſont toujours importans à connoître, dans un vaiſſeau qui ſollicité, ou par des lames, ou par des courans, ou par le vent, ou par les voiles, ou par ſon gouvernail, &c. peut prendre des mouvemens de rotation très-variés, ſoit par leur grandeur, ſoit par la ſituation des axes autour deſquels ils commencent, ſe prolongent, ou ſe ſuccedent. Mais un tel calcul devient bien abrégé lorſqu'on connoît le moment d'inertie d'un corps à l'égard de trois axes qui ſont perpendiculaires entr'eux, & qui paſſent par le centre de maſſe. Car on peut en conclure celui du même corps à l'égard de tout autre axe oblique qui paſſe auſſi par ce même centre, pourvu qu'on connoiſſe l'inclinaiſon de cet axe à l'égard des trois axes ſuppoſés. Ceux-ci ſeront déſignés déſormais ſous le nom d'axes *conventionnels*. Voici la démonſtration de cette propoſition.

Soit M (fig. 79) le lieu d'un élément d'un corps dont G eſt le centre de maſſe. Soient GA, GD & GV, les trois axes *conventionnels*, & G*t* l'axe oblique à l'égard duquel on cherche le moment d'inertie de ce corps. Soit mené par l'axe GV un plan qui paſſe par G*t*, & qui étant perpendiculaire au plan DGA prolongé, le traverſe, & le coupe en *gs*. Repréſentons par *m* & *u* les ſinus & coſinus de l'angle AG*s*; & ſoit abaiſſée de M une perpendiculaire ML ſur le plan AGD, afin qu'en menant de L des perpendiculaires ſur les lignes AG, GD, GS; les lignes MP, MQ, M*r*, ſoient les diſtances de M aux

trois axes AG, GD & GS (126). D'après cette construction on peut dire que $Mr^2 = ML^2 + Lr^2$. Mais $Lr = Lo + or$; & dans les triangles rectangles LoP & orG on trouve que $PL = n.Lo$; & que $n.or = n.m.PG - m^2.PL$; donc $n(Lo + or) = PL + nm.PG - m^2.PL = n.m.PG + n^2.PL$; donc $Lo + or = m.PG + n.PL$. En substituant cette derniere valeur, & en se rappellant que $m^2 + n^2 = 1$, on doit dire que $Mr^2 = m^2(ML^2 + PG^2) + n^2(ML^2 + PL^2) + 2.nm.PG.PL = m^2.MQ^2 + n^2.MP^2 + 2nm.PG.PL$. La valeur de Mr^2 doit être employée actuellement à trouver le quarré de la distance de M à l'axe réel Gt de rotation. A cet effet soient menées (fig. 80), de ce même point M une ligne Mf qui soit perpendiculaire au plan $VGts$ qui passe par l'axe conventionnel GV, & par l'axe de rotation Gt; & du point f, trois autres lignes perpendiculaires l'une fr à Gs, la deuxieme fa à Gt, & la troisieme fx à GV. Si on joint par des lignes droites le point M avec les points r, a & x, ces lignes représentent les distances de M aux lignes GS, Gt & GV. D'après cette construction on peut dire que $Ma^2 = Mf^2 + fa^2$. Nommons p & q les sinus & cosinus de l'angle SGt, & considérons les triangles rectangles fir, iGa; nous verrons que $q.fi = fr$ & que $q.ia = qp.Gr - p^2.fr$, ou que $fa = q.fr + p.gr$. Donc $Ma^2 = Mf^2 + (q.fr + p.gr)^2 = q^2(Mf^2 + fr^2) + p^2(Mf^2 + gr^2) + 2qp.fr.Gr = p^2.Mx^2 + q^2.Mr^2 + 2qp.fr.gr = p^2.Mx^2 + q^2(m^2.MQ^2 + n^2.MP^2 + 2nm.PG.PL) + 2.qp.fr.GV$. Afin de simplifier une telle expression, imaginons que le point G soit le centre d'une sphere (qui a pour rayon celui des tables); & que les trois axes conventionnels aboutissent à sa surface en A, D & V (fig. 81) qui sont des points réciproquement séparés par des arcs de 90°. Soit T le lieu de l'extrémité de l'axe de rotation Gt. Soient aussi menés par T les arcs TA, TV, ainsi que l'arc DR qui est perpendiculaire sur l'arc ARV. Les sinus & cosinus de VR, sont m & n; ceux de TD sont q & p. Représentons aussi ceux de TA par b & d; & ceux de TV par f & g. Alors dans les triangles TRA & TRV, on trouve que $qn = g$ & $qm = d$. Ainsi en substituant au lieu de m & n leur valeur dans l'expression de Ma^2 (afin que dans celle-ci il ne soit question que des angles formés par l'axe de ro-

tation Gt avec les trois axes conventionnels), on aura l'équation suivante $Ma^2 = p.^2 Mx^2 + d.^2 MQ^2 + g.^2 MP^2 + 2 gd.PG.PL + 2pg.ML.PG - 2pd.ML.PL$ (en remarquant que $fr = ML$ & $Gr = n.GP - m.PL$).

Tel est donc le quarré de la distance d'un seul élément d'un corps à un axe de rotation Gt qui passe par le centre de masse; & en étendant les mêmes raisonnemens à tous les autres élémens du même corps, on trouveroit une valeur de même forme, pour le quarré de leur distance à cet axe Gt. Toutes ces valeurs réunies après avoir été multipliées chacune par l'élément correspondant du corps formeroient le moment d'inertie de celui-ci à l'égard de l'axe Gt. Représentons ses momens d'inertie à l'égard des axes GV, GA, GD, par MC^2, MR^2 & MS^2. Indiquons aussi par G, H & E, la somme des produits de chaque élément multiplié, soit par (PG.PL), soit par (ML.PG), soit par (ML.PL); & nommons MA^2 le moment d'inertie du corps à l'égard de l'axe supposé Gt. On aura alors $MA^2 = p.^2 MC^2 + g.^2 MR^2 + d^2 MS^2 + 2. gd.G. + 2pg.H - 2pd.E$; c'est-à-dire que le moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe oblique qui passe par son centre de masse peut être déterminé; lorsqu'on connoît, & son moment d'inertie à l'égard de trois axes conventionnels, & les sommes de produits tels que G, H & E qui dépendent de la position de ces derniers axes; (étant donnés d'ailleurs les angles de l'axe de rotation avec les trois axes conventionnels).

209. Remarquons, dans cette expression du moment d'inertie d'un corps à l'égard d'un axe quelconque qui passe par le centre de masse, des termes qui toujours ont une valeur positive & réelle; parce que les parties du corps, ainsi que le quarré de leur distance, à l'axe donné, sont des quantités nécessairement positives. Mais les parties d'un corps, étant placées, les unes à droite, & les autres à gauche, soit de l'axe AG, soit de DG, les unes au-dessus du plan AGD & les autres au-dessous; on doit reconnoître que le choix des axes conventionnels AG, GD, & GV, doit influer particuliérement sur les valeurs des produits G, H & E. Ce choix enfin peut être tel qu'il produise la nullité entiere de ces derniers

produits séparés, sans que les autres termes du moment d'inertie cessent d'avoir une valeur réelle.

Cette nullité de G, H & E est aussi facile à concevoir que celle de la somme des momens (191) de chaque partie d'un corps à l'égard d'un plan quelconque dirigé par le centre de masse : & d'ailleurs elle est infiniment avantageuse à établir, soit parce que l'expression du moment d'inertie en devient plus simple & plus petite, soit à cause de son influence sur la grandeur de la vitesse angulaire d'un corps autour d'un axe quelconque. Sous ce dernier rapport, il est donc essentiel pour la marine, qu'on fasse toujours un choix d'axes conventionnels auxquels soit attachée la propriété indiquée, ou la nullité de G, H & E; & c'est par cette raison que de tels axes porteront désormais les noms d'axes *principaux*.

Le rapport de la vitesse angulaire R d'un corps, à son moment d'inertie MA^2 (à l'égard d'un axe de rotation qui passe par le centre de masse), est donné par l'équation déjà démontrée (197) $R.MA^2 = FD$, en supposant qu'une force motrice F agisse avec un moment FD pour produire ce mouvement de rotation. Ainsi cette vitesse dépend de la valeur de MA^2. Mais, c'est surtout l'uniformité de cette vitesse angulaire ; c'est sa régularité ; c'est la continuité du mouvement de rotation du corps autour d'un seul & même axe, qui importent à la marine ; & on ne les obtient qu'autant que les axes conventionnels sont autant d'axes principaux. Car alors, MA^2 n'éprouve aucun changement dans les diverses situations du corps ; & l'action de F ayant été instantannée, la vitesse R doit rester la même. Alors aussi l'axe autour duquel le corps commence à tourner ne cesse d'être son axe de rotation pendant la continuation de son mouvement, & ce dernier effet est sur-tout remarquable, parce que c'est dans ce seul état des choses, que peuvent se détruire réciproquement les effets particuliers, qui résultent du mouvement angulaire, & qui tendent à déplacer à chaque instant l'axe primitif de rotation. Il est important d'analyser, & ces effets, & leurs rapports avec la valeur de MA^2. C'est pourquoi nous allons les faire connoître. Rappel-

lons-nous (190) que toute force motrice F peut être décomposée en trois autres forces qui soient paralleles à trois axes conventionnels. On peut en dire de même de leurs effets ; ainsi nous pouvons considérer la vitesse de rotation d'un corps autour d'un axe oblique, comme composée de trois vitesses de rotation, qui ont lieu simultanément autour des mêmes axes conventionnels. Soit M*i*+ (fig. 80) un arc infiniment petit décrit par le point M autour du point *x* de l'axe GV ; la force partielle qui sollicite séparément le corpuscule *m* à ce mouvement ne peut être dirigée que suivant la tangente M*o*. Elle peut donc être décomposée en deux autres forces, l'une suivant l'arc élémentaire M*i*, & l'autre M*q* dans le sens du rayon *x*M. La premiere obtient tout son effet, & la deuxieme M*q* qui reçoit le nom de force *centrifuge*, est dirigée directement sur le point *x* de l'axe GV. Celle-ci agit à une distance de G, égale à G*x* ou LM ; & elle tend à déplacer cet axe de rotation. Cette force centrifuge, étant représentée par *x*M, peut aussi être décomposée en deux autres qui soient paralleles & égales aux lignes M*f* & *fx* ; & les momens de ces dernieres, pour déplacer GV, sont exprimés par *fx*. G*x*. ou G*r*. LM, & par M*f*. G*x* ou ML. L*r*. En raisonnant de même sur les effets de la rotation de l'élément *m* du corps autour de AG, deux forces agissent aussi pour le déplacer, l'une avec un moment ML. PG, & l'autre avec le moment PL. PG (fig. 79). Enfin les deux forces, qui tendent à déplacer GD pendant la rotation de *m* autour de cet axe, ont des momens ML.PG & PL.PG. On sait d'ailleurs par ce qui précede (208) que ML.L*r*=ML (*m*.PG+*n*.PL) & que ML.G*r*=ML (*n*.GP—*m*.PL). Il s'ensuit donc que les sommes des momens relatifs des forces centrifuges qui agissent pour déplacer chaque axe conventionnel à raison de la rotation de toutes les parties du corps M autour de ces axes, dépendent de la valeur de produits tels que G, H & E. Ces axes de rotation ne peuvent donc être constamment les mêmes pendant la rotation d'un corps ; ou ils ne peuvent correspondre aux mêmes points de l'espace que dans le seul cas où ces produits G, H & E se réduisent à zéro séparément. Il

faut donc enfin que ces axes conventionnels ſoient autant d'axes principaux, ſi on veut obtenir que la rotation du corps continue, à l'égard du même axe oblique autour duquel elle a pu commencer; c'eſt-à-dire s'il eſt néceſſaire que ce mouvement ſoit régulier & uniforme. Une telle néceſſité eſt reconnue dans l'art de la marine, puiſqu'il faut que tous les mouvemens de rotation d'un vaiſſeau ſoient doux, faciles & réguliers. Comme les plus ordinaires des rotations des bâtimens de mer ſont, des tangages, des roulis, des arrivées, ou des auloffées, ou des abattées, c'eſt-à-dire des rotations autour de trois axes qui ſont paralleles, l'un à la longueur, l'autre au maître bau, & le troiſieme au creux; le choix des axes conventionnels dans un vaiſſeau doit néceſſairement tomber ſur ces trois axes déſignés qui paſſent par le centre de maſſe; & on doit dès-lors tout faire, pour qu'ils aient le nom & la propriété d'axes *principaux*. C'eſt en les rendant tels, qu'on peut obtenir la plus grande douceur, comme la facilité convenable dans les rotations d'un vaiſſeau autour d'un axe quelconque; & on produit ces effets qui ſont ſi importans à la navigation, par un ordre très-ſimple à établir dans le placement de toutes les parties qui compoſent la maſſe entiere d'un vaiſſeau armé.

Cet ordre eſt fondé ſur les valeurs de G, H, & E; & pour le développement de leurs rapports, imaginons trois plans qui paſſent, par les trois axes déſignés, ainſi que par le centre de maſſe; & donnons à ces plans les noms d'*horizontal*, de *vertical*, & de *diamétral* ou d'élévation. Il faut donc que cet ordre ſoit tel dans un vaiſſeau, ou il faut que la charge totale ſoit diſtribuée de maniere, qu'à même hauteur au-deſſus ou au-deſſous du plan horizontal AGD, toutes les parties ayant une même maſſe & priſes deux à deux, ſoient placées à égale diſtance, de part & d'autre du plan diamétral VG A. Car alors les ſommes des produits tels que (LP.GP) & (LM.LP) ſont néceſſairement nulles ſéparément. Il faut en même-temps que de part & d'autre du plan vertical DGV & à même diſtance du plan AGD, les parties égales de ce vaiſſeau ſoient placées, (priſes deux à deux) à égale diſtance du plan vertical; parce que cette ſeconde

eſpece d'arrangement entraîne la nullité de la ſomme des produits tels que (LM.PG).

Ces regles ou ces conditions peuvent aiſément être remplies dans un vaiſſeau ; & elles doivent l'être, parce qu'elles ne contrarient nullement celles auxquelles ſont attachées les autres qualités dont doit être doué un bon bâtiment de mer. En diſpoſant, ſuivant ces principes, toutes les parties d'un vaiſſeau qu'on arme complétement, les trois lignes qui menées par ſon centre de maſſe, ſont paralleles à ſes trois grandes dimenſions, deviennent donc autant d'axes *principaux* ; & alors ce vaiſſeau eſt ſuſceptible de tourner avec autant de régularité que de douceur & d'uniformité, non-ſeulement autour de l'un de ces axes principaux ; mais auſſi autour d'un axe oblique quelconque, qui paſſe par le centre de maſſe.

Une théorie plus élevée fait connoître d'ailleurs, ces axes principaux, comme étant ceux à l'égard deſquels les momens d'inertie, d'un corps ainſi que d'un vaiſſeau, ont la plus grande ou la plus petite valeur, c'eſt-à-dire qu'ils ſont des *maxima* ou *minima*. Elle fait voir auſſi que ſi le nombre de ces axes, qui néceſſairement doit être de trois, étoit plus grand, ces axes ſeroient en nombre infini dans le même corps. Mais les lumieres données précédemment ſur un ſi beau ſujet, ſuffiſent à l'homme de mer, puiſqu'elles preſcrivent des regles d'arrimage qui ſont faciles & ſûres à exécuter ; ainſi nous n'étendrons pas davantage ces ſpéculations parce que nous devons les limiter ſur les beſoins de l'art de la marine, ou les borner à éclairer convenablement la pratique de cet art.

210. Juſqu'ici nous n'avons parlé que de la viteſſe uniforme qui anime un corps lorſqu'il eſt ſollicité inſtantanément à ſe mouvoir par une force qui après avoir agi ſur lui avec toute ſon énergie, l'abandonne à lui-même ainſi qu'à l'impulſion qu'il a reçue. Mais cette force peut être ſuppoſée renouveller ſon action ſucceſſivement à chaque inſtant de la durée, ſur ce même corps. Cette action peut être différente ou égale. Elle peut être ou dirigée dans le ſens de la viteſſe du corps, ou lui être inclinée, ou lui être directement contraire. Cette force

est nommée *accélératrice*, si elle augmente la vitesse du corps, & *retardatrice* si elle tend à la diminuer. Si son action répétée ne varie ni en énergie, ni en direction, elle est nommée force *accélératrice* ou retardatrice *constante*; mais on lui donne le titre de *variable*, si elle change d'une maniere irréguliere quelconque.

Considérons généralement un corps M dans ce nouvel état ; & supposons qu'une force accélératrice constante F soit sans cesse appliquée à son centre de masse, pour lui donner à chaque instant une vitesse u; c'est-à-dire imaginons que la force F exerce sur M une action qui se répete également à chaque instant de la durée, (en regardant chacun de ces instans comme infiniment petits, & comme représentans autant d'unités de temps (183). Supposons aussi que sa direction ne cesse pas d'être la même, ou dans le sens du mouvement du corps. Alors celui-ci acquiert, dans la premiere unité de temps une vitesse u. Dans le deuxieme instant sa vitesse est $2u$; dans le troisieme sa vitesse est $3u$; & enfin après un temps t ou un nombre t d'instans, le corps a acquis une vitesse tu, ou une vitesse finale qu'on peut représenter par V. Comme Mu est une quantité proportionnelle à F (puisque la grandeur de F doit être exprimée, par la vitesse u qu'elle est capable de communiquer à une masse donnée M dans l'unité de temps) on peut dire, que $Mu = F$. Ainsi $Mtu = Ft$; or $tu = V$ donc $MV = Ft$. Telle est une des équations fondamentales, des mouvemens variés uniformément ; car elle indique le rapport de la vitesse finale, à la durée de l'action, & à l'énergie de la force F, sur un corps M.

Si on veut connoître l'espace total E que parcourt un tel corps M pendant le temps t; il faut considérer le mouvement de M pendant chaque unité de temps dont la durée est infiniment petite, comme étant uniforme : puisqu'on suppose (pour mieux analyser les vitesses accélérées), que la force qui le produit, n'agit & ne se répete qu'au commencement de chacun de ces instans. Ainsi pendant le premier instant où le corps reçoit une vitesse u, l'espace qu'il parcourt doit être proportionnel à u (183). Pendant le deuxieme instant, le corps est

animé de deux degrés de viteſſe, repréſentés par $2u$, ainſi il parcourt un eſpace $2e$ & ainſi de ſuite. Pendant la derniere unité du temps t, & après avoir acquis un nombre t de degrés de viteſſe u, l'eſpace qu'il parcourt eſt donc te & ſa viteſſe tu eſt V. L'eſpace total, par conſéquent, qui eſt parcouru par le corps M depuis le commencement de ſon mouvement accéléré, & pendant le temps t, en raiſon de l'action conſtante, égale, & continue de la force F, eſt donc la ſomme des termes d'une progreſſion arithmétique (e, $2e$, $3e$, $4e$ *&c*) dont le premier terme eſt e & le dernier te. Cette ſomme eſt égale à $(te+e)\frac{1}{2}t$. Mais l'eſpace e qui eſt parcouru dans un inſtant inſenſible, n'eſt pas comparable à l'eſpace te, c'eſt pourquoi il peut être négligé à l'égard de ce dernier, ſans craindre de commettre une erreur appréciable dans la ſomme $(e+te)$. C'eſt pourquoi l'eſpace total E parcouru pendant le temps t avec une vitesse également accélérée eſt donné par cette équation $E=\frac{1}{2}Vt$, car $te=V$. On a vu plus haut que $MV=Ft$, ainſi $ME=\frac{1}{2}Ft^2$ & ſi on repréſente par Mp la quantité F, cette équation fondamentale des mouvemens accélérés ainſi que la précédente, ſe réduiſent à celles-ci, $V=pt$ & $E=\frac{1}{2}pt^2$, ou $2pE=V^2$.

Si deux corps ſont animés par des forces accélératrices différentes qui ſoient entr'elles comme p & q; mais conſtantes, pendant des temps repréſentés par t & T. Ils doivent acquérir des vitesses finales V & Z, & parcourir des eſpaces E & G, tels qu'on a les proportions $V:Z::pt:qT$ & $E:G::pt^2:qT^2::V^2:Z^2$. Les rapports de leurs vitesses finales, ainſi que ceux des eſpaces parcourus ſont ainſi exprimés par ceux des temps & des forces accélératrices & des eſpaces. Lorſque les forces ſont égales, & lorſqu'elles agissent ſur des corps égaux pendant des temps différens, on voit que les vitesses finales ou acquiſes ſont comme les temps des mouvemens; & on voit auſſi que les eſpaces parcourus ſont alors comme les quarrés des temps, ou comme ceux des vitesses.

211. Ajoutons encore que ſi on compare les eſpaces qui ſont parcourus pendant un même temps t, par deux corps égaux, dont l'un par des accélérations ſucceſſives

acquiert une viteſſe finale V, & dont l'autre ſe meut avec une viteſſe uniforme telle que V ; ces eſpaces ſont dans le rapport de $\frac{1}{2}$ Vt & Vt (183). Le deuxieme parcourt donc uniformement un eſpace double de celui qu'une marche accélérée fait franchir au premier. On peut dire auſſi que ſi un corps après s'être mu d'un mouvement réguliérement accéléré pendant un certain temps, vient à ſe mouvoir d'un mouvement uniforme, pendant le même temps, & avec une viteſſe égale à celle qu'il a acquiſe par des accélérations conſtantes & ſucceſſives, il doit parcourir un eſpace double de celui qu'il a parcouru par ſon mouvement accéléré.

212. Les mêmes équations ſont applicables au cas où la force eſt retardatrice conſtante. Alors la quantité u repréſente le degré de viteſſe que la force F anéantiroit à chaque inſtant, dans un corps animé primitivement d'une viteſſe quelconque. La quantité E exprimeroit auſſi l'eſpace total, que cette force l'empêcheroit de parcourir pendant le temps t avec ſa viteſſe primitive, & par conſéquent ce ſeroit l'eſpace qui ſeroit à retrancher de celui que le corps auroit franchi avec la viteſſe dont il étoit animé lorſque la force retardatrice a commencé à agir ſur lui.

Si la force accélératrice ou retardatrice qui ſollicite un corps n'agit pas, également & uniformement, mais d'une maniere différente à chaque inſtant ; alors la viteſſe acquiſe par ce corps au bout du temps t doit être la ſomme des degrés variés de viteſſe que cette force a fait paſſer dans M pendant t ; & l'eſpace total parcouru par M, eſt la ſomme d'une ſuite de petits eſpaces, (qu'on peut regarder comme étant parcourus chacun uniformement pendant chaque inſtant inſenſible de la durée). Ces eſpaces n'ont alors entr'eux d'autres rapports que ceux qui dépendent des accroiſſemens ſucceſſifs de la viteſſe du corps, & on ne peut les ſommer, que lorſqu'on connoît la loi de ces mêmes accroiſſemens. D'ailleurs les principes relatifs aux mouvemens uniformes qui s'exécutent pendant des temps d'une grandeur finie, peuvent s'appliquer à ces mouvemens variés, en ne leur ſuppoſant qu'une durée infiniment petite. Il eſt

ſuperflu d'avertir que ces mêmes réflexions s'adaptent également aux effets des forces retardatrices variables. Il l'eſt auſſi de dire, que ſi ces forces conſtantes ou variables, ont des directions qui ne paſſent pas par le centre de maſſe des corps qu'elles ſollicitent au mouvement ; elles accélerent ou retardent non-ſeulement la viteſſe progreſſive, mais auſſi la viteſſe angulaire, qu'elles leur communiquent dans cette ſuppoſition. Lorſqu'une force accélératrice ou retardatrice, agit ſur un corps dans le ſens de ſon mouvement primitif, elle ne peut en changer la direction ; mais ſi, animé d'une viteſſe qui lui feroit parcourir *de* par exemple pendant l'unité de temps (fig. 18), & uniformement, il eſt ſollicité en *d* par une force capable de lui faire parcourir dans le même temps un eſpace tel que *eo*, alors le corps doit ſuivre la diagonale *do* ; & ſa nouvelle direction fait avec celle de ſa vîteſſe premiere un angle *edo*. Enſuite ce corps, étant arrivé en *o*, au commencement de la deux^{e} unité de temps, tend à ſe mouvoir ſuivant le prolongement *ou* de la ligne élémentaire *od*. Mais ſi alors une ſeconde force agit ſur lui au point *o*, & ſi elle eſt capable de lui faire parcourir *um* dans l'unité de temps, ſa viteſſe acquiſe changera de nouveau, & ſa direction ſera *om* : de ſorte qu'après un temps *t*, le corps au lieu de s'avancer ſur une ligne droite *des*, doit tracer dans l'eſpace une route curviligne, dont la courbure eſt relative à l'intenſité comme aux variations de la force accélératrice qui répete ſucceſſivement & à chaque unité de temps, ſon action ſur un tel corps.

Tels ſont les principes les plus utiles de la mécanique de l'homme de mer. Leurs conſéquences ſont infiniment nombreuſes ; elles ſont très-variées dans leurs applications à l'art de la marine, comme on le verra dans la ſuite de ce traité.

213. *De la communication du mouvement en général.* Les forces ou les puiſſances dont on obſerve les effets dans l'univers, ne communiquent du mouvement qu'en faiſant agir des corps ſur d'autres corps, ſoit par des chocs immédiats, ſoit par des attractions ou des affinités, ſoit par le moyen de certaines machines qui ſervent à

varier ou à modifier leur application aux corps. La nature des forces reste encore ignorée ainsi que la liaison qu'elles ont avec leurs effets ; mais une telle connoissance n'est pas celle qui est le plus nécessaire à l'homme de mer; & il lui est plus utile d'être instruit des loix de la communication du mouvement. Ces loix doivent donc nous occuper exclusivement, puisqu'un voile que personne n'a pu encore soulever nous empêche de voir comment la nature produit les phénomenes du mouvement. Ainsi nous commencerons par traiter des loix du choc des corps. Nous examinerons ensuite les bases sur lesquelles sont établies les machines qu'on a adoptées, ou qu'on peut imaginer encore ; pour faire naître, entretenir, altérer, ou éteindre le mouvement suivant les circonstances ; & nous réserverons pour le dernier objet de ce traité, les forces physiques ou naturelles dont l'influence est utile ou nuisible dans la pratique de l'art de la marine.

Les corps que la nature nous présente, ne sont doués, ni d'une dureté, ni d'une mollesse, ni d'une élasticité, qui soient parfaites ; & s'ils ont de la roideur ou de la flexibilité, jamais ces propriétés ne sont à un degré tel, que la liaison de leurs parties élémentaires, puisse résister complétement, ou céder sans résistance, à une forte compression. Si des corps naturels paroissent réductibles à un moindre volume, nous ne pouvons cependant nous empêcher de croire que leurs élémens premiers, ou les corpuscules qui les composent, sont d'une dureté parfaite ; & on ne peut concevoir les corps mous & élastiques, que comme des assemblages de corpuscules durs qui sont liés plus ou moins fortement ensemble, & qui sont séparés par des intervalles, ou par des pores plus ou moins étendus. Ce sont ces pores, & des attractions ou des affinités mutuelles, qui sont les causes prochaines de l'organisation plus ou moins ferme & solide des corps naturels ; & c'est suivant l'énergie de ces causes, que les corps se rapprochent ou s'éloignent des classes de ceux qui ont, ou une dureté, ou une molesse, ou une élasticité parfaite.

Quoique ces états extrêmes paroissent ne pas exister

dans la nature; & quoiqu'une dureté invincible, ſemble ne convenir qu'aux élémens premiers des corps; cependant il devient néceſſaire de conſidérer ces états pour prononcer aiſément ſur les états intermédiaires qui ſont ordinaires aux corps phyſiques. Il faut, pour traiter de la communication du mouvement à des corps plus ou moins faciles à comprimer, connoître comment ſe fait cette communication à des corps incompreſſibles; & enfin, pour juger de l'effet de la tendance imparfaite d'un corps, à reprendre ſa forme lorſqu'elle a été altérée par une impulſion quelconque, il faut examiner la conſéquence de l'élaſticité, ou de la molleſſe, lorſqu'elles ſont portées au plus haut degré dans les corps qui ſe choquent.

214. La premiere queſtion qui ſe préſente, eſt de ſavoir quelle eſt, après leur choc, la viteſſe de deux corps parfaitement durs qui ſe ſont rencontrés dans l'eſpace. Un tel corps M eſt-il animé d'une viteſſe a; la force F qui a été capable de la lui communiquer eſt Ma; & comme on ne ſuppoſe aucun obſtacle au mouvement de M; comme ce corps conſerve ſans altération la quantité de mouvement Ma (183); il s'enſuit que dans chaque point de ſa route, on peut le conſidérer comme ſi l'action de la force F venoit de lui être appliquée. Ainſi on peut donc concevoir que cette force F, agit ſur M dans le même moment où celui-ci arrive en contact immédiat avec un nouveau corps N qui eſt en repos & parfaitement dur; c'eſt-à-dire au moment où ces deux corps M & N, ſemblent ne plus former qu'un même corps par leur réunion. Dans cet état de choſes, la force F (en ſuppoſant que ſa direction paſſe par le centre des deux corps) qui n'eſt appliquée qu'au corps M, ne peut cependant agir que ſur l'aſſemblage des deux corps M & N; & puiſque d'ailleurs ſon effet eſt inſtantané comme ſon action; c'eſt-à-dire que la dureté des deux corps, fait qu'au même moment toutes les parties égales de cet aſſemblage reçoivent une égale impulſion partagée, le centre commun des maſſes de ces corps doit être mu avec une viteſſe x telle que $x\,(M+N) = F = Ma$ (192).

Si le corps dur N, ſe trouvoit animé, (dans le ſens de a) d'une viteſſe b, au moment où il ſe réunit au

corps M, on peut dire auſſi, par les mêmes raiſons; que x (M+N) = F+f (en ſuppoſant comme précédemment que les directions des forces motrices paſſent par les centres particuliers des maſſes M & V, qui ſont par conſéquent ſur une même ligne; & en nommant f la force qui peut donner à N une viteſſe b). On peut donc dire que x (M+N) = Ma+Nb, ſi x repréſente la viteſſe communiquée au centre commun de ces maſſes. Nous devons remarquer que ſi la viteſſe b avoit une direction contraire à celle de a, alors l'équation ſeroit de cette forme x (M+N) = Ma—Nb. Ces équations ſont fondées ſur ce qu'un aſſemblage de corps, étant ſollicité au mouvement par des forces quelconques qui ſont dirigées par le centre commun de maſſe doit ſe mouvoir, comme ſi les corps compoſans étoient réunis dans ce centre, & comme ſi les forces étoient toutes appliquées ſur ce centre avec leur direction propre (196). Telle eſt donc la ſituation de deux corps au moment où finit leur choc. Leur viteſſe doit être exactement la même, puiſqu'alors ils ne peuvent agir plus long-temps l'un ſur l'autre; & une telle viteſſe eſt indiquée par les équations précédentes. Celles-ci ſont d'ailleurs génerales; puiſqu'elles embraſſent, le cas oú l'un des corps durs eſt en repos, ainſi que ceux où leurs viteſſes quelconques ſont dirigées dans un même ſens, ou dans des ſens contraires. On en conclut directement, que les maſſes & les viteſſes contraires étant égales, la viteſſe x du centre de maſſe eſt néceſſairement nulle; & cette conſéquence eſt évidemment juſte ſans être démontrée par aucun calcul. Car des corps égaux, viennent-ils à ſe rencontrer avec des viteſſes égales, dirigées dans des ſens oppoſés; il n'eſt aucune raiſon qui puiſſe aſſurer, le moindre avantage, ou la moindre ſupériorité d'un de ces corps ſur l'autre; c'eſt pourquoi tous deux, après le choc, doivent ſe réduire à un parfait repos.

215. Si le corps choquant M eſt compreſſible, alors ceux de ſes élémens qui arrivent les premiers en contact avec N, exercent leur choc ſur celui-ci ſans que les autres élémens qui les ſuivent, lui impriment aucune impulſion; c'eſt-à-dire que les premiers éprouvent

des changemens dans leur vitesse, tandis que celle de tous les autres reste entiere & sans altération, puisqu'on suppose que l'assemblage de ces élémens dans le corps M, est flexible & sans roideur. En analysant ainsi sur cette base, & les effets, & l'ordre suivant lequel ils se succedent, dans le choc des corps compressibles; on voit que ce choc ressemble peu à celui des corps durs. Dans ceux-ci, la liaison des parties est si forte qu'elles ne peuvent s'approcher mutuellement les unes des autres; & aussi-tôt qu'une seule partie choquante ou choquée vient à recevoir la moindre vitesse; la derniere & les intermédiaires acquierent en même temps une vitesse parfaitement égale. Dans les corps compressibles, au contraire, les parties peuvent se replier les unes sur les autres; des impulsions immédiates peuvent en mouvoir quelques-unes sans que ces impulsions soient transmises aux parties éloignées, lorsque la mollesse de ces corps est la plus grande possible. C'est pourquoi un corps compressible M, animé d'une vitesse a, vient-il frapper un corps N qui dans le même sens a une vitesse b; aussi-tot que ces corps arrivent en contact, les corpuscules antérieurs de M sont refoulés par N. Ils perdent leur vitesse primitive, & malgré ce changement dans cette portion de M, des corpuscules postérieurs conservent leur vitesse primitive a. Le choc des premiers corpuscules de M qui ont agi sur N, & qui se replient sur le centre de masse, est suivi du choc de nouveaux corspuscules plus éloignés de N; & ces élémens choquans se succedent, en ne cessant, par la perte de leur vitesse partielle ou totale, de faire passer dans le corps N, de nouveaux degrés de vitesse qui enfin soustraient celui-ci, à toute action du corps M. Si on vouloit analyser le mouvement intérieur de chaque partie choquante ou choquée, les détails en seroient immenses, pénibles, très-difficultueux, mais nous parviendrons à trouver la vitesse de ces corps, après leur choc, en ne considérant que le mouvement des centres particuliers des masses M & N. On voit que le moment où le choc de ces corps vient à cesser, le moment où l'un n'a plus d'action sur l'autre, est celui où le centre de masse de chacun a une égale vitesse que

je nomme z. Cet état des choſes n'a lieu que lorſqu'une portion Mq de la maſſe M, qui a été comprimée dans le choc, a éprouvé un tel changement dans ſa viteſſe primitive a, qu'elle ne ſe trouve plus animée que d'une viteſſe u, tandis que le reſte $(M-Mq)$ de ce corps M conſerve toujours ſa viteſſe a. Si on ſuppoſe, que z ſoit la viteſſe du centre de maſſe de M au moment de la fin du choc; ce corps doit donc être regardé, à cette époque, comme compoſé de deux parties dont l'une Mq eſt ſollicitée au mouvement par une force $Mq.u$; & l'autre $(M-Mq)$ par une force $(M-Mq)\,a$. De ſorte que le centre de maſſe de M a une viteſſe z qui eſt exprimée (192) par l'équation $Mz = (M-Mq)\,a + Mq.u$.

Si le corps N eſt compreſſible auſſi; ſoit x la viteſſe de la portion comprimée NS de ce corps, au moment où le choc eſt terminé, tandis que b ne ceſſe d'être, comme avant le choc, celle de la partie antérieure de N, ou de ſa partie reſtante $(N-NS)$. Alors l'équation $NS.x+(N-NS)\,b = Nz$ doit, par des raiſons rapportées précédemment, faire connoître la valeur de la viteſſe z qu'on ſuppoſe à N à la fin du choc.

Remarquons que la partie Mq, avant le choc, ſe mouvoit avec une viteſſe a, & qu'on pouvoit la regarder comme ſollicitée iſolément par une force $Mq.a$. Cette force pouvoit être regardée comme compoſée d'une force $Mq.u$ (qui entretient encore le mouvement de Mq au moment où finit le choc) & d'une deuxieme force $Mq\,(a-u)$ qui, dirigée dans le ſens de a, eſt détruite par le choc. De même la force $NS.b$ qui donnoit avant le choc à une partie NS de N, une viteſſe b, peut être regardée comme compoſée de deux forces contraires, l'une $NS.x$ dans le ſens de a, & l'autre $NS\,(x-b)$ dans le ſens contraire. Cette derniere eſt encore détruite dans le choc, parce que la partie NS a une viteſſe x à la fin du choc. Ainſi comme elle eſt directement oppoſée à la force $Mq\,(a-u)$ qui eſt auſſi anéantie; il faut que ces deux forces contraires ſe ſoient détruites réciproquement dans le choc, puiſqu'on ne ſuppoſe aucune force étrangere qui agiſſe pendant la colliſion des corps

M & N

M & N. Ces deux forces ſont donc égales, ce qui eſt exprimé par l'équation $Mq(a-u) = NS(x-b)$.

Raſſemblons actuellement les valeurs de Mz & Nz. On peut dire que $(M+N)z = (M-Mq)a + Mq.u + NS.x + (N-NS)b = Ma + Nb + Mq(u-a) + NS(x-b =) Ma + Nb$. On voit donc que ſi deux corps compreſſibles ſe rencontrent directement dans l'eſpace, la viteſſe de leur centre de maſſe, au moment de la fin du choc, eſt exactement égale à celle qu'auroient ces corps s'ils étoient parfaitement durs.

Suivons actuellement les conſéquences du choc, dans les corps durs, mous & élaſtiques. Auſſi-tôt que le choc eſt achevé, ſi les corps ſont durs, ils ſe ſuivent ſans ſe ſéparer; mais ſans agir enſuite l'un ſur l'autre; & toutes leurs parties ont une même viteſſe. S'ils ſont mous, & ſi les parties comprimées ne tendent pas à reprendre leurs places primitives, les corpuſcules poſtérieurs de M au nombre de $(M-Mq)$, combattent les parties comprimées Mq juſqu'à ce que toutes les parties du corps s'avancent avec une même viteſſe z. Enſuite le corps M conſerve juſqu'à un nouveau choc l'état de compreſſion où il a pu être réduit, ſoit par la rencontre de N, ſoit par l'action réciproque des parties qui dans le corps M ſont animées de différentes viteſſes. (On raiſonneroit de même ſur la ſituation de N). Suppoſons que les deux corps choquant & choqué ſoient parfaitement élaſtiques. On ſait que leurs parties comprimées tendent à reprendre leur forme premiere après le choc, & avec une force qui eſt égale à celle qui a ſervi à les comprimer. On ſait auſſi que leur reſſort tend à ſe dilater vers le côté qui offre le moins de réſiſtance à cette extenſion. Ainſi, lorſque la compreſſion de ces corps eſt achevée; comme ils ſont en contact par leurs parties extrêmes; comme celles-ci ſe gêneroient dans leurs mouvemens, ſi leur dilatation ſe faiſoit du côté des points de contact; alors elles s'appuient les unes ſur les autres, & leur reſſort ſe détend vers les côtés qui ſont oppoſés aux points de contact. Rappellons-nous actuellement, que la force perdue dans le choc par la partie Mq du corps M, ou celle qui a contribué à ſa compreſſion, eſt $Mq(a-u)$ qui

n'eſt autre choſe que M ($a—z$) ; 2° que la compreſſion de NS dans le corps N eſt due à la force acquiſe NS ($x—b$) ou N ($z—b$) ; c'eſt pourquoi le centre de M , immédiatement à la fin du choc, eſt ſollicité de ſe mouvoir, & par une force Mz, & par une force élaſtique contraire M ($a—z$) qui réſulte de la compreſſion de Mq. La viteſſe r eſt donc alors exprimée par l'équation rM $=$ Mz—M ($a—z$) ou $r = 2z—a$. C'eſt la viteſſe réelle que le centre du corps élaſtique & choquant M doit prendre après le choc. Le centre de maſſe de N eſt auſſi, après le choc, ſollicité à ſe mouvoir & par une force primitive Nb, & par la force élaſtique N ($z—b$) qui a comprimé NS. Ainſi la viteſſe du centre de maſſe r, devient après le choc ($2z—b$). Ce réſultat indique que, pour trouver les viteſſes de deux corps élaſtiques après leur choc, il faut chercher la viteſſe commune z qu'auroient ces corps après le choc s'ils étoient ſans reſſort ; & enſuite du double de cette viteſſe retrancher la viteſſe de chacun. Il faut d'ailleurs obſerver que ſi les viteſſes des corps étoient en ſens contraire elles devroient être déſignées par des ſignes différens dans les équations. Remarquons auſſi que ſi un des corps étoit ſeul élaſtique, alors la viteſſe de l'autre ſeroit z & celle du premier ſeroit $2z—a$.

Si l'élaſticité étoit imparfaite, ou ſi la compreſſion de M étant proportionnelle à Mq ($a—u$) ou à M ($a—z$), la force de reſtitution ne l'étoit elle-même qu'à pM ($a—z$) ; alors la viteſſe r du centre de la maſſe M ſeroit égale à z ($p+1$) — ap. L'élaſticité de N étant auſſi telle, que comprimé par une force N ($z—b$), il ne tende à reprendre ſa forme qu'avec une force P.N ($z—b$), ſa viteſſe R $= z$ (P+I) — bP. Les quantités p & P ſont des fractions de l'unité, qui peuvent varier ſuivant le degré de l'élaſticité des corps en raiſon inverſe de leur molleſſe ; de ſorte que dans le cas d'une élaſticité parfaite, p ainſi que P ont pour valeur l'unité.

216. Les applications de ces formules ſont nombreuſes dans l'art de la marine ; car elles embraſſent les chocs, ou de vaiſſeaux entr'eux, ou d'un vaiſſeau contre des rochers, contre un fond plus ou moins mou. Elles ſervent encore à juger non-ſeulement de l'action, des lames,

& des boulets, ſur les parties frappées d'un bâtiment, ou d'un corps qui eſt en repos ou en mouvement; mais auſſi des effets que produiſent ſur les mâts, & le battement des voiles, & les ſecouſſes des vergues, & les irrégularités ſoit des tangages, ſoit des roulis. Les mêmes principes fourniſſent d'ailleurs l'explication la plus plauſible & de la forme des lames & des variations qu'elles éprouvent ou des effets qu'elles produiſent, lorſqu'elles abordent ou des vaiſſeaux ou les rivages de la mer.

La pratique de l'art de la marine préſente beaucoup d'autres exemples de cette eſpece, qui intéreſſans dans leurs détails, peuvent aiſément être analyſés en employant la théorie précédente & ſes conſéquences, comme on le verra dans le traité de l'art de la marine.

217. Des *machines* ont été imaginées pour tranſmettre l'action des forces motrices ; & leur uſage eſt de les modifier, ainſi que de varier leur direction, convenablement aux circonſtances. Ces machines, plus ou moins compoſées, ne ſont que des combinaiſons de machines ſimples , & ces dernieres ſont des cordes, des leviers, des plans inclinés, qu'on retrouve auſſi dans les poulies, le cabeſtan, ou le tour, le cric, la vis, & le coin. Nous allons conſidérer comment, avec ces ſecours, une force motrice agit ſur un corps, ſoit pour lui communiquer tout le mouvement qu'elle eſt capable de produire, ſoit pour augmenter, altérer ou détruire celui que les corps peuvent avoir acquis, ou qu'ils ſont ſollicités à prendre. Cependant, pour traiter cette matiere dans toute ſa ſimplicité, nous ferons abſtraction de l'effet de pluſieurs cauſes phyſiques accidentelles qui influent ſur le produit de ces machines. Telles ſont, le frottement, la peſanteur, la réſiſtance des fluides, la roideur des cordes, &c. ; & nous réſerverons ces détails acceſſoires quoiqu'importans, pour l'article où il ſera queſtion des forces naturelles qui ont des rapports utiles avec l'art de la marine.

218. Une *corde* A*m* (fig. 60), eſt-elle attachée fixement en A; & eſt-elle tirée par une force F qui agit en *m*; cette corde continue, qui eſt conſidérée, comme parfaitement ſouple & flexible, ainſi que ſans peſanteur,

doit éprouver une égale tenſion dans toutes les parties de ſa longueur. En effet ſi la force appliquée en *m*, qui tire le premier élément de cette corde, ſuivant ſa propre direction, agiſſoit obliquement ſur le deuxieme élément, cette action pourroit être décompoſée en deux autres qui ſeroient dirigées, l'une dans le ſens de ce ſecond élément, & l'autre perpendiculairement à ce même élément. Cette derniere force, que nulle autre n'eſt ſuppoſée devoir détruire, devroit alors, à cauſe de la ſoupleſſe du cordage, avoir ſon entier effet qui conſiſte à ramener le ſecond élément de cette corde dans la direction exacte du premier. On en diroit de même des autres élémens, & dans cet état la même force qui agit en *m* ſeroit tranſmiſe à chaque élément depuis *m* juſqu'en A. Ainſi une corde qui, attachée fixement par une extrêmité, eſt tirée par une force appliquée à l'autre extrêmité, préſente une égale tenſion dans tous ſes points. On peut dire même que la tenſion de A*m*, dans le ſens *m*A, eſt égale à ſa tenſion dans le ſens A*m*. On peut donc conclure de ce principe que dans quelques points *o*, *r*, *t*, &c. de la longueur d'une corde A*m*, qu'on place un corps à mouvoir ; la force motrice qui tire l'extrêmité de cette corde doit agir ſur le corps, avec autant d'énergie, que ſi elle lui étoit immédiatement appliquée.

219. De même ſoit une corde *n*A*q*, qui, étant bien tendue & continue, paſſe par-deſſus un point fixe A, ſur lequel elle peut gliſſer librement, dans le ſens *q*A*n*, comme de *n* vers *q*, alors la tenſion de la partie *n*A doit être néceſſairement égale à celle de la partie A*q*. Car ſi le point A de cette corde n'étoit pas autant tiré vers *n* qu'il peut l'être vers *q*, il céderoit à la traction la plus puiſſante ; puiſqu'aucun obſtacle n'eſt ſuppoſé l'empêcher de prendre ce mouvement. Ainſi une corde tendue *n*A*q* qui eſt continue, en repos, & qui paſſe par-deſſus le point A ſur lequel elle peut gliſſer librement, eſt néceſſairement tendue également dans tous ſes points.

Si *m*A repréſente le cable d'une ancre qui eſt mouillée ſur le fond horizontal A*z* de la mer ; ſon obliquité à l'égard de A*z*, fait voir qu'une force qui agit en *m* dans

le ſens de mA, & qui agit de même ſur l'ancre en A, tend à tirer l'ancre & dans le ſens Az, & dans celui Mz (perpendiculaire à Az), puiſque cette force peut être décompoſée (186) en deux autres forces dirigées ſuivant ces lignes. Soit L la force motrice, & ſoit i l'inclinaiſon du cable mA à l'égard de l'horizon : alors la force ſuivant Mz, qui tend à arracher l'ancre du fond de l'eau, eſt égale à $L.\mathit{ſin}.i$. La diminution de cette tendance dépend donc de celle de $\mathit{ſin}.i$, ou de la longueur du cable mA, car $mz = mA.\mathit{ſin}.i$. C'eſt pourquoi (comme l'expérience le confirme) l'action des lames & du vent, parvient d'autant moins aiſément à faire déraper une ancre, que le cable de celle-ci reçoit une plus grande longueur.

C'eſt auſſi par de telles décompoſitions, qu'on peut aiſément diſcerner l'effet ou d'une emboſſure, ou d'une amarre, ou d'un hauban, d'un étai, ou de divers cordages, qu'on emploie dans les ports, dans les rades, ou à la mer, pour varier les poſitions & les mouvemens d'un vaiſſeau. On en conclut auſſi les avantages ou les inconvéniens attachés aux ſituations adoptées pour pluſieurs manœuvres, telles que bras, balancines, cargues, drailles, &c.

220. Si deux cordes An & Aq (fig. 60) ſont attachées par leur extrêmité à un corps placé en A; & ſi les forces qui agiſſent par le moyen de ces cordes, ſont repréſentées par les longueurs An & Aq, elles tendent à faire parcourir au corps la diagonale Am (186) du parallélogramme dont An & Aq ſont les côtés. L'effort R qui réſulte de la combinaiſon de ces forces, ou la force qui lui eſt égale & directement oppoſée, eſt déterminée par cette proportion $R : An + Aq :: \cos.\frac{1}{2}a : \cos.\frac{1}{2}(c - b)$ (les angles nAq, nAm, mAq ſont nommés a, b & c). C'eſt pourquoi, la différence $(c - b)$ étant nulle, la valeur de R s'éloignera d'autant moins de $(AR + Aq)$ que a différera plus de 180°. C'eſt ainſi que deux canots étant armés pour remorquer un bâtiment placé en A, à l'aide des cordages An & Aq; leur effet devient d'autant plus grand que l'angle nAq des remorques eſt plus petit; & ſi l'un des canots eſt mieux armé que le ſecond il

doit auſſi ſe placer à moins de diſtance, que le dernier, de la route qu'on ſe propoſe de faire tenir au vaiſſeau. De même deux ancres mouillées en n & q, doivent contribuer, à retenir un vaiſſeau contre les efforts du vent & des lames qui le pouſſent dans le ſens mA, avec une force d'autant plus grande que le même angle nAq eſt plus petit ; & ſi l'une des ancres eſt plus foible, il faut que ſon cable faſſe auſſi le plus grand angle avec la direction des lames ou du vent, pour mieux aſſurer la poſition du vaiſſeau mouillé.

La proportion précédente qui eſt fondamentale, démontre que la force R eſt la plus petite poſſible, pour une valeur donnée de a, lorſque $b = c$. Ce cas eſt celui de la tenſion égale des deux cordes An & Aq. C'eſt auſſi le cas où une force R agit par une corde oe (fig. 62) par exemple ſur une coſſe, ou ſur un anneau O dans lequel paſſe librement une ſeconde corde aob qui eſt tirée ou fixée par ſes extrêmités a & b. Alors la direction de eo eſt telle, qu'elle partage en deux parties égales l'angle aob, ſi elle fait équilibre à la réſultante des tenſions des branches ao & bo de la ſeconde corde. Car ces tenſions étant égales, la coſſe O doit gliſſer ſur la corde aob, juſqu'à ce qu'il y ait égalité entre les angles aoe & boe (219). Ainſi agit une bouline de baſſe-voile qui porte une coſſe dans laquelle paſſe la branche de bouline dont les extrêmités ſont attachées à la ralingue latérale d'une telle voile. Ainſi peuvent être déterminés les effets de la bouline & des branches de bouline d'un hunier. Comme cette bouline fait, par ſa direction, un angle égal avec les branches auxquelles elle eſt liée, ſon effet eſt d'autant plus grand que l'angle des branches eſt plus petit. Remarquons ici que cet angle étant très-grand, une petite force R appliquée ſur la bouline, produit un très-grand effet ſur les pattes de la ralingue. Ainſi cette conſidération conduit à obſerver pour regle générale de donner autant de longueur qu'il eſt poſſible aux branches des boulines pour qu'elles ne tendent pas trop fortement à déchirer les ralingues des voiles.

Conſidérons un palan de charge ſoutenu par une ſuſpente dont les extrêmités ſont attachées autour, l'une, du

mât de misaine, & l'autre du grand mât ; & remarquons, que l'angle *a* des deux branches de la suspente, étant très-grand, des poids très-petits portés par le palan, font un effort puissant sur la tête de chaque mât, & tendent à les fatiguer considérablement.

Considérons aussi, dans la composition du berceau d'un vaisseau, les cordes qui lient les colombiers correspondans, pour servir à soutenir la partie moyenne de ce vaisseau sur son chantier. Les deux branches de la même roussure de deux colombiers font un angle très-grand, & cette roussure est chargée dans son milieu d'un poids énorme. Ainsi les têtes de ces colombiers doivent presser avec une force extrême les points où elles sont appliquées; c'est par cette raison qu'on fait appuyer leur tête immédiatement, non contre la carene du bâtiment qu'ils comprimeroient trop profondément ; mais sur une ventriere qui est étendue sur cette carene. C'est aussi la même raison qui explique pourquoi une ventriere ne devient pas nécessaire pour l'appui des têtes des colombiers extrêmes puisque l'angle des branches de leurs roustures, a moins de grandeur, (toutes choses étant égales d'ailleurs).

221. Soit une corde *aoi* (fig. 63) qui attachée par ses deux extrêmités *u* & *i*, est pressée en divers points de sa longueur par différentes forces séparées ou réunies. Supposons aussi que ces forces combinées lui donnent une tension déterminée & qu'agissant sans discontinuité elles la maintiennent dans la situation fixe *aoi*; on demande la direction & la valeur de la résultante de toutes ces forces. Représentons par *uq* & *iq* les tensions & les directions des deux derniers élémens *au* & *bi* de cette corde; il faut que toutes les forces placées entre *a* & *b*, & appliquées aux autres élémens intermédiaires de la corde, se réduisent à une seule force qui soit dans le plan *iqu* des cordons *au* & *bi*. Car celles de ces forces qui ne seroient pas dans ce plan pourroient être décomposées en deux autres, dont l'une seroit dans ce plan auquel l'autre seroit perpendiculaire. Toutes les forces composantes placées comme cette derniere, devroient se détruire mutuellement ; puisque la corde est supposée prendre & garder une position fixe & constante. Quant

aux forces qui feroient placées dans le plan des élémens extrêmes de la corde, elles fe réduiroient (186) néceffairement à une feule. Ainfi toutes les forces appliquées à la corde continue & libre *uoi*, n'ont qu'une réfultante, & celle-ci doit être en équilibre avec celle que produifent les tenfions des élémens extrêmes *ua* & *ib*, fi, comme on l'a fuppofé, les points *a* & *b* ne prennent aucun mouvement. La direction de l'une & de l'autre réfultante, eft donc *qd*, ou celle de la diagonale du parallélogramme qui a pour côtés les lignes *uq* & *iq*. On doit donc dire que la tenfion de *bi* eft à celle de *ua* : : *fin. dqa* : *fin. dqi*.

Ainfi *a* & *b* étant les deux points inférieurs d'une baffe-voile, la force réfultante des tenfions des parties extrêmes de la ralingue du fond confidérée ifolément, eft à la fomme de ces tenfions, : : $cof. \frac{1}{2} bqa : cof. \frac{1}{2} (bqd - dqa)$. La pofition des lignes *iq* & *uq* qui font tangentes aux extrêmités de la ralingue du fond, & les grandeurs des tenfions de ces parties peuvent fervir à déterminer leur réfultante *qd*, foit dans fa valeur, foit dans fa direction. Il s'enfuit que plus la tenfion de *au* ou de l'amure eft confidérable à l'égard de celle de l'écoute *bi*, plus auffi l'angle *dqa* eft petit à l'égard de *dqb*, c'eft-à-dire que la réfultante *qd* fe rapproche alors davantage du point d'amure que de celui de l'écoute; & cette remarque eft effentielle à faire dans l'art de manœuvrer un vaiffeau. Les mêmes principes conduifent encore à juger de l'effort qu'exerce une draille fur les points où font fixées fes extrêmités, lorfqu'elle fert à foutenir le guindant d'un foc ou d'une voile d'étai.

222. Si une corde tendue par des forces appliquées en *u* & *i*, paffe fur plufieurs points fixes placés en *c*, *o*, *p*, &c. fans ceffer d'être continue, & avec la liberté de gliffer vers *u* comme vers *i*; alors, les angles tels que *afp*, *fpn*, *pno*, &c. que forment entr'eux deux élémens voifins de cette corde, & pris deux à deux, font partagés en parties égales en *f*, *p*, *n*, &c. Car dans l'état d'équilibre les tenfions des diverfes parties de cette corde doivent être égales (219). Il réfulte de l'égalité de ces angles, que la réfultante des efforts de deux élémens voifins & quelconques, doit néceffairement paffer par le

centre d'un arc dont ces élémens feroient deux tangentes. C'eft pourquoi en étendant ce raifonnement aux élémens confécutifs *au*, *af*, *fp*, *pn*, &c., on voit que fi les points *u*, *a*, *f*, *p*, *n*, &c. appartiennent à un même arc de cercle, leur réfultante *qd* doit paffer par le centre de cet arc. Réciproquement fi on fe propofe de faire paffer par un même point, les réfultantes partielles des tenfions des élémens d'une corde, (en les comparant deux à deux) il faut que cette corde embraffe un arc décrit du point donné comme centre.

223. Plufieurs cordons (fig. 62) *eo*, *co*, *io* & *od* font-ils tous liés à un nœud fixe en *o*, & font-ils tirés par autant de forces qui agiffent contre une puiffance unique dirigée dans le fens *ob*; ces forces doivent fe combiner en une feule réfultante directement oppofée à la puiffance *ob*. Cette combinaifon eft facile à imaginer, lorfque ces forces font dans un même plan. Car alors chacune peut être décompofée en deux autres, dont l'une feroit perpendiculaire à *ob* & l'autre lui feroit parallele. Dans cet état, les forces perpendiculaires doivent fe détruire, puifque tous les cordons tendus reftent dans une pofition fixe; & on fait que les forces qui font paralleles à *ob*, & qui, comme les cordons, paffent toutes par le même point *o* peuvent fe réduire à une feule réfultante. L'équilibre fuppofé exige donc que cette derniere foit égale & contraire à la puiffance *bo*. Lorfque les forces en queftion ne font pas dans un même plan, chacune peut être décompofée (190) en trois autres paralleles à trois axes qui font perpendiculaires entr'eux, & dont l'un eft dirigé fuivant *ob*. Dans ce cas la fomme de toutes les forces compofantes qui font paralleles à chacun des axes perpendiculaires à *bo* doivent fe détruire mutuellement puifqu'il y a équilibre; ainfi les compofantes qui font paralleles à *bo* doivent balancer la puiffance qu'on fuppofe dirigée fuivant *bo*, en fe réduifant à une feule réfultante qui foit égale & contraire à cette puiffance. C'eft par cette méthode de décompofition, qui eft générale, qu'on doit trouver les effets réfultans de toutes les forces qu'on peut imaginer appliquées fur les divers points d'une corde; lorfqu'elles agiffent ifolément ou

concurremment ſoit dans un même plan, ſoit dans des plans différens. Enfin on doit voir que l'équilibre de pluſieurs forces peut avoir lieu d'une infinité de façons, en variant ſoit leur grandeur, ſoit leur direction.

Obſervons en paſſant, que pluſieurs cordons étant liés à un même nœud pour tirer ſur une corde *ob*, ne font pas un effet proportionné à leur énergie, parce que l'obliquité des cordons à l'égard de *ob*, fait que certaines compoſantes de ces forces ſe détruiſent mutuellement dans leur combinaiſon comme on l'a vu précédemment. C'eſt pourquoi, à bord d'un vaiſſeau, au lieu d'attacher pluſieurs cordons à l'extrêmité de la brimballe d'une pompe, il ſeroit plus à propos d'appliquer ces cordons aux extrêmités de pluſieurs barres qui croiſeroient la brimballe à angle droit, & qui permettroient ainſi que ces cordons puſſent être tirés parallélement les uns aux autres. Un tel arrangement qui économiſeroit les forces diſponibles, conviendroit auſſi dans pluſieurs autres circonſtances qui ſe préſentent dans la pratique de l'art de la marine.

224. Cherchons l'effet & le rapport de deux forces lorſqu'elles ſollicitent au mouvement un corps, long & de forme quelconque, qui n'a que la liberté de tourner autour d'un axe fixe ſur lequel il repoſe, & qui ne peut prendre aucune viteſſe progreſſive. Ce corps porte le nom de *levier*. Telle peut être conſidérée une vergue, qui liée à un mât par ſon racage, ne peut que tourner autour de lui à l'aide des forces qui ſont appliquées à ſes bras. Nous avons vu, que ſi des forces F & f (197) agiſſent ſur un corps, & ſi D & d ſont les diſtances, du point ou de l'axe fixe, ſur lequel ſeul ce corps peut tourner, à la direction de ſes forces; on doit avoir cette équation (en nommant R la viteſſe angulaire du corps & LA ſon moment d'inertie à l'égard de l'axe de rotation) $\text{R.LA}^2 = \text{FD} + fd$ ou $= \text{FD} - fd$; ſuivant que ces forces tendent à faire tourner le corps dans un même ſens, ou dans des ſens contraires.

Cette théorie doit être appliquée entiérement au levier; & lorſque le levier ne prend, malgré l'impulſion de deux forces, aucun mouvement de rotation autour de ſon point d'appui; on doit en conclure que $\text{R} = 0$; & par

conséquent que FD=*fd* ; c'est-à-dire que, les deux forces appliquées à ce levier, sont (dans le cas d'équilibre), en raison inverse de leurs distances à l'axe de rotation qui est nommé ici le point d'appui. Car, de cette équation, on tire la proportion suivante F:*f*: :*d*:D ; qui devient le principe général de l'équilibre de deux forces & appliquées à un levier quelconque. On voit par cette équation qu'une très-petite force peut absorber toute l'action d'une puissance considérable, si on rend assez grande la distance de la premiere au point d'appui du levier. On voit aussi que l'état d'équilibre d'un levier peut être détruit par une augmentation quelconque du moment d'une des forces, qui se combattoient auparavant sans avantage. C'est pourquoi à l'aide d'un levier, on peut avec une foible puissance, surmonter de très-grandes résistances. Le levier est donc un moyen propre à la communication du mouvement. (Nous faisons ici abstraction, de la pesanteur du levier, du frottement, &c.)

Si deux forces seules sont appliquées à un levier, alors dans l'état d'équilibre, leur résultante doit être dirigée sur le point d'appui ; car le moment de cette résultante, à l'égard de ce point, est nul, comme la somme (FD—*fd*) des momens des forces particulieres. La résultante & le point d'appui doivent donc être placées dans le plan des forces composantes, puisque celles-ci sont dans un seul & même plan.

On trouve aisément, dans ce dernier cas, le rapport de cette résultante ou de la charge du point d'appui, aux deux forces F & *f*. Étant données leurs valeurs & leurs directions dans un même plan (187) elle est égale, à leur somme, ou à leur différence, si leurs directions paralleles sont dirigées, ou dans un même sens, ou dans des sens contraires. Les deux forces supposées peuvent être placées, de part & d'autre du point d'appui, ou toutes deux du même côté, & la même formule $R.LA^2$=FD—*fd* donne l'équation de l'équilibre ainsi que du mouvement dans les deux cas, en variant les signes suivant les circonstances.

Soient deux forces F & *f* qui dans un même plan *pbacq* (fig. 64) agissent suivant *pb* & *qc* sur un levier *bdc*, de forme quelconque, & dont l'appui est en *d*.

Soient auſſi abaiſſées de *d* des lignes perpendiculaires *dſ* & *dz* ſur les directions de F & *f*, prolongées juſqu'à leur rencontre en *a*. Ces forces ſeront dans l'état d'équilibre, ſi on a l'équation F. *dſ*=*f*.*dz*, ou F.*ſin. daſ*=*f*. *ſin. daz*. Ainſi la force F devroit être ſurmontée par *f*; ou un corps placé en *b* (qui préſente une réſiſtance F) ſeroit mis en mouvement, à l'aide de ce levier, dans le cas où *f* recevroit un ou pluſieurs degrés d'accroiſſement. D'ailleurs la réſultante de ces forces (en équilibre) doit être dirigée ſuivant une ligne *ad* qui paſſe par le point d'appui *d* du levier; & en la nommant R, on trouve ſa valeur par la proportion R:F+*f*::*coſ* $\frac{1}{2}$ *bac*:*coſ*.$\frac{1}{2}$ (*bad*—*dac*). Lorſque *bac*=*o* cette valeur eſt la plus grande; & la charge du point d'appui eſt F+*f*, parce que les forces ſont paralleles.

Lorſque pluſieurs forces, appliquées à un levier, ont des directions placées dans des plans différens, on peut décompoſer chacune en trois autres forces qui ſoient paralleles à trois axes, qui perpendiculaires entr'eux paſſent par le point d'appui. Alors, dans le cas de l'équilibre d'un levier, chacune des trois ſommes des momens des forces qui ſont paralleles à chacun des axes, doit être nulle ſéparément; ainſi toutes doivent ſe réduire á une ſeule, dont la direction paſſe par le point d'appui & qui eſt détruite par ſa réſiſtance. Remarquons que ſi le levier, repoſant ſur uue baſe nommée point d'appui, avoit la liberté de gliſſer ſur cet appui, alors le repos du levier n'auroit lieu qu'à deux conditions. La premiere ſeroit la nullité de la ſomme des momens des forces qui tendent à le faire tourner; & il faudroit auſſi que la réſultante des forces fût perpendiculaire à une ligne qui ſeroit tangente à l'appui dans le point de contact du levier. (On ſe ſouvient ſans doute que la ſomme des momens eſt formée, par l'addition de ceux des forces qui tendent à faire tourner dans un ſens, & par la ſouſtraction de ceux qui tendent à produire une rotation contraire).

Enfin après avoir conſidéré, le plus généralement poſſible, l'état d'équilibre d'un levier, on peut imaginer facilement ſon état de mouvement, qui eſt toujours dû, ou à l'accroiſſement quelconque du moment d'une force

motrice ſuppoſée, ou à celui d'une force nouvelle; & alors on applique à ce ſecond état la théorie déja donnée de la rotation des corps.

225. C'eſt d'après ces principes qu'ont été imaginés les leviers dont on fait uſage dans les arts; & ils peuvent ſervir non-ſeulement à inventer de nouveaux moyens du même genre, mais auſſi à juger de leur utilité, ou de leur convenance, ſoit pour établir l'équilibre entre des forces, ſoit pour la communication du mouvement.

Dans les *balances* ordinaires dont on fait uſage dans la ſociété, le fleau eſt un levier, qui eſt ſuſpendu par le milieu de ſa longueur, & qui de part & d'autre de ce point eſt compoſé de parties parfaitement égales & ſemblables. C'eſt pourquoi ſi un poids eſt attaché à chacune de ſes extrêmités, ce fleau ou ce levier, ne peut reſter en équilibre ou en repos qu'autant qu'il y a égalité entre les poids ſuſpendus; & l'inégalité de ceux-ci, eſt indiquée par la rotation du fleau autour du point de ſa ſuſpenſion.

La *romaine* préſente auſſi un levier dans ſa verge, ou dans ſon fleau qui n'eſt pas ſuſpendu par un point placé au milieu de ſa longueur. Un de ſes bras eſt plus court que l'autre. Le premier eſt conſtant; & c'eſt à ſon extrêmité que ſont attachées les maſſes dont on ſe propoſe de connoître le poids. Enſuite une autre maſſe peſante qui toujours la même, eſt placée ſur le bras le plus long à une diſtance convenable & variée du point de ſuſpenſion, de maniere que ſon moment devienne égal à celui de la maſſe à meſurer. L'égalité de ces momens ſuffit alors (comme on peut en juger par les principes précédens), & pour donner une idée juſte de la maſſe inconnue qu'on doit peſer, & pour indiquer la graduation convenable du fleau, puiſque les diſtances des maſſes ainſi que la maſſe conſtante, ſont toujours connues dans leur grandeur.

Lorſque les bras d'une vergue ſont également tendus ils la tiennent en équilibre; mais ſont-ils inégalement roides. L'un des deux, force la vergue à tourner autour du mât, & cette rotation d'ailleurs doit paroître d'autant plus facile à produire, que le bras eſt attaché à la vergue en un point très-éloigné de celui de ſuſpenſion.

La brimballe d'une pompe, eſt auſſi un levier, qui repoſe par un point ſur un ſupport, & qu'on fait tourner pour produire le jeu de la pompe. Cette rotation eſt facilitée par l'inégalité des bras de ce levier. Car le bâton de la pompe eſt porté par le bras le plus court, afin que le moment de la réſiſtance ſoit diminué par ſa foible diſtance au point d'appui ; & c'eſt à l'extrêmité du bras le plus long qu'eſt appliquée par une raiſon contraire la puiſſance qui ſert à mouvoir la brimballe.

Le gouvernail d'un vaiſſeau, doit encore être conſidéré comme une eſpece de levier. L'action de l'eau peut être ſuppoſée réunie en *r* (fig. 35. G) & la puiſſance qui lui réſiſte, eſt appliquée à l'extrêmité *f* de la barre *fe*. Ces deux forces tendent en ſens contraire, à faire tourner le gouvernail ſur ſes gonds *bod*, & l'une agit à l'aide d'un bras de levier *fe*, tandis que l'autre n'eſt éloignée de l'axe de rotation qu'à une diſtance *or*. Leurs momens étant égaux, le gouvernail reſte en équilibre ou en repos, dans la ſituation où il eſt placé ; & leur différence entraîne la rotation de cette machine.

Une pagaïe (fig. 76. G) eſt auſſi un levier. Car conſidérons la réſiſtance R de l'eau comme une puiſſance qui pouſſe la pelle B, par le point *e*, & ſuivant *en* ; la main gauche, par exemple, du pagaïeur pouſſe le point A avec un effort A dans le même ſens A*z*, & ſa main droite placée en C tire la pagaïe dans un ſens contraire *cm*. Lorſque ces trois forces paralleles ſont en équilibre, la main droite ſoutient ſeule les efforts R & A, qui doivent être tels que $R.ec = A.Ac$ (189) ; & dans cet état d'équilibre, la main droite lutte en C contre la ſomme des efforts A & R. C'eſt cette ſomme de force qui devient pour le pagaïeur, un point d'appui, dont il ſe ſert pour pouſſer dans le ſens *mc*, le canot ou la pyrogue, qui le porte & qu'il tend à mouvoir. C'eſt enfin par ce moyen qu'il fait naître & entretient la viteſſe progreſſive de pareils bâtimens.

Remarquons qu'on ne peut dire de même d'un aviron, & qu'il ne peut être conſidéré comme un levier. Soit AB (fig. 74. G) un aviron qui eſt tiré par un rameur dont l'effort eſt appliqué au point A, & dirigé de A

vers *a*. Regardons la résistance que l'eau oppose à B, comme un obstacle immobile, alors la rame sollicitée en A au mouvement, ne tend qu'à tourner autour de B dans le sens A*a*, & lorsque cette rotation peut avoir lieu, la rame emporte avec elle dans l'espace le canot CD qui est lié avec elle au point *c*. Le mouvement de cette rame, est donc une rotation produite par une puissance qui est l'action du rameur, & qui n'est contrariée par aucune puissance étrangere, ou qui ne l'est que par le moment d'inertie de la rame & du canot réunis, en regardant d'ailleurs la résistance que l'eau oppose particuliérement au canot, comme un poids ajouté à sa masse ; ainsi quoique la rame ait un point d'appui en B dans la résistance de l'eau, quoiqu'elle l'eût sur un rocher placé en B ; on ne voit pas deux puissances distinctes qui appliquées à cette rame, se combattent mutuellement pour empêcher sa rotation. On ne voit donc pas ici les caracteres distinctifs du levier. D'ailleurs on voit évidemment qu'au moment où cette rotation de la rame vient à naître, le canot reçoit en *c* une impulsion déterminée, qui produit nécessairement (200) & son mouvement progressif dirigé de C en D, & sa rotation autour de son centre de masse G, dans le sens C*c*D, parce que l'impulsion n'est pas dirigée sur ce centre.

Enfin nous devons citer un autre levier, fréquemment en usage dans la marine, & qui y a reçu le nom distinctif d'*anspect*. C'est une barre de bois ou de fer. Représentons-le par la ligne *ac* (fig. 65). Doit-il servir à ébranler & à soulever une masse *q* placée en *b*, & qui fait effort dans le sens *br* ? On appuie son pied *c* sur un plan inébranlable *qn*, & une force P est appliquée en *a* perpendiculairement à sa longueur, dans le plan *abr* & dans le sens *au*. P produit un effet sensible lorsque son moment à l'égard du point d'appui C surpasse celui de *q*, qui tend à faire tourner le levier en sens contraire. Soit *m* l'angle *cbr* : alors $q \sin m$, est la resistance qui est à vaincre. Son moment est $q \sin.m. bc$, & $P.ac$ est le moment de P. On voit donc que P a d'autant plus d'avantage sur la résistance *q*, que *ac* l'emporte davantage sur *bc* & le rayon sur $\sin.m$. Un anspect est donc

très-utile pour la communication du mouvement, & très-avantageux pour vaincre de grandes résistances avec peu de force.

226. La *poulie* est un autre moyen, propre à la communication du mouvement; & l'invention en est fondée sur les principes précédens. En effet nous avons vu que si une corde *iou* (fig. 63), qui est tendue par des forces appliquées à ses extrêmités *u* & *i*, passe par-dessus des points fixes, tels que *s*, *p*, *n*, *o*, &c., la tension de chacun de ses élémens, est la même dans l'état d'équilibre de la corde. Nous avons vu aussi que la résultante des tensions particulieres, de deux élémens consécutifs de cette corde passe alors par le centre d'un arc, dont ces élémens sont des tangentes; & que si tous les points *s*, *p*, *o*, *n*, &c. sur lesquels appuie la corde continue, sont placés sur le contour d'un seul & même arc de cercle, la résultante totale des tensions de la corde, quelque soit le nombre de ses élémens en contact avec l'arc, passe par le centre de ce même arc. Cette propriété, qui permet, sans altérer une force, de varier au besoin sa direction, ou le lieu de son application, lorsqu'elle agit à l'aide d'une corde pour produire du mouvement; & ces principes qui indiquent un point central où passe la résultante des tensions des élémens d'une corde, ont fait imaginer & la forme & l'usage de la *poulie*. De là est venu l'idée de lui donner la figure d'un plateau solide, dont le contour est circulaire, qui sur son épaisseur porte une cannelure propre à recevoir un cordage, & qui a la liberté de tourner sur un axe qu'on fait passer par son centre dans une situation perpendiculaire au plan de ses faces circulaires & paralleles.

Soit *band* (fig. 66) une poulie (qu'on nomme rouet dans la marine), & supposons que les extrêmités de son axe *o* sont solidement appuyées. Si un cordage *caf* qui embrasse le contour *cba*, est tiré en *r* dans le sens *cr*, & en *f* dans le sens *af*; & si les forces motrices sont égales, ou si les tensions des cordons *rc* & *fa* sont les mêmes, la corde ne doit prendre aucun mouvement, & la résultante de ces forces comme de ces tensions doit passer par le centre *o* de la poulie (222). Nommons R cette

cette résultante ou la charge du point d'appui, dans l'état d'équilibre, on a la proportion R:T+t ou $2t$: : $cos.\frac{1}{2}a$: $cos.\frac{1}{2}$ (c—b) (en nommant a l'angle fkr, c & b les angles de direction des forces motrices avec celle de leur résultante ko, & en désignant par T & t les tensions de cr & fa.). Comme il y a égalité, dans le cas supposé de l'équilibre, entre b & c ainsi qu'entre T & t (220), on a R$=2t\,cos.\frac{1}{2}a$. Cette formule fait voir que la charge R est la plus grande possible lorsque $a=o$ ou lorsque les cordons rc & fa sont paralleles ou dans la position de & qi.

Remarquons que la résultante ko agit toujours dans le plan de la corde & des forces motrices, & que l'équilibre ne s'établit que dans cet état des choses. Ainsi une poulie attachée par le bout b de son estrope à un point fixe, doit l'être de maniere que son rouet puisse toujours se placer librement dans le plan des cordons lorsqu'ils sont tendus. Telle est la théorie de la construction des poulies. Examinons actuellement comment elles peuvent être employées à la communication du mouvement.

227. Un corps qui est à mouvoir, peut être attaché, à l'extrémité f d'une corde, qui passe sur le contour d'une poulie fixée invariablement dans une place déterminée, & qui est tirée par une puissance motrice appliquée à l'autre extrêmité r. Il peut aussi être lié en b à la poulie elle-même, & alors la corde qui embrasse celle-ci, est fixée par son extrêmité f au point f, tandis qu'elle est tirée en r par la force qui tend à mouvoir le corps & la poulie en même temps. Ces deux états de choses ont fait donner à ces poulies employées différemment, les noms de *fixes* & de *mobiles*. Considérons comment le mouvement est communiqué à l'aide d'une *poulie fixe*. Les deux cordons rc & fa, étant également tendus par la force qui agit en r, & par le corps qui oppose en f une égale résistance, le mouvement de f est nécessairement nul, & la résultante ko qui passe alors par le centre o de la poulie est détruite par la résistance de l'axe o ou par celle de ses supports. Mais le cordon cr, est-il sollicité en r par une force supérieure à celle qui lui résiste en f, le cordon fa doit céder à cet excès de tension qui lui est communiqué, & le corps en f

doit recevoir du mouvement. D'ailleurs au moment où cet état des choſes s'établit, les tenſions des cordons *cr* & *af* ceſſent d'être égales, & leur réſultante qui ne paſſe plus alors par le centre *o* de la poulie a une direction qui fait avec *kcr* un angle plus petit qu'avec *kaf*. Le moment de cette réſultante eſt même tel qu'en nommant z ſa diſtance au point *o*, on a l'équation (188), $R.z = T.oc - t.ao$. Ainſi cette diſtance z, d'après les ſuppoſitions, ne peut être nulle, & la poulie eſt alors ſollicitée à tourner dans le ſens *abc* autour de ſon axe.

Remarquons que tous les effets qui viennent d'être indiqués, ont également lieu dans toutes les ſituations qu'on peut donner à la corde qui ſert à tranſmettre l'action de la force motrice à l'aide d'une poulie fixe, & que les tenſions des deux cordons qui ſont tangens à la poulie, reſtent les mêmes lorſque la corde a les poſitions *Abaf*, *rcaf*, *edbqi*, ou toute autre poſition particuliere; c'eſt pourquoi la corde dans chacun de ces états ſollicite au même mouvement, le corps attaché en *f*, lorſque la même force motrice eſt appliquée en *r*; & celle-ci agit ſur le corps, par l'intermede de la corde, comme ſi elle lui étoit immédiatement appliquée. Son effet n'eſt augmenté ni altéré par l'emploi de la poulie fixe (toutes ces conſéquences ſont vraies en n'ayant aucun égard, ni au frottement, ni au poids des poulies, ni à la roideur des cordes, &c.).

Beaucoup de poulies deſtinées à de pareils uſages, ſont employées fréquemment dans la marine, telles ſont les galoches, ainſi que les poulies de retour, de conduite, & toutes celles qui ſont aiguilletées à des points fixes dans les vaiſſeaux.

228. Lorſqu'un corps à mouvoir eſt lié en *b*, à une poulie mobile, ſuppoſons qu'une extrêmité *f* de la corde qui embraſſe cette poulie, ſoit fixement attachée en ce point, alors la force qui eſt employée à produire le mouvement eſt appliquée à l'autre extrêmité *r*. Dans le cas de l'équilibre, & la corde ayant la poſition *rcaf*, la réſultante *ko* eſt la force qui ſoutient le poids ou l'effort qui en *b* s'oppoſe au mouvement du corps. Cette réſultante nommée $R = 2t \cos. \frac{1}{2} a$. Ainſi une force appliquée

en *r* & qui eſt capable de produire une tenſion *t* dans une corde, ſuffit pour ſoutenir un effort qui appliqué en *b*, eſt égal à $2t\ cos. \frac{1}{2} a$, ou à $2t$, lorſque les cordons *rc* & *af* ſont paralleles. Une force F qui tire par le point *e*, la corde *edbqi* fixée en *i*, peut donc faire équilibre à une force double (2F) qui eſt appliquée en *b* ſur le bout de l'eſtrope de la poulie.

Suppoſons que cet état d'équilibre vienne à être troublé, par l'augmentation de F qui agit en *e*; alors la tenſion de *ed*, ſurpaſſe au premier moment celle du cordon *iq*, & la réſultante de ces tenſions qui d'abord ne paſſe pas par le centre *o* de la poulie ſollicite celle-ci, non-ſeulement à un mouvement progreſſif, mais auſſi à une rotation autour de ſon axe, dans le ſens *qbd*, ou plutôt autour de ſon centre de maſſe (196). Bientôt après le moment de l'action de la force F, les tenſions des deux cordons *ed* & *iq* deviennent égales & leur réſultante *ko*, imprime au corps à mouvoir, une impulſion double de l'accroiſſement de F. Un tel réſultat annonce l'emploi avantageux qu'on peut faire & qu'on fait effectivement de la poulie mobile, dans la marine. Remarquons d'ailleurs que ſi le cordon *ed* pendant cette communication de mouvement s'alonge d'une certaine grandeur *a*, le cordon *qi* s'accourcit également; & la différence des longueurs de ces cordons eſt 2*a*; c'eſt-à-dire que le mouvement de *e* eſt de 2*a*, tandis que celui du corps qui eſt attaché en *b* n'eſt égal qu'à *a*. Ce rapport a fait dire que dans ce mouvement le point *e* ſe meut deux fois plus vîte que le corps qui eſt lié en *b* à la poulie mobile.

Les poulies d'écoute & d'amure ſont des poulies mobiles. Leurs cordages ſont attachés au vaiſſeau par une extrêmité, & ils ſont tirés par l'autre extrêmité pour établir plus facilement les baſſes-voiles, comme elles doivent l'être. On ſent que dans l'action des manœuvriers, les branches de ces cordages doivent être maintenues paralleles afin qu'il en réſulte le plus grand & le plus prompt effet. On doit faire la même remarque ſur l'art d'employer des cargues, des balancines, des bras & toutes les manœuvres qui ſont doubles..

229. L'avantage, qui est attaché à l'usage d'une simple poulie mobile, d'aider à vaincre une résistance qui est double de l'effort qu'on applique à l'extrêmité de la corde dont cette poulie est embrassée (lorsque les cordons sont paralleles), a fait imaginer divers assemblages de poulies *fixes* & *mobiles*, pour multiplier des forces disponibles ou pour leur faire surmonter des efforts plus considérables. Ces assemblages souvent nommés *moufles*, portent dans la marine, les noms de *palans*, de *caliornes*, de *candelettes*, de poulies de *mâtage*, de *carenage*, de *lançage*, &c. Les fig. 66 & 67 présentent des combinaisons ordinaires de poulies fixes & mobiles; & les cordons qui embrassent successivement ces poulies sont établis paralleles pour la plus grande utilité de ces caliornes & palans. Dans la fig. 66 qui représente un palan, il y a deux rouets *o* & *m* placés dans une caisse longue qui devient un systême *fixe* de poulies, parce que cette caisse est invariablement attachée en *b*; & deux autres rouets *l* & *u*, dans une pareille caisse forment un systême *mobile* de poulies. Supposons que le poids ou l'effort P qui est à vaincre, soit lié en *g* à la caisse mobile, & que la force motrice F soit appliquée en *e*, à l'extrêmité de la corde *ebqhzptln*, qui embrasse successivement les rouets *o*, *u*, *m*, *l*, & dont l'autre rouet est attaché à la caisse fixe en *n*. Dans cet état des choses, s'il y a équilibre entre F & P, les tensions de tous les cordons doivent être égales. Comme d'ailleurs les rouets d'un tel palan ont des diametres différens, afin que les cordons qui les embrassent successivement puissent être établis paralleles; on peut aisément calculer les résultantes de leurs tensions. C'est pourquoi la résultante des 4 cordons qui embrassent les rouets de la caisse fixe, équivaut à 4 fois les tensions d'un de ces cordons, & elle est détruite par la résistance du support *b* auquel est liée la caisse fixe. Par la même raison, la résultante des tensions des cordons qui passent sur les rouets de la caisse mobile, est la force qui fait équilibre à l'effort P appliqué en *g*. Cet effort P doit donc ici être égal, à la somme des tensions ou des efforts des quatre cordons qui partent de la caisse mobile. Ainsi la force F qui équivaut à la tension d'un

ſeul de ces cordons, exerce ſur P par le moyen de ce palan, une action quatre fois plus grande que ſi elle lui étoit appliquée immédiatement. Un pareil palan, tel que les candelettes d'un mât, n'eſt-il composé que de deux rouets *o* & *m* placés dans une caiſſe fixe & longue, & d'une ſeule poulie mobile *n* ? La force F eſt-elle toujours ſuppoſée agir en *e* ſur l'extrêmité de la corde *ebqh zptl* qui par l'autre bout eſt attachée à la poulie mobile *u*, pour vaincre un effort P appliqué en *g*? Alors la réſultante qui lutte contre P, eſt triple de la tenſion de chaque cordon qui tient à la poulie mobile, & l'effet de la force P eſt donc triple par l'uſage des candelettes de mât.

En général l'effet d'une force F, appliquée à un tel palan, eſt multiplié autant de fois qu'il y a de cordons aboutiſſans à la caiſſe mobile. Ces vues préſentées ſur l'état d'équilibre de tels palans, ne laiſſent aucune difficulté pour juger de ſon état de mouvement.

On obtient les mêmes avantages, de l'uſage d'un autre ſyſtême de poulies repréſenté (fig. 67), & par les mêmes raiſons. Ici des rouets ſont placés parallélement dans une large caiſſe deſtinée à être fixe ou mobile, & ils roulent ſur un axe commun, qui les traverſe perpendiculairement au plan de leurs faces, & qui eſt porté par la caiſſe. Suppoſons deux caiſſes de cette forme qui contiennent chacune trois rouets. Si une force motrice F eſt appliquée en *a* à l'extrêmité de la corde continue *abcduoiefrzx* qui paſſe ſucceſſivement ſur les rouets des caiſſes fixes & mobiles, & dont l'autre extrêmité eſt attachée à la caiſſe fixe ; ſi l'effort P qui eſt à vaincre, eſt exercé ſur le point G de la caiſſe mobile ; & enfin s'il y a équilibre entre P & F par le moyen de cet aſſemblage de poulies qui repréſente des caliornes de mâts, l'effet de la force F eſt multiplié autant de fois qu'il y a de cordons aboutiſſans à la caiſſe mobile ; & parconſéquent ici, cet effet eſt ſix fois plus grand ſur P que ſi la force F avoit été appliquée immédiatement à P. Dans les vaiſſeaux il y a pluſieurs ſyſtêmes de poulies qui reſſemblent à celui qui vient d'être décrit & dont es effets reſtent ainſi ſuffiſamment expliqués. On doit

mettre dans cette claſſe, les poulies de guindereſſe, les poulies de capon, &c. & l'utilité de ces caliornes ainſi que de tout autre ſyſtême de poulies qu'on peut imaginer eſt auſſi facile à reconnoître qu'à apprécier d'après les principes précédens. On doit auſſi remarquer que ſi l'effet d'une force appliquée à l'extrêmité *a* du garant d'une caliorne par exemple eſt multiplié un certain nombre de fois, lorſque ſon action eſt tranſmiſe par un tel moyen à un corps à mouvoir qui eſt en *g*, la viteſſe de *g* eſt autant de fois plus petite que celle du point *a*.

230. La poulie, telle que nous venons de la conſidérer, n'eſt qu'un plateau circulaire qui roule ſur un axe fixe & court & qui a peu d'épaiſſeur. On peut néanmoins imaginer que, cette épaiſſeur, ainſi que l'axe de rotation, acquierent plus de grandeur; alors il en réſulte un cylindre d'une certaine longueur qui prend le nom ou de tour, ou de treuil, ou de *cabeſtan*, ou de *virevaut* & qui eſt mobile ſur ſon axe.

Nous avons vu (219) qu'une force motrice qui à l'aide d'une corde paſſée ſur une poulie fixe, agit ſur un corps attaché à l'extrêmité de cette corde, ne produit pas plus d'effet que ſi elle étoit immédiatement appliquée à ce corps; c'eſt pourquoi on a cherché, à rendre le tour plus favorable à l'effet des forces employées. Un obſtacle à vaincre, ou un corps P à mouvoir, fait-il effort en *t* (fig. 68) dans le ſens *tq* pour faire tourner un cylindre A*t*B dans le ſens *oſa* ſur ſon axe AB, la force motrice, qui lui eſt oppoſée, & qui doit l'être avec avantage, eſt appliquée par conſéquent, (à l'égard de l'axe AB), non ſur le contour du cylindre, mais en un point *i*, ou *g*, ou *b*, &c. qui eſt à une diſtance *in*, ou *gn*, ou *b*N, plus grande que celle de P, qui eſt le rayon du cylindre.

Soient ces deux puiſſances P & F en action & tendantes à faire tourner le treuil en ſens contraire; ſoient auſſi nommées *b* & *a* leurs diſtances à AB en repréſentant d'ailleurs (197) la viteſſe angulaire & le moment d'inertie du treuil (à l'égard de AB) par R & MA^2; on a l'équation $R.MA^2 = F.b - Pa$. Ainſi, dans l'état

d'équilibre ou R=o, on a Fb=Pa. Peut-être douteroit-on de la vérité de cette équation parce que les forces F & P ne sont pas dirigées dans un seul & même plan, mais on s'en assure aisément par les considérations suivantes.

Soient *Ai* la direction de l'axe de rotation du treuil (fig. 82), & deux plans PCB & *de*F auxquels cet axe est perpendiculaire. Imaginons que ces plans passent l'un par la direction P*c* de la puissance P & l'autre par celle *e*F de la puissance F. Les lignes B*c* & *de*, sont menées des points B & *d* perpendiculairement sur les directions de P & F. Quoique ces dernieres soient dans des plans différens, on peut, d'un point A quelconque de l'axe A*i*, supposer qu'on ait mené des lignes ACK & A*eo*, qui viennent rencontrer en K & *o*, un même plan qui est parallele à P*c*B comme à F*ed*. Dans cet état des choses, on peut regarder la force F*e* comme composée de deux forces paralleles, l'une qui passe par le point A de l'axe & l'autre par le point O dans le plan *o*K. Celle-ci nommée O est telle que O.A*o*=F.*e*A. La force P étant décomposée de la même maniere, celle de ses composantes nommée K qui passe par *k* dans le plan K*io* est telle aussi que, K.AK=PAC. On a donc ces deux proportions O:F::*e*A:A*o* & K:P::A*c*.AK. Mais A*e*:A*o*::*ed*:*oi* & A*c*:AK::B*c*:K*i* à cause des triangles semblables dont ces lignes sont les côtés. D'ailleurs dans l'état supposé d'équilibre, les forces K & O qui sont dans un même plan K*io*, doivent se balancer mutuellement dans leur tendance contraire à faire tourner le treuil; par conséquent K.*i*K=O.*oi*, c'est-à-dire que la résultante des forces K & *o* passe par le point *i* de l'axe A*i*; & il s'ensuit que, puisque *o*.*oi*=F.*ed* & *k*.*ki*=P.B*c*, suivant les proportions précédentes, on a l'équation fondamentale F.*ed*=P.B*c* ou F.*b*=P.*a* comme on l'a dit précédemment.

Ces idées peuvent s'appliquer à la recherche de l'effet qui peut résulter des actions combinées de plusieurs forces placées dans des plans différens & tendantes à faire tourner un cylindre sur son axe A*i*. Les conditions de l'équilibre étant ainsi établies & étant présentées dans l'équation précédente, on voit aisément comment on peut faire passer un cylindre ou un treuil, de l'état de repos à

celui de mouvement. Il suffit alors d'augmenter, soit l'intensité de la force motrice F, soit sa distance relativement à l'axe Ai. On doit aussi reconnoître avec quel avantage, une foible puissance F peut surmonter un effort P plus considérable.

231. Ainsi un cylindre (comme le virevaut dont on fait usage dans des petits bâtimens pour lever leurs ancres) est-il placé horizontalement; & son axe est-il sur des supports fixes. Plusieurs barres telles que *bn*, dont la longueur surpasse plus ou moins le rayon du cylindre, sont implantées dans l'épaisseur de ce dernier, perpendiculairement à son axe, & en divers points; & des puissances appliquées à l'extrêmité de ces barres sont employées avec succès à tirer de grands poids P attachés à une corde *tq* qui s'enroule sur le cylindre pendant sa rotation.

Ainsi une roue de gouvernail (dont le rayon est plus grand que celui du cylindre à la base duquel elle est fixée perpendiculairement à son axe) favorise considérablement les effets de la force d'un timonier, lorsqu'il agit pour vaincre la résistance que l'eau oppose à la rotation du gouvernail, ou à l'enroulage des drosses sur le cylindre (nommé marbre) de cette machine.

Ainsi, avec des barres longues *bn*, dont une extrêmité, est implantée dans la tête, d'un cylindre vertical, tel qu'un cabestan de vaisseau; on parvient à élever du fond de la mer à sa surface, des ancres d'un poids considérable, en les tirant à l'aide d'un cordage qu'on force d'envelopper par des tours successifs la fusée du cabestan.

Dans tous ces cas la résistance qui est à vaincre, agit à une distance de l'axe de rotation, qui n'est égale qu'au rayon du cylindre, tandis que les forces motrices ou les puissances, sont placées à des distances plus grandes du même axe.

232. Il est à propos de remarquer qu'une force qui fait tourner un cabestan ou un virevaut, sur leur axe, impriment aussi à celui-ci une impulsion tendante à lui donner une vitesse progressive qui n'est anéantie que par la résistance des supports. En effet les deux forces F & P

que nous avons considérées ont été décomposées chacune en deux autres dont les unes passent le point A (fig. 82) & dont les autres sont dans un plan *ok* qui coupe l'axe au point *i*. Les premieres agissent immédiatement sur l'axe & si les secondes qui sont dans un même plan, étoient aussi dans un état d'équilibre, elles se réduiroient à une seule force (186) qui passeroit par le point *i*. Ainsi l'axe A*i* d'un treuil est sollicité, par des composantes des forces qui produisent la rotation de cette machine, à prendre un mouvement progressif. Dans le cas où deux forces égales & contraires, telles que F*e* & S*n*, placées à même distance de l'axe A*i*, dans le même plan *es* auquel A*i* est perpendiculaire, tendroient à faire tourner un cabestan dans le même sens, elles ne feroient pour déplacer l'axe A*i*, que des efforts qui se détruiroient mutuellement. C'est par cette considération que dans l'usage des cabestans, on doit, pour diminuer les efforts exercés sur l'axe A*i*, répartir des puissances motrices, & égales, de part & d'autre de cet axe ou de la tête de ces machines.

Les principes précédens servent d'ailleurs à rendre raison des effets qu'on obtient, en employant des tours qu'on fait mouvoir, soit par des manivelles, soit par de longues barres, ou pour roidir certaines manœuvres, ou pour faire jouer une pompe à seaux, à chapelets; ou pour *alonger* des cordages dans l'attelier de la garniture, ou pour faire les rostures de mâts, des berceaux, ou pour ébranler de grandes masses, ou enfin pour exécuter dans les ports diverses manœuvres très-fréquentes & très-variées, avec une grande économie de forces.

233. C'est aussi à l'aide des mêmes principes, qu'on explique l'effet, des roues dentées, des pignons, & de toute sorte d'engrenages. Il suffit pour cette application, d'analyser une machine nommée *cric*, qui est simple & très-utile, ou très-avantageuse pour communiquer du mouvement à de très-grandes masses avec des forces moyennes. Nous avons vu (130) qu'une force F qui agit avec un levier *bn* (fig. 68) peut surmonter une force supérieure P qui est appliquée en *q*, à l'extrêmité d'une corde *tq*, en obligeant cette corde de s'enrouler sur le contour du cylindre AB, dont elle produit la rotation. Si l'effort P

étoit tranſmis, non à l'aide d'une corde *tq*, mais par une verge inflexible qui preſſeroit une dent pratiquée en *t* dans l'épaiſſeur du cylindre, les apparences changeroient, mais les réſultantes ſeroient encore les mêmes, & par des raiſons ſemblables. Soit donc une barre de fer *qg* dentelée ſur une de ſes faces (fig. 69), & ſuppoſons qu'une de ſes dents repoſe ſur celle d'une roue dentée O. On peut conſidérer cette roue, comme un cylindre de peu de longueur, qui a été dentelé ſur ſon contour, & qui eſt employé pour tranſmettre l'effet d'une force F appliquée à l'extrêmité d'une manivelle *po*. L'effort P que F doit ſurmonter, eſt ſuppoſé agir en *q* ſur l'extrêmité de la barre inflexible *qg*, & dans le ſens *qg*. Nommons *a*, le rayon de la roue dentée O, ou la diſtance du point ſur lequel repoſe la dent de *qg*, à l'axe de la roue *o*; & *b* la diſtance *po* du même axe à la direction de la force F qui eſt ſuppoſée dans un plan auquel l'axe de la roue eſt perpendiculaire. On doit dans l'état d'équilibre, avoir comme précédemment, l'équation ſuivante $Fb = PA$; & on doit ainſi juger non-ſeulement du rapport de la force F à la réſiſtance P, mais auſſi du mouvement, qu'on peut produire à l'aide de cette machine par l'augmentation, ou de l'intenſité de F, ou de la grandeur de *b* qui ont lieu dans l'état d'équilibre.

Si cette roue dentée O, (qu'on voit fig. 83) étoit ſuppoſée engrainer avec une autre roue excentrique B, dont le rayon ſeroit *q* & qui porteroit concentriquement ſur le même axe un pignon D ou une petite roue dentée d'un rayon *t*. Si les dents de cette derniere roue D engrainoient immédiatement avec celles de la barre de fer *qg*; dans ce nouvel état des choſes, & l'équilibre ayant lieu, on auroit les équations ſuivantes: $pq = ft$ & $pa = Fb$; (en nommant, *f* la force qui agit en *q* ſur la barre dentée, & *p* la force qui exerce ſon action ſur la dent *z* de la roue B ou O); ainſi en multipliant ces équations on parvient à celle-ci $qFb = aft$, ou à cette proportion $F : f :: at : qb$; c'eſt-à-dire que la force motrice, eſt à l'effort qu'elle balance, comme le produit des rayons des pignons ou des petites roues *o* & D, eſt à celui des rayons de la grande roue B & de la manivelle *po*. Ainſi un *cric*,

avec ce ſecond équipage, l'emporte autant ſur le premier, que S eſt ſupérieure à P : ou les réſiſtances que la puiſſance F peut ſurmonter, à l'aide de l'un & de l'autre cric, ſont dans le rapport de *q* à *t*. On voit auſſi que ces forces étant en équilibre, ces machines paſſent à l'état de mouvement, ſi la diſtance de la force F au centre *o*, ou ſi ſon intenſité, ou ſi l'une & l'autre reçoivent quelqu'accroiſſement (en faiſant toujours abſtraction des effets du frottement, &c.) cet aſſemblage, d'une barre de fer *qg* (fig. 68) & d'une ou de pluſieurs roues dentées, étant renfermé dans une caiſſe *abdc* longue & forte qui ſert de ſupport aux axes des roues, forme la machine qu'on nomme *cric* ſimple ou double. La force motrice agit en *p* ſur la manivelle *po*, & la barre de fer dentelée *qg* combat les efforts qui dans le ſens *qg* s'oppoſent à ſon mouvement dans le ſens oppoſé.

Il eſt aiſé, d'après cet exemple & ces réflexions d'imaginer combien ou peut varier, & comment on peut apprécier, les moyens de favoriſer plus ou moins les effets d'une puiſſance donnée, par diverſes combinaiſons de roues dentées, ou par un mécaniſme qui eſt ſemblable à celui du cric. Car ce qui vient d'être dit ſur cette derniere machine peut être immédiatement appliqué à une foule de ſyſtêmes de roues dentées ou d'engrenages ; & on peut en conclure aiſément l'explication des machines ſemblables qui ſont employées, ſoit pour élever de grandes maſſes telles que des canons, des mortiers, &c., ſoit pour diriger les couteaux qui ſervent à forer des pieces de bois ou de métal, telles que des poulies, des pompes, des bouches à feu, &c. ; ſoit pour faire tourner des meules de moulin, &c., en conſidérant, dnns ces dernieres applications, les lanternes garnies de fuſeaux comme remplaçant, ſans aucune différence d'effet, des pignons ou des roues dentées ; & en remarquant auſſi que la tranſmiſſion des forces ſe fait toujours également par les roues dentées, lorſque leurs dents qui s'engrainent ſont placées, ou dans les plans de ces mêmes roues, ou obliquement, ou perpendiculairement à ces plans.

234. Un plan eſt-il oblique à la direction d'une force motrice ? Il reçoit le nom de *plan incliné*. Tel eſt le plan BECD (fig. 36), à l'égard d'une force F dont la

direction est la ligne az, qui la représente par sa longueur, & qui fait avec ce plan un angle azo. La force F, dans un tel état d'obliquité, peut être décomposée en deux autres, l'une ao qui est perpendiculaire au plan, & l'autre oz qui lui est parallele. Celle-ci, sans action contre ce plan, ne peut tendre à lui communiquer du mouvement. La premiere agit seule sur ce même plan, qui la détruit s'il est inébranlable, (en supposant toutefois que la force F soit appliquée en un point z de ce plan, qui est sur sa direction).

Imaginons qu'un corps solide soit placé sur un tel plan qu'il ne touche que par un seul point z. S'il est soumis à l'action de F dirigée suivant az; alors, (en supposant cette force décomposée comme précédemment), celle des composantes qui est perpendiculaire au plan est détruite par sa résistance, & la composante parallele à ce même plan tend à entraîner le corps suivant sa direction. On peut même dire plus généralement que le corps se trouve alors sollicité dans le point z, & par les deux composantes P & p de la force F, & par la résistance R, que le plan oppose; parce que celle-ci peut être regardée comme une troisieme force motrice dont la direction d'ailleurs est perpendiculaire à la surface du même plan. Le centre de masse du corps supposé doit donc se mouvoir comme si trois forces lui étoient immédiatement appliquées (196); c'est-à-dire que ce corps doit obéir, si aucun obstacle ne s'y oppose, à la composante de F qui le sollicite à se mouvoir parallelement au plan. Remarquons aussi que si les directions de F & R (196) ne passent pas par le centre de masse des corps, ou si la somme de leurs momens à l'égard de ce même centre, n'est pas nulle, le corps doit d'ailleurs tourner sur lui-même.

Ces réflexions conduisent à conclure, qu'il est des conditions, auxquelles seules le centre de masse d'un corps sollicité par une force F peut rester sur un plan sans mouvement. Ces conditions sont 1° que la force motrice F soit perpendiculaire à ce plan; & 2° que sa direction passe par le point de contact z du corps avec ce plan. La nécessité de la premiere condition n'est pas douteuse,

d'après ce qui précede ; & celle de la deuxieme est aisée à démontrer. En effet, si z n'étoit pas le point de contact du corps & du plan, tandis qu'il est commun à celui-ci & à la direction de F ; alors cette force pourroit être décomposéé en deux forces paralleles, dont l'une f passeroit par le point unique de contact, tandis que l'autre f seroit placée, à égale distance & de l'autre côté de az. La premiere étant décomposée en deux dont l'une b seroit parallele & l'autre e, perpendiculaire au plan; la composante e seroit détruite par la résistance $r = e$ du plan inflexible ; & le centre de masse du corps, sollicité au mouvement par les forces f, b, e & r, ne devroit obéir qu'à la résultante des forces f & b. La derniere b ne tendroit qu'à mouvoir ce centre parallélement au plan ; mais la composante f (inclinée comme az à ce plan) tendroit à rapprocher ce centre du plan. Ce corps seroit donc alors sollicité à se renverser, ce qui n'auroit pas lieu si la direction de F passoit par le point de contact. D'ailleurs les momens des forces à l'égard de ce centre feroient connoître par la valeur positive ou nulle de leur somme, si le corps seroit sollicité à tourner ou non sur lui-même. Le centre de masse d'un corps ne peut donc, qu'aux conditions indiquées, rester sans mouvement sur un plan, lorsqu'il est sollicité par une force quelconque.

Si un corps touche un plan AB (fig. 70) en deux seuls points i & n, son repos ne peut avoir lieu qu'autant que la direction de la force F qui le sollicite au mouvement, est perpendiculaire au plan ; & il faut aussi qu'elle passe, soit par un des points i & n ; soit, entre ces deux points, & de maniere qu'elle soit placée avec ces points dans un seul & même plan. Car, dans cette derniere & seule position, la force F peut être décomposée en deux autres forces paralleles qui sont dirigées par chacun des points de contact i & n (190) ; & chacune de celles-ci, étant perpendiculaire au plan, est alors anéantie par la résistance que le plan oppose en i & en n. La force F est-elle oblique au plan, il ne résulte aussi de ses composantes, (qui doivent passer par les points de contact), & des résistances du plan, qu'une seule force

qui eſt parallele au plan, c'eſt-à-dire qu'alors le corps ne doit pas ſe renverſer, quoique d'ailleurs il puiſſe tourner ſur ſon centre, comme on pourra en juger par la valeur de la ſomme des momens des forces.

Si les points de contact, d'un corps, & du plan ſur lequel il eſt appuyé, ſont plus ou moins multipliés, le repos du corps exige 1° que la force motrice F qui l'anime ſoit dirigée perpendiculairement à ce plan, & 2° que ſa direction paſſe dans l'intérieur d'un polygone qu'on formeroit en réuniſſant par des lignes droites les divers points de contact ſuppoſés. Cette conſéquence eſt fondée entiérement ſur les réflexions précédentes, qui portent auſſi à dire, que ſi pluſieurs forces ſollicitent au mouvement un corps qui eſt appuyé ſur un ſeul plan, le centre de maſſe de celui-ci ne peut reſter en repos (en n'ayant pas égard à ſa rotation ſur ſon centre) qu'aux conditions ſuivantes. Il faut 1° que toutes les forces ſuppoſées ſe réduiſent à une ſeule réſultante qui ſoit perpendiculaire au plan; & il faut 2° que cette réſultante ou ſes compoſantes paſſent par les points de contact du corps & du plan. Enfin un corps eſt-il appuyé ſur pluſieurs plans, avec leſquels il a par conſéquent des points de contact; alors les forces motrices, doivent toujours ſe réduire à autant de réſultantes qu'il y a de plans; & chacune de ces dernieres doit être non-ſeulement perpendiculaire à chaque plan reſpectif, mais les directions de chacune ou de leurs compoſantes doivent paſſer auſſi par les points de contact ſuppoſés, du corps avec chaque plan.

235. Comme toutes les forces qui peuvent ſolliciter un corps au mouvement, ſe réduiſent à deux (201) dont l'une paſſe par le centre de maſſe & l'autre à une certaine diſtance de ce centre, cherchons comment de telles forces peuvent produire le repos ou le mouvement du centre de maſſe d'un corps qui eſt appuyé ſur un plan. Suppoſons, le centre de maſſe d'un corps en *o* (fig. 70), une force F dirigée ſuivant *oq* & une force P qui agit auſſi ſur le même corps dans le ſens *ef*. Les directions *ef* & *oq* de ces forces, (ſi l'effet combiné de celles-ci eſt de maintenir le centre *o*, ſans mouve-

ment progreſſif, ſur le plan AB), doivent être placées dans un même plan qui ſoit, comme leur réſultante, perpendiculaire à AB. (Le plan d'appui du corps n'eſt ici repréſenté que par AB qui eſt la ligne d'interſection de ce plan avec celui des directions des deux forces). Ces directions prolongées ſe rencontrent en *e*; & celle *en* de la réſultante des forces F & P doit être non-ſeulement perpendiculaire à AB, mais elle doit auſſi paſſer par un point de contact *n* du corps avec AB; parce que ce n'eſt qu'à ces conditions que le centre de maſſe *o* doit reſter en repos ſur AB ou ſans mouvement progreſſif. Dans cet état d'équilibre, on peut faire cette proportion (187) F:P:: *ſin. ſen ſin. neq.* Ainſi une puiſſance P, eſt-elle employée à détruire l'effet d'une force F qui tend à entraîner le centre *o* d'un corps de B vers A ſur un plan AB incliné à F, il faut toujours qu'elle ſoit telle qu'on ait l'équation F. *ſin. neq*=P. *ſin. ſen.* Elle doit donc être la plus petite poſſible lorſque l'angle *ſen*, eſt de 90°, ou lorſque ſa direction eſt parallele au plan incliné AB. Dans tout autre cas, il faut pour produire le repos du corps, une puiſſance P plus conſidérable : ainſi il en réſulte cette regle de pratique, que pour maintenir un corps peſant ſur un plan incliné, comme un vaiſſeau ou ſon berceau ſur ſon chantier, il faut que les cordages, ou les clefs du berceau, qu'on emploie dans ce deſſein, ſoient dirigés parallélement au plan du chantier, lorſque les vues ſont d'économiſer les forces ou d'être plus aſſuré du ſuccès des moyens. Néanmoins on pourvoit à ſoutenir un vaiſſeau dans une ſituation droite ſur ſon chantier, en l'étançonnant par des acores multipliées, qui s'appuyant par leurs pieds ſur ce plan, de part & d'autre de la quille & du centre de maſſe, & s'uniſſant par leur tête au corps du bâtiment, rendent ſi nombreux, les points de contact de ce corps avec ſa cale, que dans cet état la verticale dirigée par le centre de maſſe, tombe néceſſairement entre les pieds de ces acores. Le même objet eſt rempli par des colombiers & des clefs, lorſqu'un vaiſſeau eſt prêt à être lancé à la mer.

De cet état d'équilibre que nous venons de conſidérer,

un corps doit donc paſſer à celui de mouvement, ſi l'une des forces P ou F, ſans changer de direction, varie en intenſité relative; ou ſi on n'a plus l'équation P *ſin. ſen* = F. *ſin. neq.* C'eſt ainſi que le berceau d'un vaiſſeau, étant dégagé de toutes ſes entraves gliſſe ſur le chantier qui eſt incliné à la direction de la peſanteur, & emporte à la mer le vaiſſeau qu'il ſoutient. C'eſt ainſi qu'un vaiſſeau remonte ſur une cale ou ſur un chantier, lorſque la force P employée pour cet effet eſt telle que P *ſin. ſen* ſurpaſſe F *ſin. neq* (en n'ayant égard, ni au frottement, ni aux autres cauſes qui peuvent retarder ou arrêter un tel mouvement). Nous remarquerons ſeulement que l'économie des forces exige que la direction de P ſoit parallele à la cale, dans cette opération importante.

Suppoſons que deux lignes A*c* & B*c* ſoient menées, l'une perpendiculairement & l'autre parallélement à la direction *oq* de la force *f*. Nommons AC, la baſe du plan AB, & BC ſa hauteur; l'angle *neq* eſt égal à BAC, on a l'inclinaiſon du plan AB à l'égard de ſa baſe AC. Ainſi lorſque la direction *fe* de P eſt parallele à BA on peut dire dans l'état d'équilibre que F eſt à P comme la longueur AB du plan incliné eſt à ſa hauteur BC. Si *fe* eſt parallele à AC alors F:P::AC:BC; & on voit, dans cette ſituation relative des forces, qu'une partie de P eſt employée uniquement à preſſer le plan AB, ſans contribuer à maintenir le corps en repos. Enfin généralement on peut dire que la partie de P qui ſert utilement à ſoutenir un corps peſant ſur un plan incliné, & ſans mouvement progreſſif, eſt d'autant plus grande que ſa direction *ef* approche plus d'être parallele au plan; & cette force P qui eſt néceſſaire à cet effet eſt d'autant plus petite que l'inclinaiſon BAC du plan à l'égard de l'horizon eſt moins conſidérable. Réciproquement le corps eſt d'autant moins ſollicité par F à gliſſer de B vers A, que l'angle BAC a moins de grandeur.

236. On peut faire une application utile, de cette théorie à la marine en conſidérant comment deux forces qui agiſſent ſur une ancre, & dont l'une paſſe par ſon centre de maſſe, tandis que l'autre eſt dirigée par tout autre point, peuvent produire le renverſement de cette ancre,

lorſqu'il

lorsqu'il devient nécessaire. C'est sur ces principes, qu'on a imaginé les dispositions relatives de toutes les parties d'une ancre, & qu'on a jugé que pour être propre au service des vaisseaux, elle doit avoir, un jas & une verge d'une grande longueur; des bras courts, & perpendiculaires au plan de la verge & du jas; & enfin un centre de masse très-rapproché de la croisée. Ce dernier point a été obtenu en partie, en donnant un jas de bois aux ancres qui pour d'autres raisons sont faites de fer forgé; & l'expérience a justifié l'utilité de toutes ces regles.

237. Considérons actuellement une combinaison du plan incliné, & du levier, dans une machine qui porte le nom de VIS. Il faut pour en avoir une idée simple, imaginer, 1° une ligne *urtin* (fig. 71) qui soit tracée spiralement, & extérieurement sur la surface d'un cylindre *utihn*, & de maniere qu'elle fasse, dans chaque point de sa longueur un même angle, avec le côté *uh*, ou avec l'axe *ms* de ce cylindre; il faut 2° imaginer une seconde ligne *pq*A*a*B qui comparée à la premiere soit tracée en dehors dans une direction qui lui soit parallele, & qui dans tous ses points s'éloignant également de la base du cylindre, soit à une distance plus grande de l'axe *ms*. Alors ces lignes, par leur longueur, par leur direction, & par la surface qu'on peut imaginer dans l'intervalle qui les sépare, indiquent la figure de ce qu'on nomme un filet qui ayant une certaine épaisseur pour sa solidité, enveloppe un cylindre pour en composer une vis.

Soit une puissance F qui, dirigée suivant B*u* (fig. 84) parallélement à l'axe *nr* est appliquée sur la face supérieure du filet d'une vis, & perpendiculairement à l'extrêmité du rayon *ui* du cylindre. Si la vis est supposée fixe, & n'avoir la liberté que de tourner autour de son axe, représentons (fig. 85) sa force F par *db*, & la partie élémentaire du filet de la vis sur laquelle cette force est appliquée, par *sc*. Décomposons F en deux forces placées dans un plan *edb* auquel le rayon *fb* du cylindre est perpendiculaire. L'une *be* est perpendiculaire au filet *sc*, & l'autre *ed* lui est parallele. La premiere agit seule sur le filet de la vis, & en la décomposant en deux autres *bu* & *ue*, dans le même plan, le filet est sollicité,

à descendre, par *ub* parallele à l'axe AB de la vis, & à se mouvoir horizontalement par l'autre composante *eu* qui est perpendiculaire à *bd*. Mais la vis qui est supposée ne pouvoir être déplacée, ne doit prendre ni l'un ni l'autre mouvement progressif. Il ne reste donc qu'à considérer les mouvemens angulaires que ces mêmes forces excentriques tendent à lui communiquer (sans avoir égard au frottement). La vis est sollicitée à tourner, par *eu*, autour de l'axe AB, & par *bu*, autour de l'axe *fg* qui est perpendiculaire aux deux lignes AB & *fb*. Ce dernier mouvement ne peut même naître dans la situation fixe de la vis; ainsi celle-ci, sollicitée par une force F dirigée parallélement à son axe, ne peut prendre qu'une vitesse de rotation autour de son axe AB. Si on nomme *i* l'angle *dbf* de F avec le filet *fc*, & *a* le rayon *fb*; & si on calcule dans les triangles rectangles *deb* & *beu*, les lignes *be* & *eu* en supposant que F soit représentée par *db*, on a $eb = \text{F}.\ \sin.\ i$; & $eu = eb.\ \cos.\ i$, ou $eu = \text{F}\ \sin.\ i.\ \cos.\ i$; ainsi $\text{F}a\ \sin.\ i\ \cos.\ i$ est le moment de *eu* pour faire tourner la vis autour de son axe AB. Fixons les idées par une application de ce résultat. Supposons que cette force F soit transmise en *u* (fig. 84) suivant B*u* au filet *ux* d'une vis sans fin *nr* (telle que celle qui fait partie du rouage d'un tourne-broche & qui n'a d'autre liberté que celle de tourner autour de l'axe *nr*) par une dent *no* d'une roue R qui ne peut tourner aussi que dans son plan *o* M R dirigé par l'axe *nr* de la vis. Cherchons le mouvement de la vis & de la roue dentée. La vis pressée par F, est sollicitée à tourner sur son axe, par une force telle que *eu* de la fig. 85, & dont le moment est $\text{F}a\ \cos.i\ \sin.\ i$. La dent *no* est elle-même pressée par la force BA, de se mouvoir parallélement au filet *ux*, mais elle ne peut lui obéir entiérement. En effet décomposons BA en deux autres forces B*q* & A*q*, l'une parallele & l'autre perpendiculaire au plan de la roue dentée R. La force A*q* doit rester sans effet, parce que la roue R ne peut se mouvoir dans le sens de cette force; ainsi la dent *o* ne peut que descendre suivant B*u* avec la vitesse qui lui est communiquée par B*q*. Cette derniere force B*q*, ou *du* (fig. 85) doit être calculée dans les tri. *deb* &

deu qui donnent $de = F. cos. i$, & $du = de. cos. i$ ou $du = F. cos. i^2$. Dans la machine indiquée, une force F dirigée comme on l'a ſuppoſé, doit donc (comme l'expérience le prouve) faire tourner ſur elle-même, la vis ſans fin (fig. 84) & pouſſer dans le ſens *uz* chaque dent de la roue R qui engrene avec cette vis.

Le moyen d'arrêter le mouvement & de la vis & de la dent *o*, eſt d'appliquer au point *b* du filet de la vis une force *m*, repréſentée (fig. 85) par *bt* & dirigée perpendiculairement au rayon *fb*, dans un ſens contraire à la force *eu*. Cette force tranſmiſe par le filet *ſc* à la dent *ro*, ne peut agir ſur celle-ci que par ſa compoſante *bq*, qui eſt perpendiculaire à *ro* ainſi qu'à *ſc* ſa parallele. Cette dent n'eſt donc ſollicitée au mouvement que par la force *bq* compoſante de *m*; & le filet de la vis *ſc*, eſt pouſſé par la force *qt* perpendiculaire à *bq* & ſeconde compoſante de *m*. La premiere *bq*, étant décompoſée particuliérément en deux forces *qi* & *bi*; l'une *bi*, qui eſt perpendiculaire au plan *fbd*, ne peut donner à la dent le mouvement qu'elle tend à produire, puiſque cette dent ne peut ſe mouvoir latéralement; mais l'autre *qi* qui eſt dans le plan de la roue dentée peut obtenir ſon effet lorſqu'elle agit ſeule. Cette force *qi*, oppoſée à la force *du* doit être calculée dans les tri. rectangles comparés *bqt*, & *bqi*. On y trouve que $bq = m. cos. i$, & $qi = bq\ sin. i$; donc $qi = m. sin.\ i.\ cos.\ i$.

La force *qt* qui agit en *b* ſur le filet *ſc* de la vis, doit auſſi être décompoſée en deux forces paralleles aux précédentes. L'une *qi*, qui ne tend qu'à déplacer la vis fixe, eſt detruite; mais l'autre *ti*, quoique ſans effet pour mouvoir latéralement la vis, la ſollicite à un mouvement qu'elle peut prendre autour de ſon axe, & cherchant la valeur de *ti*, par la comparaiſon des tri. *bqt* & *qit*, on trouve que $ti = m. sin. i^2$.

L'état d'équilibre de la roue dentée & de la vis ſans fin, ſous l'action combinée des forces F & *m*, exige l'égalité, non-ſeulement des forces *qi* & *du*, mais auſſi des momens des forces *ti* & *eu*. On doit donc avoir ces équations, $m\ sin. i.\ cos. i. = F\ cos. i^2$; & $ma\ sin. i^2 = Fa\ cos. i\ sin.\ i$ qui ſe réduiſent à l'équation unique $m\ sin.\ i = F$

cos. i. Si la force employée réellement pour balancer F est M; & si elle est placée parallélement à m, mais à une distance z plus grande que a, à l'egard de l'axe de la vis, alors $ma = Mz$, & dans l'état de repos Mz *sin. i* $= Fa$ *cos. i*.

Considérons actuellement, dans le parallélogramme qui est le développement du cylindre de la vis, le développement particulier d'un tour entier uxz d'un filet. Celui-ci est représenté par AB (fig. 84 & 70), tandis que celui de la circonférence tut, est AC; & la hauteur uz du pas de vis est indiqué par BC. Dans le tri. rectangle ABC, l'angle ABC est celui qui a été nommé i, & on peut y faire cette proportion *sin.i*:*cos.i*: :AC:BC: :*cir.a*:H. (en nommant H, la hauteur du pas de vis & *cir.a*, la circonférence qui a pour rayon a.) Substituons le rapport trouvé de *sin.i* à *cos.i* dans l'équation de l'équilibre; & elle se change en celle-ci Mz *cir.a* $= FHa$, ou M *cir.* $z = FH$ (parce que z. *cir.* $a = a$. *cir.* z). Nous devons donc conclure de cette équation, qu'en augmentant les valeurs de M ou de z, qui en résultent, la force M peut vaincre la pression ou la résistance F. On voit aussi que l'effet d'une force donnée M, est plus grand, ou que la résistance susceptible d'être surmontée par M, est plus considérable à mesure que la hauteur H du pas de vis a moins d'étendue.

Il est aisé, après ces raisons, de juger de l'effet d'une vis fixe qui tourne dans un *écrou* mobile. (Un écrou zo, présente comme on sait, dans son épaisseur des filets concaves, propres à recevoir les filets saillans de la vis (fig. 71)). Si une force F parallele à l'axe, est transmise en b (fig. 85) au filet de la vis, non par la dent d'une roue, mais par un écrou qui ne peut recevoir du mouvement que parallélement à l'axe; les conséquences précédentes sont applicables ici dans toute leur étendue. Il en résulte donc que la pression F exercée sur l'écrou, & par communication sur la vis, doit être balancée ou surpassée par une force M, à une distance z de son axe, lorsque le produit M *cir.* z, égale ou surpasse FH. Le micrometre adapté aux instrumens astronomiques présente une utile application de ces principes.

Un écrou est-il fixe dans tous les sens, & la vis qui le traverse, a-t-elle la liberté de se mouvoir sur elle-même, ainsi que dans le sens de son axe *sm*, (fig. 71) supposons une pression F qui agit en *s* suivant *sm* sur la vis *nu*, & qui doit être vaincue ou balancée. La force *f* ou *db* (fig. 85) que le filet de la vis transmet par divers points à l'écrou a pour composante la force *be* qui est détruite par l'écrou immobile auquel elle est perpendiculaire; & la vis n'est pressée, que par la composante *ed*, ou par ses propres composantes *eu* & *ud*, qui ne peuvent produire que, sa rotation autour de son axe AB, & son ascension suivant *bd*. On sait que $eu = f \cos. i \sin. i$ & $ud = f \cos. i.^2$ Ainsi une force *m* est-elle appliquée en *b* à la vis, dans le sens *bt*; celle-ci ne peut obéir, qu'à la force *iq* qui opposée à *ud*, est égale à $m \cos. i \sin. i$; & à la force *ti*, contraire à *eu*, dont la valeur est $m \sin. i^2$. C'est pourquoi la pression F qui se distribue également sur tous les points de contact de la vis & de l'écrou doit donc être balancée ou surmontée, lorsque le produit $m \sin. i$, égale ou surpasse $F \cos. i$; ou lorsque de tels rapports regnent entre M. *cir.* *z* & FH, si une force M agit à une distance de *z* de l'axe de la vis.

C'est une pareille vis, qui sous le nom de *vis de rappel*, est adaptée aux sextans & cercles de réflexion pour faire glisser sur le limbe de ces instrumens, par une marche uniforme & peu sensible, l'extrêmité de l'alidade, lorsqu'on se propose de faire concourir ou correspondre certaines divisions du limbe & du *nonius* de l'alidade.

Enfin une vis *hnru* (fig. 71) est-elle fixée dans tous les sens, & son écrou *zo* est-il seul susceptible d'être mu dans le sens de l'axe, & de tourner autour de lui. Si une pression F agit sur cet écrou suivant *ad* parallele à *ms*; cette force représentée par *bd* (fig. 85) doit être décomposée comme précédemment. L'une de ses composantes *be* est détruite par le filet de la vis, sur lequel est appliqué celui de l'écrou & il ne reste que la force *ed*, qui sollicite l'écrou *ro* au mouvement, par ses composantes *eu* & *ud*. L'une de celles-ci tend à produire sa rotation dans le sens *eu*, & l'autre son ascension suivant *ud*. On arrête, ou on surmonte l'effet de F, en

appliquant à l'écrou *ro* en *b* une force *m* dirigée dans un sens parallele & opposé à *eu* ; car une composante *bq* de la force *m* , est détruite par le filet fixe de la vis ; & l'autre composante *tq* , produit un effet, composé, de celui d'une force *iq* opposée à *ud* , & de celui de *ti* contraire à *eu*. Ainsi l'effet de F est balancé ou vaincu, lorsqu'il y a égalité ou supériorité entre les produits *m* *sin.i*, & F *cos.i*, ou entre M *cir. z* & FH.

Les applications de cette théorie de la vis sont très-nombreuses & très-variées dans les arts, mais les principes établis servent à expliquer ses effets dans tous les cas ; & ils rendent raison des grands efforts qu'on produit dans les ports, à l'aide des *verins*, lorsqu'on emploie ces especes de vis, pour soulever ou disposer convenablement sur des cales, des petits bâtimens dont le poids est considérable.

238. Un *coin* est encore une variété, parmi les applications des forces à des corps placés sur des plans inclinés. On sait qu'un coin est un prisme triangulaire tel que *abcdef* (fig. 3) qu'on introduit par une de ses arrêtes *fe*, entre deux corps qu'on se propose, de séparer, de comprimer, ou de maintenir à une certaine distance. La face *abde* de ce prisme & à laquelle est appliquée la force motrice, est nommée la *tête* du coin, dont le *tranchant*, est l'arrête opposée *fc*. La force F, employée à mouvoir le coin, pourroit être dirigée obliquement à la tête du coin. Mais alors supposons qu'on la décompose en deux autres, dont l'une seroit perpendiculaire à la face de la tête, tandis que l'autre lui seroit parallele ainsi qu'au tranchant. Celle-ci ne pourroit produire l'introduction de ce tranchant entre les objets à séparer ; ainsi le prisme en vertu de cette force ne serviroit pas comme coin. Il faut donc pour expliquer l'usage du coin, ne considérer que les forces motrices, qui sont utiles & perpendiculaires à sa tête. Soit *za* (fig. 72) la direction de la force F perpendiculaire à la face *qnup* Imaginons que par cette ligne on ait fait dans le coin une section ACB, au plan de laquelle soient perpendiculaires les arrêtes *nq* & *up*, afin qu'elle le soit aux faces *pust* & *qust* du coin. Afin de simplifier la question (& sans égard au frottement), ne considérons

d'abord qu'un coin tel que *qmtsinq*, dont la tête *nqmi*, eſt perpendiculaire, à la face *imts* à laquelle la direction *za* de F, eſt parallele ; & ſoit repréſentée la ſection AVC par le triangle rectangle ABC (fig. 86). La force F tend à mouvoir le coin ſuivant *oz* parallele à *Ac*, & les réſiſtances, qui contraires à ce mouvement, ſont à vaincre ou à balancer, doivent être appliquées ſur les faces du coin, en quelque points des lignes B*c* & AC, ou ſe réduire à des forces qui aient cette poſition. Ces réſiſtances d'ailleurs n'agiſſent ſur ces faces que dans une direction, qui leur eſt perpendiculaire & qui par conſéquent eſt dans le plan ABC parce que la force F employée, à les balancer ou à les ſurmonter doit ſe partager en deux autres qui leur ſoient directement oppoſées. Toutes ces conditions ſont néceſſaires puiſqu'on ne peut ſuppoſer que le coin prenne un mouvement, autre que celui qui eſt dirigé dans le ſens *oz*, & ſans aucune rotation autour d'un axe quelconque. Si ces conditions n'étoient pas remplies, des mouvemens angulaires auroient lieu pour ramener le coin dans une poſition convenable.

Soit P le point d'application de la réſiſtance extérieure qui agit ſur la face BC du coin ; & ſoit élevée en P, à BC la perpendiculaire NV qui repréſente la compoſante de F repréſentée elle-même par EV. Alors ſi de V, interſection de NV & de la direction de F, on abaiſſe une perpendiculaire VD ſur la face oppoſée AC, le point D eſt le lieu où doit être appliquée la réſiſtance exercée ſur AC. Car autrement le coin tourneroit ſur lui-même. Le coin étant ſuppoſé ne devoir tourner en aucun ſens, & les réſiſtances étant appliquées en P & D ; on trouve en achevant le parallélogramme DVNE, que F *ſin.* VEN = VN. *ſin.* VNE. Mais VEN = 90° & VNE = ACB, donc F = VN. *ſin.* ACB ; ou F : VN :: *ſin.* ACB : 1, c'eſt-à-dire que la réſiſtance, qui peut être balancée par VN, compoſante de F, & qui eſt appliquée ſur la face latérale BC du coin, l'emporte ſur la valeur de F, dans le rapport du rayon au ſinus de ACB, ou d'autant plus que l'angle ACB eſt plus petit. Ainſi une réſiſtance VN doit être vaincue lorſqu'on emploie une force F plus grande que VN. *ſin.* ACB. C'eſt par cette raiſon

qu'on rend très-aigus, les coins nommés *langues* qu'on emploie pour soulever un vaisseau dans son berceau. Leur face AC repose horizontalement sur un billot ou sur la coite, & la face BC s'insinue sous la ventriere, lorsque la tête AB, est chassée à coup de masse dans le sens CE. La composante VN, résultante de ce choc, agit sur le vaisseau, & l'autre composante VD est détruite par la résistance de la coite ou de la cale.

Dans les chantiers de construction, des coins de la forme ABC servent aussi à pousser comme à maintenir les pieds des acores. Souvent aussi pour assurer, modérer, ou anéantir facilement l'effet qu'on leur fait produire, on accouple deux coins égaux tels que ABC & *rba*; on rend leurs faces latérales BC & *ab* paralleles, & ces coins frappés en sens contraire dans cette situation indiquée, ne peuvent se séparer, mais ils doivent glisser l'un sur l'autre dans des directions opposées à celle des chocs. C'est encore avec de tels coins qu'on presse les bordages contre les couples d'un vaisseau qu'ils doivent couvrir.

Imaginons que deux coins rectangles & tels que ABC, & *rba*, soient réunis par leurs faces AC & *ra*, pour ne composer qu'un seul & même coin *nqptsu* (fig. 72) sous la forme ordinaire qu'on leur donne dans plusieurs arts. Alors la tête de la section de ce coin est représentée par *b*B (fig. 86) & le tranchant commun passe par le point C confondu avec le point *a*. Supposons que la force motrice F soit dirigée suivant F*n* perpendiculaire à *b*B. Décomposons-la en deux autres paralleles & égales à *f*, qui soient dirigées suivant *oz* & *uq*, & qui placées dans le même plan B*b*C, soient à égale distance de F*n* ou des faces confondues AC & *ra*. Dans cet état des choses, & décomposant comme précédemment chaque force partielle *f*, il faut pour l'état d'équilibre du coin & des résistances, 1° que la force VD soit égale à *id* afin que le coin ne puisse se mouvoir latéralement ou perpendiculairement à F*n*; or VD $=$ *f. tang.* ABC, & *id* $=$ *f tang. rba*, il faut donc que *f tan.* ABC $=$ *f tang. rba*, ou que ABC $=$ *rba*. Les faces *pust* & *qnst* doivent, par cette raison, & pour cet effet, faire un angle égal avec le plan *mist* qui est perpendiculaire à la tête *nqpu* (fig. 72); c'est d'après

ces principes qu'une telle figure a été donnée aux coins les plus habituellement en usage. Remarquons que ces forces VD & *id* doivent aussi être directement opposées, car autrement le coin sous l'impulsion de la force F seroit sollicité à tourner sur lui-même, ce qui est contre la supposition.

Quant aux forces composantes, dirigées suivant VN & *ip*, leurs valeurs sont indiquées par les équations $f=$VN. *sin.* ACB, & $f=ip.$ *sin.* $bar=ip.$ *sin.* ACB. Donc $2f$ ou F$=$ (VN$+ip$) *sin.* ACB. On voit donc que l'effet (VN$+ip$) de la force motrice F devient d'autant plus grand qu'on rend plus aigu l'angle BCA. On peut faire aussi la proportion (VN$+ip$) :F: :1: *sin.* ACB: :BC:BA. Ainsi une résistance (VN$+ip$) doit être surmontée par une force F, lorsque celle-ci surpasse (VN$+ip$). *sin.* ACB. Ce rapport explique l'effet, des canifs, des ciseaux, des couteaux, des haches, des herminettes & des instrumens coupans en général. Ils agissent comme des coins, & ils doivent présenter des tranchans d'autant plus fins ou aigus, qu'ils sont destinés à être plus facilement introduits entre des corps, ou entre les parties d'un corps.

Les instrumens pointus, & faits pour pénétrer dans les corps, tels que les aiguilles, les poinçons, &c., ont aussi des effets dont l'explication est fondée sur les mêmes principes. Leur forme est-elle conique (fig. 6); supposons que la force motrice F soit appliquée suivant *oa* perpendiculairement à la base *cdb*. Imaginons dans un tel cône autant de sections triangulaires *abc*, qu'il y a de diametres dans la base; & enfin considérons F comme étant décomposée en autant de forces qu'on peut tirer de lignes diverses *ac*, *ab*, *ah*, &c. dans la surface du cône. On voit alors par la théorie précédente qu'un tel cône, poussé par une force F suivant *oa*, pour être introduit parmi des corps qui le touchent dans tout son contour, & pour les séparer, doit les repousser également dans tous les sens, & avec d'autant plus d'effet que l'angle *cao* est plus petit. C'est cette propriété qui dans la marine a fait donner une forme conique, aux instrumens qui sous le nom d'épissoires sont employés à écarter les torons d'un cordage étroitement commis, pour

faire des épissures convenables ou enlacer des cordages séparés. C'est enfin par cette raison que la forme pyramidale & triangulaire (fig. 5) convient aux aiguilles qui sont nécessaires & commodes pour coudre ou des voiles, ou des ralingues, &c.

239. *Des forces physiques ou naturelles, qui ont des rapports utiles à l'art de la marine.* Jusqu'ici nous avons parlé des forces motrices en général; nous avons indiqué les mouvements qu'elles doivent produire, lorsqu'elles sont appliquées aux corps, soit immédiatement, soit par le secours intermédiaire des machines; ainsi il reste encore à expliquer, par les principes précédens, les effets des forces naturelles & physiques, dont l'action mérite d'être considerée dans la pratique de l'art de la marine.

Parmi ces forces, les principales sont, la gravité; les efforts dont les hommes ou les animaux sont habituellement capables; la pression de l'eau; sa résistance; l'action du vent, des lames, des courans; le frottement, la roideur des cordes; &c. Occupons-nous d'abord de la gravité. Cette force agit sur toutes les parties de la terre; elle paroît même animer toute la nature, sous le nom d'attraction; & présente la source des affinités de tous les corps de l'Univers, ainsi que des liaisons des élémens matériels de chaque corps. Sur toute la terre, sans cesse elle sollicite les corps à descendre vers le centre du globe, & perpendiculairement à sa surface; & lorsqu'aucun obstacle ne s'y oppose, elle communique à un corps, quelle que soit sa masse, ou quelque soit le nombre de ses parties matérielles, un égal degré de vitesse, à chaque instant de la durée.

C'est l'expérience qui a dévoilé, l'universalité, ainsi que l'egalité de cette action de la gravité; & c'est elle aussi qui a fait connoître que cette force s'exerce de la même maniere sur les corps qui sont en mouvement comme sur ceux qui sont en repos. Dans ce dernier état, les corps conservent donc une tendance toujours renaissante, au mouvement; & c'est cette tendance, lorsqu'elle ne peut avoir son effet, qui est précisément la force naturelle qu'on suppose à tous les corps terrestres, & qu'on nomme leur *poids*. Par cette raison, un corps

pesant ne peut être maintenu dans un repos durable, qu'autant qu'une puissance étrangere exerce sur lui une action égale, contraire & directement opposée à son poids ou à sa gravité. Comme toutes les parties d'un corps sont également sollicitées au mouvement par cette force, (suivant l'expérience) la résultante de toutes ces forces partielles, paralleles & égales doit passer nécessairement par le centre de masse d'un tel corps, & ce point reçoit alors le nom de *centre de gravité*; parce que le poids du corps peut être regardé comme réuni dans ce point unique. Nommons M, la masse d'un corps, ou la somme de ses particules matérielles, G le poids de cette masse ou la résultante de toutes les forces égales qui sollicitent au mouvement, chaque particule considérée comme pesante. Considérons aussi la gravité (ainsi que l'expérience le démontre) comme une force accélératrice constante. Ainsi nous devons exprimer les rapports des effets de cette force par les équations deja connues (210) $MV = Gt$, & $ME = \frac{1}{2}Gt.^2$ Quant à la mesure de ces effets, elle est donnée par l'expérience qui a fait connoître que pendant une unité de temps, telle qu'une seconde, la gravité fait parcourir un espace de 15,098 pieds, à un corps quelconque qu'elle anime seule & qui, placé à la surface de la terre, obéit à son action librement & sans obstacle. Ainsi $E = 15{,}098$ pieds lorsque $t = 1$; & alors $G = 2.\ 15{,}098.\ M$. Representons 2. 15,098 pieds par g; les équations générales se changeront en celles-ci $V = gt$. & $E = \frac{1}{2}\ gt^2$, pour exprimer particuliérement les rapports des effets de la gravité; & on en conclura celles-ci $2gE = V^2$, $VT = 2E$ & $MV^2 = 2GE$. Ces formules servent à déterminer, soit la vîtesse qu'un corps a pu acquerir après un temps t, qu'il a employé à descendre librement d'une hauteur connue E; soit le temps de sa chûte, lorsque sa vîtesse acquise V, & la hauteur E sont données; soit enfin la hauteur E, lorsqu'on indique les valeurs de V ou de t. Par exemple, un corps est-il tombé du haut d'un mât ou d'une élévation de 150 pieds, sa vitesse à la fin de sa chûte est indiquée par l'équation $V^2 = 2gE = 2.15{,}098.150$; car on en conclud qu'elle est de 95,178 pieds; ou telle qu'elle feroit parcourir au même

corps cet eſpace uniformément, dans l'intervalle d'une ſeconde. Réciproquement ſi on cherchoit quelle devroit être la hauteur de la chûte à la fin de laquelle un corps auroit acquis une vîteſſe de 95, 178 pieds, elle ſeroit trouvée de 150 pieds par la même formule. Enfin veut-on ſavoir le temps ou la durée d'une telle chûte (toujours libre) on la détermine par l'équation $2E = gt^2$ & elle doit être de 3'', 152.

240. Remarquons que toutes les vîteſſes imaginables peuvent être communiquées à un corps par la gravité, en variant les hauteurs deſquelles on peut le faire deſcendre. C'eſt pourquoi, quelque ſoit la vîteſſe imprimée à un corps par une puiſſance différente de la gravité, il eſt permis de regarder cette vîteſſe comme celle que ce corps eût acquiſe, par ſa chûte d'une hauteur convenable, & elle eſt toujours donnée par l'équation $V^2 = 2gE$.

Ajoutons quelques remarques, pour l'application des formules qui ſont relatives, ſoit au mouvement des corps, ſoit à leur équilibre. 1.° Une force quelconque F peut être au beſoin repréſentée par le poids d'un corps; car ce poids eſt auſſi une force qui ſollicite le corps à ſe mouvoir avec une certaine vîteſſe V; & ſi mu exprime l'énergie de F, on peut toujours imaginer un corps dont la maſſe M eſt telle que ſon poids MV ſoit égal à mu. 2°. La maſſe d'un corps ou la ſomme de ſes particules matérielles peut être repréſentée par ſon poids; car le poids étant proportionnel à la maſſe, il peut être choiſi pour lui ſervir de meſure. 3.° Enfin il faut ſe ſouvenir que la quantité t qui ſe trouve dans ces formules n'exprime que le rapport de pluſieurs ſecondes à une ſeule qui eſt l'unité de temps.

241. Les formules précédentes ſont relatives au mouvement d'un corps qui obéit librement à la gravité & qui ſe meut perpendiculairement à la ſurface de la terre, mais ce corps peut être placé ſur un plan qui eſt incliné à la direction verticale eq (*fig. 70*) de la gravité; & alors voici comment ſon mouvement ſur ce plan doit être déterminé. Lorſque G repréſente la gravité du corps G *ſin.* i exprime la force qui le ſollicite à ſuivre la direction BA, (en nommant i l'angle qen ou BAC)

& l'action de G *sin. i* étant continue & égale, comme la gravité, elle est accélératrice, constante, ainsi les formules précédentes doivent exprimer ses effets en y substituant G *sin. i* à la place de G. De là il suit que si on compare les vîtesses acquises, par un corps, lorsqu'il tombe perpendiculairement de B en C, ou lorsqu'il se rend de B vers A par l'effet de la gravité, on trouve qu'elles sont parfaitement les mêmes. Car alors on a $MV^2 = 2G.BC$, & $Mu^2 = 2G.BA$ *sin. i*; & comme BC = BA *sin. i*, la vîtesse *u* acquise de B en A est égale à la vîtesse V qui est due à la hauteur BC. De là il suit aussi que si on compare les durées de la chûte d'un corps, lorsqu'il parcourt, ou le diametre vertical *id* d'un cercle (fig. 15) ou sa corde *bd*, qui est inclinée sous un angle *i* avec l'horisontale *zde*, on reconnoît qu'il y a égalité entre les temps *t* & T de ces mouvemens. En effet on a pour l'un & l'autre cas les équations suivantes $2M.id = Gt^2$, & $2M.bd = G\,sin.i.T^2$; mais $id\,sin.i. = bd$ dans le triangle rectangle *ibd*; c'est pourquoi $t = T$.

Concluons de cette théorie, qu'un vaisseau qui est lancé à la mer, & qui glisse sur un chantier de 300 pieds de longueur, dont l'inclinaison est d'un pouce par pied, devroit acquérir par sa descente entiere, & sans l'obstacle du frottement, une vîtesse due à la hauteur de 300 pouces ou de 25 pieds. On voit aussi que la durée de sa descente est la même que s'il tomboit d'une hauteur égale à 3,600 pieds.

Employons cette même théorie pour indiquer les circonstances importantes du mouvement des projectiles pesans tels que des boulets & des bombes, lorsqu'ils sont lancés dans l'espace par une force quelconque. Nous n'aurons pas égard ici aux effets très-sensibles de la résistance de l'air; de sorte que ce qui va être dit, en donnant une idée de ces mouvemens dans le vuide, ne peut que faire préjuger en partie les effets des projections ordinaires qui sont faites à travers les couches plus ou moins épaisses de l'atmosphere. Soit *a* le point (fig. 87.) d'où part une bombe, chassée avec une vîtesse V dans une direction *ar* qui fait avec l'horizontale *ac* un angle $rac = a$. Décomposons cette vîtesse en deux autres, l'une horisontale

dirigée ſuivant *ac*, dont la valeur eſt exprimée par V *coſ. a*; & l'autre parallele à la verticale *az* qui eſt égale à V *ſin.a*. Auſſi-tôt que la bombe ſort de *a* où eſt placée la bouche de la piece, la peſanteur agit ſur elle, & conſtamment pendant toute la durée de ſa courſe. Sans effet ſur la vîteſſe horizontale de projection; elle ne ceſſe de détruire à chaque inſtant quelque degré de ſa vîteſſe verticale. Si, avec ſa ſeule vîteſſe V, la bombe parcouroit uniformément ſur la direction *ar* un eſpace *ai* dans l'unité de temps; & ſi ſa peſanteur eſt capable de lui faire parcourir pendant le même temps une hauteur $az = io$. Alors la bombe ſollicitée en même temps par la peſanteur & par la force de projection, ne peut ſe trouver après l'unité de temps qu'au point *o*, qui eſt l'extrémité de la diagonale du parallélogramme des forces *aioz* & ainſi ſucceſſivement. C'eſt pourquoi la bombe étant parvenue au plus haut point *d* de ſa courſe *adc*, & ne pouvant pas s'élever à une plus grande hauteur, il faut alors que ſa vîteſſe verticale de projection ſe trouve entiérement détruite à ſon arrivée au point *d*. Il faut donc qu'alors la peſanteur ait communiqué à ce projectile une vîteſſe contraire & égale à V *ſin. a*. Soit *t* le temps employé par la bombe pour arriver de *a* en *d*, on a l'équation $V\, ſin.a = gt$. Pendant ce temps, la bombe avec la ſeule vîteſſe V ſeroit parvenue au point *r* de la ligne *ar*, & par l'effet iſolé de la peſanteur elle ſeroit deſcendue de *r* en *d*: c'eſt pourquoi $rd = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}Vt\, ſin.a$; & comme $rb = Vt\, ſin.a$ puiſqu'on ſuppoſe que $ar = Vt$, il s'enſuit donc que $rd = \frac{1}{2}rb = db$. Soit *h* la hauteur de laquelle devroit tomber un corps peſant pour acquerir la vîteſſe V, on doit dire que $2hg = V^2$, ainſi la ligne *rd* étant telle que $2.rd.g = V^2\, ſin.a^2$ il faut que $rd = h.ſin.a^2 = db$. Concluons auſſi que l'abſciſſe *ab* ou la diſtance horiſontale de *a* au point de la plus grande aſcenſion de la bombe eſt égale à $2h\, ſin.a\, coſ.a$. Car dans le triangle rectangle *abr* on peut dire $ab:br$ ou $2.bd::coſ.a:ſin.a$, ainſi $ab\, ſin.a = 2.h\, ſin.a^2.coſ.a$, ou $ab = 2h\, ſin.a\, coſ.a = h\, ſin.2a$.

Ces réflexions font voir qu'une bombe dans ſa route curviligne de *a* en *d* ne ceſſe de s'élever, & qu'après avoir paſſé *d*, elle doit deſcendre à l'horiſon. Soit T le temps

qu'elle met à arriver en u, ou qu'elle eût mis à parcourir avec sa vitesse uniforme V l'espace as, si la pesanteur n'eût pas contrarié son mouvement, la ligne sf dont elle se seroit élevée, seroit $= \text{VT} \sin.a$; mais dans le temps T la pesanteur doit la faire descendre d'une hauteur $su = \frac{1}{2}g\text{T}^2$; ainsi nommant y & x l'ordonnée uf, & l'abscisse af, on a $y = \text{VT} \sin.a - \frac{1}{2}g\text{T}^2$ & $x = \text{VT} \cos.a$. Tel est le rapport de x & y pour chaque point de la route de la bombe, & ces équations combinées donnent celles de cette courbe. On voit que dans deux cas l'ordonnée $y = o$; 1°. lorsque $\text{T} = o$, c'est-à-dire en a, & 2°. lorsque $\text{VT} \sin.a = \frac{1}{2}g\text{T}^2$, c'est-à-dire en un point c de l'horisontale ac. Cette derniere équation fournit la valeur de T ou la durée du mouvement de la bombe de a en c; & en la multipliant par celle-ci $x = \text{VT} \cos.a$. On a $\frac{1}{2}g\text{T}^2 x = \text{V}^2\text{T}^2 \cos.a.\sin.a$. On sait d'ailleurs que $2hg = \text{V}^2$, donc $x = 4h \cos.a.\sin.a = 2h \sin.2a$. Telle est la valeur de ac ou de l'amplitude du jet de la bombe qui est lancée sur une direction ar dont l'inclinaison à l'horison est a. Cette portée x doit donc être la plus grande possible, lorsque $a = 45°$. puisqu'alors $\sin.2a$ est le plus grand des Sinus. Dans tout autre cas la portée est plus petite, & elle peut être produite en lançant la bombe sous une inclinaison, qui soit, ou a ou $(90° - a.)$; parce que les valeurs de $\sin.2a$ & de $\sin.2(90° - a)$ sont parfaitement les mêmes. L'équation $ac = 2h \sin.2a$, peut servir à déterminer si une piece peut porter de a en c, mais alors il faut connoître la valeur de h; & on l'obtient en éprouvant la portée B de la piece tirée avec une poudre donnée sous un angle A de 45°. Car alors $\text{B} = 2h$, puisque $\sin.2 = 1$ & on peut dire que la portée de la piece sous un autre angle a, est telle que $ac = \text{B}\sin.2a$; donc $\text{B}:ac::1:\sin.2a$. Cette proportion doit donc démontrer dans tous les cas, & la possibilité d'une portée desirée ac, & l'angle a qui lui convient.

242. La méthode de mesurer le temps en secondes est encore une application des précédens principes, & un homme de mer doit la connoître pour vérifier au besoin les sabliers qui servent à estimer en mer la longueur de la route d'un vaisseau. Dans cette vue d'utilité, considérons le mouvement d'une balle de plomb d'un petit

diametre sur un arc *ard* (*fig.* 15) qu'il parcourt, par l'effet de sa pesanteur, (en supposant vertical le diametre *ad*). Décomposons cet arc *ard* en des arcs infiniment petits, tels que *qr*. Soit menée la petite ligne *qu* parallele à *id*, on peut dire (à cause des tri. semblables *orp* & *qur*), $qr : ro :: qu : rp$, ou en nommant r le rayon *ao* de cet arc, $qr^2 : r^2 :: qu^2 : (2r—pd)\, pd$ (124) ou enfin, $qu.r^2 = 2r.pd.qr^2$ parce que, l'arc *ad*, & la ligne correspondante *pd*, sont supposés d'une très-grande petitesse.

La vîtesse V que cette balle a pu acquérir après avoir parcouru l'élément *ar*, est donnée par l'équation $V^2 = 2g.cp$ (240) $= 2g\,(cd—dp)$ Le temps infiniment petit q qui est employé par la balle à parcourir *qr*, permet de considérer, comme uniforme, sa vîtesse sur *qr*. Il est donc donné par l'équation $qr = V.q$ (212). Ainsi $qr^2 = V^2.q^2$ & $uq^2.r^2 = 2r.pd.V^2.q^2 = 4.g.r.pd\,(cd.—dp)\,q^2$, ou $uq^2 : (cd—dp)\,dp :: 4gq^2 : r$ (B).

Si dans un autre cercle, dont, *cd* seroit le diametre, & a un élément infiniment petit de sa circonférence qui correspondroit à une partie *uq* du diametre; on pourroit dire, (comme on l'a dit du petit arc *qr* qui appartient au cercle dont le rayon est r) $a^2 : \frac{1}{4} dc^2 :: qu^2 : (dc—dp)\,dp$; & comparant cette proportion à la précédente (B) on en conclut que $a^2 : dc^2 :: g\,q^2 : r$ ou $a^2 : q^2 :: g.dc^2 : r$. Le rapport de a avec q est donc constant. Raisonnons de la même maniere sur tout autre arc, tel que *qr* qui fait partie de *ardb* (en supposant que les arcs très-petits *ard* & *db* placés de chaque côté de la verticale sont égaux, & parcourus dans un même temps, soit dans la descente, soit dans l'ascension de la balle) : formons une suite de rapports égaux $a : q :: a' : q' ::$ &c., & nous conclurons, que la somme de tous les petits arcs a, ou la circonférence entiere A, dont *cd* est le diametre, est à la somme T de tous les instans de la durée du mouvement de la balle sur l'arc entier *adb*, comme $a:q$. On peut donc dire que $A.^2 r = T.^2 g.dc.^2$ Mais $A = c.\,cd$ lorsque le rapport d'une circonférence à son diametre est c:I. Il suit donc de cette théorie que $c.^2 r = g.T^2$. La longueur de l'arc *adb*, ne se trouve plus dans cette équation; ainsi des arcs, très-variés dans leur grandeur, pourvu qu'ils soient très-petits,

doivent

doivent être parcourus dans un même temps T par une balle pesante.

Remarquons que si on compare le temps $\frac{1}{2}$T qu'une telle balle met à descendre de *a* en *d*, avec celui *t* qu'elle emploieroit à parcourir la corde *ad* de ce même arc, (& qui est exprimé par l'équation $gt^2 = 4r$), on trouve que $\frac{1}{4}T^2 : t^2 :: \frac{1}{4}c^2 : 4$, ou $\frac{1}{2}T : t :: \frac{1}{4}c : 1$, c'est-à-dire que $\frac{1}{4}$ *c* ou le quart d'une circonférence étant plus petit que le diametre 1, la balle descend de *a* en *d* par l'arc *ad*, en moins de temps que par la corde *ad* de cet arc.

Si cette balle, pour se mouvoir sur l'arc *adb*, est suspendue, par un fil inextensible, à un point *o*, la formule précédente indique la longueur qu'il convient de donner au rayon *ro*, pour en composer un pendule à seconde, ou pour que dans une seconde de temps la balle supposée parcourre l'arc entier *adb*. En effet l'expérience (239) a fait connoître $g = 2$ (15,098) pieds. Ainsi T devant être d'une seconde, il faut que $r = 3{,}0595$ p. $= 3$ p. op 8^{lig}, 57. Réciproquement la même formule démontre que si un pendule simple, qui fait ses oscillations en une seconde de temps, a une longueur de 3,0595 p., la pesanteur doit faire tomber, dans le même temps, tout corps pesant, d'une hauteur de 15,098 p. On voit aussi que si on compare les longueurs différentes de plusieurs pendules, on a pour chacun une équation semblable à celle-ci $T^2 g = r.c^2$. Ainsi leurs longueurs sont entr'elles comme les quarrés des durées de leur oscillation. C'est pourquoi veut-on connoître la longueur *l* d'un pendule à demi-seconde, on la trouve en disant $\frac{1}{4}T^2 : T^2 :: l : r :: 1 : 4$ ou $l = \frac{1}{4}r =$ op 9^{pou} 2^{l} $\frac{1}{7}$. On conclut de ce résultat un moyen facile & commode de vérifier en mer les sabliers de demi-minute, &c. Une balle de plomb, d'un petit diametre, doit être suspendue pour cet effet à un point fixe par un fil inextensible, de maniere que la distance du centre de la balle au point de suspension soit de 9^{ou} 2^{lig} $\frac{1}{7}$, & ce pendule abandonné à lui-même après avoir été écarté de quelques degrés de la verticale doit faire des oscillations *adb* dont chacune s'exécute dans une demi-seconde. Enfin on doit voir, par cette formule, l'utilité des observations que les

G.

circonſtances préſentent ſi ſouvent aux navigateurs, lorſque transportés dans divers lieux de la terre ils peuvent y meſurer la longueur variable des pendules à ſecondes. Car c'eſt par elles, que la conſtance ou les variations de la peſanteur peuvent être déterminées ſur les points les plus éloignés du globe, & qu'on peut décider d'une maniere plus approchée de la régularité qu'on doit ſuppoſer à la figure de la terre.

243. La viteſſe angulaire (202) u de la balle B (ſuppoſée très-petite) au commencement de ſa rotation autour de l'axe O, eſt exprimée par l'équation $u.\text{B}.r^2 = \text{G}$ *ſin.* $i.r$. En nommant $\text{B}r^2$ le moment d'inertie de la balle, & i l'angle du fil avec la verticale. Mais ſi, ſans changer, ni ſon poids, ni la diſtance de ſon centre de maſſe à l'axe O, ſon volume eſt augmenté ainſi que ſon diametre; alors cette boule auroit à l'égard d'un axe qui, parallele à o, paſſeroit par le centre de maſſe, un moment d'inertie exprimé par BA^2 & ſa viteſſe angulaire V ſeroit alors donnée par l'équation $\text{V}(\text{BA}^2 + \text{B}r^2) = \text{G}$ *ſin.* $i.r$. Cette viteſſe V ne ſeroit donc plus dans ce nouvel état de la boule, égale à celle de la petite balle. Elle lui ſeroit même inférieure; car alors $\text{V}:u::r^2:\text{A}^2+r^2$. Ainſi pour les rendre égales, ou pour qu'un grand corps, ſous le nom de pendule compoſé faſſe ſes oſcillations dans le même temps qu'un pendule ſimple, il faut que la diſtance du centre de maſſe de ce dernier, au point de ſuſpenſion, ſoit plus grande que celle du centre du pendule compoſé. Nommons d celle-ci, & nous voyons que l'égalité des oſcillations de ces deux corps ne doit avoir lieu que dans le cas où $rd = \text{A}^2 + d^2$, ou lorſque $r:d::\text{A}^2+d^2:d^2$ Remarquons, pour indiquer une application utile de ces principes, que cette équation peut ſervir à trouver la longueur du pendule ſimple qui fait ſes oſcillations dans le même temps qu'un grand corps qui eſt connu ſous toutes les faces néceſſaires.

244. Nous avons dit (193) que, chaque partie élémentaire d'un corps, étant ſollicitée au mouvement par une force qui eſt proportionnelle à la maſſe particuliere de chacune, la réſultante de toutes ces forces partielles paſſe néceſſairement par le centre de maſſe d'un tel

corps. C'eſt ainſi que la peſanteur agit ſur tous les élémens d'un corps terreſtre & dans des directions paralleles. La réſultante des poids de toutes les parties d'un corps, paſſe donc par le centre de maſſe, nommé alors *centre de gravité*; ſa direction eſt verticale, & ſa valeur eſt composée de celle de tous les poids élémentaires. Un corps, par conſéquent, eſt-il ſuſpendu par un fil dont la réſiſtance fait équilibre au poids total de ce corps, ou à la réſultante indiquée; la direction verticale de ce fil doit paſſer par le centre de gravité du corps. Il en eſt de même ſi celui-ci eſt ſuſpendu par un fil attaché à un nouveau point de ſa ſurface. C'eſt pourquoi le point d'interſection des directions de ce fil, dans ces états de ſuſpenſion & d'équilibre, doit être le lieu du centre de gravité du corps propoſé. Tel eſt le moyen ſimple qu'on doit employer, lorſqu'il peut l'être, pour déterminer par expérience le lieu du centre de gravité d'un corps quelconque, & il eſt utile à connoître pour une telle recherche, dans une infinité d'occaſions. Le calcul conduit auſſi à trouver le lieu du centre de gravité des corps, par une méthode générale & ſon importance nous engage à l'expoſer ici avec tous les détails néceſſaires.

245. Soit propoſé de fixer le lieu du centre de gravité d'une ligne ſolide *ad* (fig. 78) qui eſt compoſée d'un nombre *n* de parties homogenes *a* ou également peſantes & également diſtribuées ſur ſa longueur. Ces parties ſont ſollicitées au mouvement par la peſanteur, & toutes de la même maniere, ſuivant des directions verticales telles que les lignes *ef* & *ao*, qui indiquent particuliérement comment agit cette force ſur les points extrêmes de *ad*. Soit *ig* la direction de la réſultante de toutes ces forces partielles. Elle paſſe par le centre de gravité *m*, de *ad*. Nous avons vu qu'à l'égard d'un point o, la ſomme des momens de toutes les forces partielles qui agiſſent ſur les éléments *a* de *ad* eſt egale au moment de leur réſultante. Ainſi *ogf* étant une ligne perpendiculaire à la direction de la peſanteur, & nommant *b*, *c*, *d*, *e* &c les diſtances diverſes de o aux directions des poids des éléments de *ad*, on doit avoir cette équation $a\,(o+b+c+d+\ldots\ldots+of) = na.\,og.$ Mais la

ſomme ($o+b+c+d\ldots\ldots+of$) eſt celle des termes d'une progreſſion arit. dont le premier eſt o, le dernier *of*, & le nombre *n*. Ainſi (85) $\frac{1}{2}\, a.n.of = n.a.\ og$; ou $og = \frac{1}{2}\, of$. On doit en conclure que $am = md$, ainſi le centre de gravité *m* d'une ligne droite eſt placé au milieu de ſa longueur.

Comme il eſt eſſentiel de ſavoir déterminer la poſition d'un tel point *m* dans l'eſpace, imaginons trois plans perpendiculaires entr'eux, l'un R*qt* horizontal & les deux autres verticaux *zq*R & *zqt*. Les lignes *mg*, *ao*, *df* ſont les diſtances des points *a*, *m*, & *d*, au plan R*qt*, & ſur ce plan, les lignes *on*, *gu* & *ft* perpendiculaires à *qt* ſont les diſtances des mêmes points *a*, *m*, *d* au plan *zqt*, comme *qn*, *qu* & *qt* ſont leurs diſtances au troiſieme plan *zq*R. Puiſque $og = gf$, on peut dire & que $gm = \frac{1}{2}(ao+df)$; & que $gu = \frac{1}{2}\,(on+ft)$. Enſuite $nu = \frac{1}{2}\,nt$, par conſéquent $nu+qn$ ou $qu = \frac{1}{2}\,(\,nt+nq+nq\,) = \frac{1}{2}\,(\,qt+nq)$. La diſtance du centre de gravité *m* d'une ligne ſolide *ad*, tracée dans l'eſpace, à l'un quelconque de trois plans perpendiculaires entr'eux, eſt donc donnée par celle de ſes points extrêmes à ces mêmes plans; & ces dernieres diſtances étant connues la poſition de *m* eſt ſuffiſamment indiquée dans l'eſpace. L'application de cette regle eſt très-facile. Soit propoſé de trouver le centre de gravité du contour du tri. *oqp* (fig. 2). Il faut dans le plan *cdab* de ce tri. mener deux lignes *da* & *ab* perpendiculaires entr'elles & abaiſſer des ſommets *o*, *q*, & *p* des perpendiculaires ſur ces axes *ad* & *ba*. Enſuite on forme la ſomme des produits particuliers de la moitié de chaque côté, multipliée par la ſomme des diſtances des deux extrêmités à l'un des axes, & on diviſe cette ſomme par le contour du triangle. L'équation eſt alors la diſtance du centre cherché à l'axe de comparaiſon. On calcule de la même maniere ſa diſtance au deuxieme axe, & on parvient à trouver la poſition de ce point ſur le plan du triangle donné. La même méthode doit être ſuivie dans la recherche du centre de gravité du contour d'un polygone quelconque. S'agit-il de celui de la circonférence d'un cercle ? Il ne peut être placé que dans le plan du cercle. Ainſi en y traçant deux

diametres perpendiculaires entr'eux, pour les conſidérer comme les deux axes de comparaiſon ; on voit (fig. 20) que les momens des élémens de *ucdn* à l'égard de l'axe *un*, ſont les mêmes que ceux de *ufn* ; c'eſt-à-dire que leur ſomme eſt nulle (200). Ainſi le centre de gravité doit être ſitué ſur le diametre *un*. On démontreroit de la même maniere que ce centre eſt ſur l'autre axe *fc*, & on en concluroit qu'il eſt placé au centre même du cercle. On en diroit autant de celui de tout polygone régulier, en le ſuppoſant inſcrit à un cercle.

246. Faut-il trouver le centre de gravité de la ſurface d'un tri. *oqp* (fig. 2) ? On peut ſuppoſer que cette étendue eſt formée par celle d'une infinité de lignes matérielles & uniformement peſantes, qui ſeroient placées parallélement à *qp* entre les côtés *oq* & *op*. Alors une ligne *oe* menée du ſommet *o* au milieu du côté oppoſé *qp*, doit paſſer par le milieu & par le centre de gravité de toutes les lignes matérielles ſuppoſées. Leur centre commun de gravité, ou celui de la ſurface du triangle eſt donc placé ſur la ligne *oe*. Le même tri. *oqp* peut également être régardé comme compoſé d'une infinité d'autres lignes matérielles, qui ſoient menées parallélement à *op*, entre les côtés *qo* & *qp*, & alors le centre de gravité de ces lignes, ou celui du tri. devroit ſe trouver ſur une ligne *qi* menée du ſommet *q* au milieu du côté oppoſé *op*. Le centre de gravité du triangle eſt donc en même temps & ſur *oe* & ſur *qi* ; ſon lieu eſt donc le point d'interſection des deux lignes *oe* & *qi*. Tel eſt le moyen mécanique qu'il faut employer pour aſſigner le lieu de ce centre, & voici comment on calcule ſa poſition.

Si on mene une ligne *ei*, elle eſt néceſſairement parallele à *oq*, & les tri. *qro* & *eri* ſont ſemblables. On peut donc dire $ri:rq::ei:oq$; mais $ei=\frac{1}{2}oq$, ainſi $ri=\frac{1}{2}rq$, ou *ri* eſt le tiers de *qi* ; c'eſt-à-dire que ſi dans un tri. on mene du ſommet d'un de ſes angles une ligne droite au milieu du côté oppoſé, le centre de gravité de ſa ſurface eſt placé au tiers de la longueur de cette ligne (à compter du côté qu'elle diviſe). On peut direauſſi que la diſtance de ce centre à l'un ou l'autre de deux

axes *da* & *ab* perpendiculaires entr'eux & dans le même plan, est donnée par celles des sommets de ce triangle aux mêmes axes. Car soient menées perpendiculairement à *da*, les lignes *pf*, *qg*, *rn*, *it*, *oh* des sommets *p*, *q*, *o*, & des centres de gravité *r* & *i*, du tri. & du côté *op*, on a l'équation $rn = \frac{2}{3}\ it + \frac{1}{3}gq$, parce que la figure *gqin* est un trapeze & parce que $ri = \frac{1}{3}iq$; mais $it = \frac{1}{2}\ (oh + pf)$, c'est pourquoi $rn = \frac{1}{3}\ (oh + pf + gq)$. On démontreroit de même que $na = \frac{1}{3}\ (ga + fa + ha)$. On peut donc dire qu'étant données les distances des sommets des angles de ce tri. à deux axes perpendiculaires tracés dans son plan, la position de son centre de gravité doit être déterminée sur le même plan. La même méthode conduiroit aussi à conclure que la distance de ce centre à l'un ou l'autre de trois plans ou axes perpendiculaires entr'eux dans l'espace, est égale au tiers de la somme des distances des sommets des angles de ce tri. aux mêmes plans ou axes. De là, on doit conclure le procédé qu'il faut suivre pour trouver le centre de gravité de tout polygone, puisqu'on peut regarder toutes les figures planes comme composées de triangles. Le centre de gravité d'un cercle est donc placé au centre de sa surface, & on peut le démontrer comme on l'a fait dans la recherche du centre de gravité d'une circonférence de cercle.

247. Soit le trapeze *cabd* (fig. 42) dont le centre de gravité est demandé. Ce centre est sur une ligne *sl*, qui réunit les milieux des bases paralleles *cd* & *ab*. Si une diagonale *cb* partage ce trapeze en deux tri. *cdb* & *cba* dont les centres de gravité sont aux points *r* & *u* qui sont joints par la ligne *ru*; le centre commun de ces tri. doit être placé sur *ru* & comme il l'est aussi sur *sl*, le lieu du centre de gravité du trapeze est au point *n* d'intersection des lignes *ur* & *sl*.

Veut-on calculer la distance de ce point *n* à la base de *ab*? Soit menée par *n*, la ligne *mo* qui est la hauteur du trapeze ainsi que des triangles qui le composent. Alors conformément à ce qui a été dit précédemment, on a l'équation $no.\frac{1}{2}om(ab+cd) = \frac{1}{2}om.cd.\frac{2}{3}om + \frac{1}{2}om.ab.\frac{1}{3}om$ ou $no(ab+dc) = \frac{1}{3}om\ (2.cd+ab)$. Ainsi on peut déterminer

no étant données les bases & la hauteur d'un trapeze. On trouveroit aussi, par un calcul semblable aux précédens, que la distance du centre de gravité d'un trapeze, à l'un quelconque de trois plans perpendiculaires entr'eux, est toujours donnée par celles des centres de gravité, ou des sommets des angles, des triangles dont est formé un trapeze proposé.

C'est par tous ces moyens qu'il est possible d'assigner la position du centre de gravité des voiles d'un vaisseau, parce que leur forme est celle d'un triangle ou d'un trapeze. On trouveroit encore le lieu d'un tel centre dans un parallélogramme, à l'aide de la même formule dans laquelle on regarderoit comme égaux les côtés *ab* & *dc*.

248. S'il s'agit d'assigner le centre de gravité d'une ligne d'eau de vaisseau. Cette figure *abde* (fig. 24 G) est composée de deux parties *abd* & *aed* parfaitement égales, & ce centre doit être placé nécessairement sur la ligne diamétrale *ad* qui les separe. La distance de ce centre au point *a* est donc la même que celle de la moitié *abdc*. Pour trouver cette derniere, imaginons, comme ailleurs (131), cette figure partagée en trapezes, & sous les mêmes conditions. Soient menées aussi des diagonales dans chacun de ces trapezes. L'intervalle, tel que *qs*, qui sépare deux ordonnées voisines, est la hauteur commune de tous les trapezes comme des triangles qui les composent. Ainsi la recherche du centre de gravité de cette figure exigeant celle des centres particuliers des triangles composans, voici les expressions des momens de ces derniers à l'égard d'un plan qu'on imagineroit passer par *a*, & auquel *da* seroit perpendiculaire.

Le moment du triangle *afm*, est $\frac{1}{2}qs.fm\frac{2}{3}qs = \frac{2}{6}qs.^{2}fm$; celui de *fmq* est $\frac{1}{6}qs.^{2}4.fm$; celui de *foq* est $\frac{1}{6}qs.^{2}5.oq$; celui de *oqs*, est $\frac{1}{6}qs.^{2}7.oq$. Enfin ceux de *ons*, *nsi*, *nil*, *ilc*, *leb*, &c, sont $\frac{1}{6}qs.^{2}8.ns$, $\frac{1}{6}qs.^{2}10.ns$, $\frac{1}{6}qs.^{2}11.li$, $\frac{1}{6}qs.^{2}13.li$, $\frac{1}{6}qs.^{2}14.bc$, &c.

Remarquons que le moment de chaque tri. qui a pour base une ordonnée *y* dont le rang est *n*, ou qui correspond à la division *n* de l'axe *ad*, est $= \frac{1}{6}qs.^{2}(3n - 4)y$; car les momens de *afm*, *foq*, *ons*, *nli*, *lbc*, &c. (qui terminent chaque tranche composante de la ligne d'eau *abdc*)

ont pour facteurs les nombres, 2, 5, 8, 11, 14, &c; ou une suite de nombres en progression arit. Ainsi le dernier (14 par exemple) est égal à $2+3(n-2)$ parce que le nombre n des ordonnees placées depuis a jusqu'en c, excede d'une unité, celui des termes de cette progression. La somme des momens de ces triangles qui composent $abdc$ est donc $\frac{1}{6}qs^2(6.fm+12.oq+18.ns+24.li+\ldots\ldots+(3n-4)y)=qs^2(fm+2.oq+3.ns+4.li\ldots\ldots+\frac{1}{6}(3n-4)y)$. Si on divise cette somme ( ) par celle des surfaces de tous ces triangles (qu'on sait être égale à $qs(\frac{1}{2}fm+oq+ns.\ li\ldots\ldots+(\frac{1}{2}y)$ le quotient doit être la distance du centre de gravité de cette demi-ligne d'eau $abdca$ comme de celui de la ligne d'eau entiere $abdea$ au plan A qui passe par le point a, ou la distance au point a, du point de ad où est situé le centre de la ligne d'eau entiere. On doit remarquer que le contour de la ligne d'eau supposée rencontre l'axe ad aux deux points a & d auxquels correspondent des ordonnées nulles, & on voit aisément comment le calcul présenté devroit être modifié si ces ordonnées extrêmes étoient de quelqu'étendue.

249. Faut-il déterminer le lieu du centre de gravité d'une pyramide triangulaire $abcd$ (fig. 74)? On peut supposer que sa solidité est formée par une suite infinie de triangles matériels, qui placés parallélement à bcd, décroissent progressivement depuis cette base jusqu'au sommet a. Si le centre de gravité de bcd est supposé en u ou au tiers de la ligne de qui est menée du sommet d de ce triangle au milieu e du côté opposé bc, les autres tri. élémentaires, paralleles, & semblables à la base bdc, ont leur centre de gravité semblablement placé dans leur surface; c'est pourquoi une ligne menée du sommet a de la pyramide, au centre u de la base dbc, doit nécessairement passer par le centre commun de gravité de tous les tri. supposés, c'est-à-dire par celui de la pyramide. Celui-ci doit aussi, par la même raison, être placé sur une autre ligne qui seroit menée du point d à un point o qui dans la face opposée abc, est au tiers de la ligne ae menée de a au milieu du côté opposé bc. Ainsi le centre de gravité de la pyramide, qui doit,

en même temps, être ſitué ſur les deux lignes *do* & *au*, a ſon lieu au point x d'interſection de ces lignes. Tel eſt le moyen mécanique de déſigner ce centre dans une pyramide triangulaire.

Calculons actuellement le rapport de ux à la longueur de ua; & à cet effet ſoit menée une ligne ou, qui néceſſairement eſt parallele à ad, puiſque les lignes ed & ea ſont coupées en parties proportionnelles aux points o & u. Les tri. oxu & xad ſont donc ſemblables, & on peut dire $ux:xa::ou:ad$; mais $ou=\frac{1}{3}ad$ parce que $eu=\frac{1}{3}ed$; donc $ux=\frac{1}{3}xa$, ou le point x qui eſt le lieu du centre de gravité d'une telle pyramide, eſt placé au quart de la longueur de la ligne au qni eſt menée du ſommet de ce ſolide au centre de gravité de la ſurface de ſa baſe.

La diſtance du centre x à l'égard d'un plan donné de poſition dans l'eſpace, peut auſſi être déterminée par les diſtances des ſommets des angles de la pyramide triangulaire, à ce même plan. Soit aV un tel plan (fig. 73) au-deſſus duquel eſt ſuppoſée cette pyramide dont la baſe eſt Apr, & le ſommet u. Soient abaiſſées des perpendiculaires zs, uq, pm, Af, rc, & ob, des points qui ſont, le centre de gravité z de la pyramide, ſon ſommet u, ceux des angles de la baſe Apr, & le centre de gravité O de cette baſe. La diſtance $zs=\frac{1}{4}uq+\frac{3}{4}ob$; on a auſſi $ob=\frac{1}{3}na+\frac{1}{3}pm$; & $na=\frac{1}{2}(Af+rc)$. Ainſi en ſubſtituant & réduiſant on trouve $zs=\frac{1}{4}(uq+pm+Af+rc)$. D'après ce réſultat qui a toute la généralité convenable, on voit que dans un corps dont la forme eſt quelconque, & qui peut toujours être décompoſé en pyramides triangulaires, il devient facile de déterminer dans l'eſpace le point où eſt placé ſon centre de gravité en cherchant à l'aide des principes précédens, ſa diſtance à trois plans perpendiculaires entr'eux.

Si on fait l'application de ces réſultats à la recherche du centre de gravité d'une ſphere, on trouve qu'il eſt placé au centre même de cette ſphere; mais l'application la plus importante que nous puiſſions en faire, c'eſt à déterminer le lieu du centre de gravité du volume de fluide qni eſt déplacé par un vaiſſeau flottant, ou de

celui de ſa carene en la conſidérant comme homogene.

250. Imaginons cette carene *dagfcſdb* (fig. 75. G) décompoſée en un très-grand nombre de tranches horizontales, également minces, & compriſes entre des ſections paralleles dont la forme eſt à-peu-près telle que *abde* (fig. 24. G). Les plans qui diviſent ainſi la carene, coupent auſſi le maître couple, & on voit (fig. 27 G) ſur ce dernier pluſieurs des ſections de ces plans, en *ba*, *qd*, *re*, *if*; ainſi que l'épaiſſeur égale & très-petite de chacune des tranches, en *bq*, *qr*, *ri*.

Toutes ces tranches ſuppoſées, ainſi que les lignes d'eau qui les terminent, ont une même forme, de chaque côté du plan *diamétral*, *gfcſdig* qui paſſe par la quille *ſf*, l'étrave, *gf*, & l'étambot *dſ*; & ce plan les partage en deux parties parfaitement égales & ſemblables. Le centre de gravité de la carene homogene eſt donc placé néceſſairement dans un tel plan. Il ne reſte donc qu'à chercher dans ce plan la diſtance de ce centre à deux autres plans perpendiculaires, entr'eux, & au premier. Suppoſons que l'un de ces deux derniers plans paſſe par la face ſupérieure de la quille qu'on ſuppoſe horizontale ou parallele aux lignes d'eau. Celui-ci ſera nommé *horizontal* & l'autre ſous le nom de *vertical* ſera ſuppoſé paſſer par l'extrêmité arriere de la quille.

Cherchons la diſtance du centre de gravité de la carene au plan *horizontal*. Regardons la ſolidité de chaque ranche élémentaire, comme formée par une ſuite de trapezes matériels, dont les baſes ſont les ordonnées correſpondantes des lignes d'eau terminatrices, dont la hauteur commune eſt l'épaiſſeur égale de chaque tranche & dont le plan eſt parallele au vertical. La figure *abqd* (fig. 27. G) donne l'idée d'un de ces trapezes élémentaires qui entrent dans la compoſition d'une des tranches de la carene. Nommons *a* la diſtance du centre de gravité d'un tel trapeze à ſa baſe inférieure *qd*, le moment de ce trapeze à l'égard de *qd*, eſt $x.\ \frac{1}{2} bq.\ (ab + dq) = \frac{2}{6}.bq.^2\ ba + \frac{1}{6} bq.^2\ dq$ (A). Ainſi la ſomme des momens de tous les trapezes qui compoſent la tranche ſupérieure, à l'égard de la ligne d'eau inférieure eſt égale à la ſomme du double (2L) de la ſurface de la ligne d'eau ſupé-

rieure qui termine cette tranche & de celle (l) de la ligne d'eau inférieure, multipliée par le ſixieme du quarré de l'épaiſſeur. Soit z la diſtance du centre de gravité de cette tranche à l'égard de la ligne d'eau inférieure, comme d'ailleurs ſa ſolidité eſt exprimée par $(L+l)\frac{1}{2}bq$, on doit avoir cette équation $z.\frac{1}{2}bq.(L+l)=\frac{1}{6}bq^2(2L+l)$. Comparons cette expreſſion à celle trouvée (A) précédemment ; & nous aurons ces rapports égaux $x(ab+dq):z(L+l)::2ab+dq:2L+l$, c'eſt-à-dire que le rapport des diſtances x & z eſt le même que celui de pareilles lignes dans des ſimples trapezes, qui ayant même hauteur, auroient pour baſes ſupérieures & inférieures, l'un ab & qd, & l'autre L & l. De cette égalité, nous devons conclure que le lieu du centre de gravité de la tranche ſupérieure de la carene, peut être déterminé comme celui d'un trapeze, qui auroit, pour hauteur, l'épaiſſeur de la tranche, & pour baſes paralleles les lignes d'eau qui terminent cette même tranche. En étendant ce raiſonnement à toutes les tranches qui compoſent la carene entiere, on peut donc dire que la diſtance du centre de gravité de leur aſſemblage, au plan horizontal, peut être déterminé comme celle du centre de gravité d'une ſuite de trapezes qui ayant même hauteur auroient pour baſes les lignes d'eau terminatrices des tranches de la carene. On eſt donc fondé à dire comme précédemment (248) qu'il faut 1° ajouter enſemble le ſixieme de la ſection la plus baſſe de la carene, le ſixieme de celle qui eſt la plus élevée, ou de la flottaiſon multipliée par le triple du nombre des lignes d'eau moins 4 ; la deuxieme ligne d'eau (en comptant depuis la quille juſqu'au niveau de l'eau); le double de la troiſieme ; le triple de la quatrieme ; & ainſi de ſuite ; 2° faire une ſomme des moitiés des deux lignes d'eau extrêmes & des autres lignes d'eau intermédiaires & entieres. Alors le quotient de la diviſion de la premiere ſomme par la ſeconde étant multiplié par l'épaiſſeur commune des tranches devient la diſtance cherchée du centre de gravité de la carene, au plan *horizontal*, ou à la face ſupérieure de la quille.

Celle du même centre au plan *vertical* qui paſſe par

le talon de la quille doit ensuite être déterminée par la méthode suivante. Continuons de considérer les tranches composantes comme formées elles-mêmes de trapezes éléméntaires semblables à *bqda* (fig. 27. G). On voit aisément que le plan de chaque trapeze, étant parallele au plan *vertical*, la distance x de leur centre de gravité à ce dernier, doit être la même que celle des sommets des angles de ces figures. Le moment d'un de ces trapezes *abqd*, est ainsi $\frac{1}{2}bq.ab.x+\frac{1}{2}bq.dq.x$. Il faut donc, (pour déterminer la somme des momens de tous les trapezes qui composent par exemple la tranche supérieure de la carene), ajouter ensemble 1° ; tous les produits des lignes matérielles telles que *ab* multipliées par leurs distances respectives x au plan *vertical*; 2° tous les produits des lignes *qd* multipliées par leurs distances au même plan; ensuite on doit multiplier l'une & l'autre de ces sommes par la demi-épaisseur de la tranche considérée. Mais la somme premiere, est le moment A*a*, de la surface *a* de la ligne d'eau supérieure qui termine cette tranche (à l'égard du même plan vertical) : & la seconde somme est le moment B*b* de la deuxieme ligne d'eau terminatrice dont la surface est *b*. C'est pourquoi le moment de cette tranche extrême & supérieure de la carene, à l'égard du plan vertical, est $(Aa+Bb)\,\frac{1}{2}bq$. Si on applique le même raisonnement, à la tranche suivante & immédiatement inférieure, dont les lignes d'eau terminatrices ont pour surface *b* & *c*, & dont les centres de gravité sont à des distances B & C du plan *vertical*, le moment de cette tranche doit être $(Bb+Cc)\,\frac{1}{2}bq$. Celui de la troisieme tranche doit donc être aussi $(Cc+Dd)\,\frac{1}{2}bq$; & ainsi de suite. La somme des momens de toutes les tranches de la carene à l'égard du plan *vertical* est donc $bq\,(\frac{1}{2}Aa+Bb+Cc+Dd.......+\frac{1}{2}Pp)$ (en nommant, *p* la surface de la ligne d'eau extrême & inférieure, & P la distance de son centre de gravité au plan vertical).

Concluons de là que pour déterminer la distance du centre de gravité de la carene au plan supposé, il faut, 1° multiplier la surface de chaque ligne d'eau par la distance de son centre de gravité à ce plan. 2° Ajouter ensemble & les moitiés des momens des lignes d'eau

extrêmes, & les momens entiers des lignes d'eau intermédiaires ; 3° diviſer cette premiere ſomme par celle des moitiés des ſurfaces des lignes d'eau extrême ajoutées à toutes les lignes d'eau intermédiaires ; & le quotient doit être la diſtance cherchée du centre de la carene au plan vertical. Par cette diſtance & par celle du même centre au plan horizontal, le lieu du centre de gravité de la carene d'un vaiſſeau peut être exactement aſſigné ſur l'étendue d'un plan diamétral.

Ce centre, comme on l'a dit, n'eſt que celui du volume de fluide qui eſt déplacé par la carene d'un vaiſſeau ; mais la recherche du centre de gravité de la maſſe totale d'un vaiſſeau qui eſt entiérement armé, quoique fondée ſur les mêmes principes, ne doit pas être faite de la même maniere. Elle exige qu'on prenne les momens de chaque partie, de la coque, du chargement, de la mâture, du gréement, &c. à l'égard de deux plans au moins dont l'un eſt l'*horizontal*, & l'autre le *vertical*. La diſtance de ce centre de gravité à chacun de ces plans, eſt égale à la ſomme des momens indiqués, diviſée par le poids total du vaiſſeau. C'eſt dans ce dernier centre qu'on peut regarder comme réunis les poids de toutes les parties intégrantes d'un vaiſſeau lorſqu'on conſidere ce dernier, ou ſur le plan incliné de ſa cale, ou ſollicité au mouvement par des forces extérieures. Sa poſition d'ailleurs ſert au manœuvrier pour diſtinguer les voiles de l'avant & de l'arriere, & par conſéquent pour combiner leurs effets avec autant d'avantage que de ſûreté.

251. Il eſt à propos d'expoſer comment on doit déterminer le centre d'un cône à baſes paralelles. Soit donc (fig. 6) *kcdbl* un tronc de cône droit. Son centre de gravité doit être placé néceſſairement dans la ligne *ao* qui joint le ſommet *a* & le centre *o* de la baſe. Soient A & H la ſolidité, & la hauteur du cône entier *acdb*. Repréſentons par *a* & *h*, les mêmes choſes, dans le petit cône retranché *akl*. On doit avoir l'équation ſuivante (en prenant à l'égard du ſommet *a*, les momens des deux cônes & du tronc) $x(A-a)=\frac{3}{4}(AH-ah)$. Ainſi la grandeur de *x*, ou la diſtance au point *a* du

centre de gravité du tronc, dont le lieu est sur la ligne diamétrale *ao* peut être déterminée, puisque les gravités A, *a*, H, *h* sont susceptibles d'être calculées d'après les parties connues du tronc de cône. Ces résultats indiquent comment on peut trouver le centre de gravité d'un mât. En effet, un mât, construit suivant les regles de l'art, doit être regardé comme formé par une suite de cônes tronqués, dont les bases paralleles, ont des diametres connus & sont à des distances données. Ainsi la recherche du centre de gravité des corps de cette forme ne présente aucune difficulté. Il en est de même de celle du centre de gravité d'une vergue puisque chaque vergue est composée de deux suites égales de cônes tronqués qui sont disposées dans le même ordre, de part & d'autre du milieu de sa longueur. Ces principes s'appliquent aussi très-facilement à la recherche des centres de gravité, ou des bouées, ou des canons, ou des cabestans, &c.

252. *De la force de l'homme.* Nous ne chercherons pas à analyser la nature de la force animale, & il nous suffit de connoître que l'homme est capable, par l'action de ses muscles, de communiquer du mouvement à des corps d'une certaine masse, ou de vaincre une résistance déterminée. Mais quelle peut être la mesure de la force de l'homme? Elle doit, comme toute autre force, être proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle peut faire naître dans une masse connue. Cet effet a une grandeur qui varie suivant la maniere dont la force humaine est appliquée. Ainsi pour l'apprécier avec justesse il faut avoir égard aux remarques suivantes.

1.° Un homme qui agit, sans donner a son corps un certain mouvement, peut développer une force supérieure ou produire un effet plus grand que lorsque, pour exercer son action, il donne une certaine vitesse soit à la masse entiere de son corps, soit à quelques-unes de ses parties.

2.° Lorsque dans l'exercice de sa force un homme prend & conserve une attitude quelconque, il doit consumer à cet égard, une partie de sa force naturelle. C'est pourquoi on peut dire qu'un homme debout, ou assis, ou incliné, fait un effort plus ou moins grand pour se tenir

dans chacune de ces attitudes, & on peut estimer cet effort comme étant égal à celui qu'il emploieroit pour soutenir pendant le même temps le poids d'un corps plus ou moins grand. 3.° le poids de la masse d'un homme, peut être employé à augmenter plus ou moins l'effet de sa force musculaire, comme dans le cas où l'homme agit pour presser, pousser, ou tirer des corps dont la résistance doit être vaincue. 4.° La force dont un homme est capable journellement, peut être appliquée sans interruption, ou par intervalle. C'est ainsi que les hommes agissent soit pour virer au cabestan, soit pour tirer un vaisseau à la cordelle, soit pour vaincre avec des rames la résistance de l'eau, soit pour haler des cordages, soit pour faire tourner avec des leviers un cabestan horizontal, &c. Dans ces divers cas, les efforts employés sont ou continus, ou répétés par intervalle, & les effets momentanés présentent des différences dont les causes sont indiquées par les réflexions qui précedent. Cependant ajoutons à ces remarques que les hommes, quoique d'une organisation plus ou moins parfaite, produisent, comme on en convient assez généralement, des effets à-peu-près égaux, lorsqu'ils éprouvent des fatigues égales; & c'est une semblable considération, qui nous permet d'établir quelques vues générales, sur la force de l'homme, ou sur la fatigue qu'il peut supporter & réparer journellement. Nous allons les exposer avec d'autant plus de raison, qu'elles deviennent utiles, pour juger, suivant les circonstances, des effets qu'on peut attendre de la force humaine appliquée à surmonter des résistances, ou directement ou à l'aide de quelques machines.

253. Dans ce dessein, consultons l'expérience, pour y trouver une base sur laquelle puissent reposer les calculs des effets de la force humaine, de quelque maniere qu'elle soit appliquée. Suivant *Desaguliers*, un homme ordinaire faisant tourner un treuil AB (fig. 68) à l'aide d'une manivelle égale au rayon (de 14 pouces) du cylindre, lorsque sur celui-ci est enroulée une corde à laquelle est suspendu un poids de 25 liv., fait faire à ce cylindre 30 tours par minute, & continue cette action constante, journellement, pendant huit heures,

ſans éprouver d'autre fatigue que celle qui peut être réparée dans les 24 heures.

Conſidérons, quelle eſt dans une telle expérience, la ſomme des efforts employés par l'homme moteur, pendant le temps de ſon travail journalier. 1.° Il donne à un corps M de 25 liv. une viteſſe u de $\frac{11}{3}$ pieds par ſeconde. 2.° Ses mains ſe meuvent ſans ceſſe avec la viteſſe u; 3.° quoiqu'on le ſuppoſe aſſis, il fait effort pour garder conſtamment ſon corps droit ou panché; 4.° il ſoutient le poids du corps M pendant un temps t qui eſt de 8h, ou de 28800″. 5.° Enfin le frottement qui s'oppoſe au mouvement du cylindre, exige auſſi pour être ſurmonté un certain effort du moteur. La ſomme de tous ces efforts partiels peut être repréſentée par conſéquent par une quantité $A = (Mu + qHut + aHpt + nMpt)$. Nous nommons qHu, la quantité du mouvement que produit le moteur dont le poids eſt H, en donnant à ſes bras & à ſes mains la viteſſe convenable au travail ſuppoſé, & en entretenant cette viteſſe. Ici, la quantité qH peut être ſuppoſée $0,03.H$. aH eſt un poids, qui, pour être ſoutenu par le moteur pendant le temps t exigeroit le même effort que le moteur ne ceſſe d'employer pour conſerver l'attitude de ſon corps pendant l'action. Ici on peut ſuppoſer $a = 0,01$; (le moteur étant aſſis; & s'il étoit debout on devroit faire $a = 0,03$ à-peu-près). Enfin nM exprime la ſomme de la maſſe M, & de celle dont le poids équivaut au frottement de la machine. Ici, ce dernier poids peut être regardé comme égal aux huit centiemes de M; ainſi $n = 1,08$.

Subſtituons dans cette formule les valeurs ſuppoſées ou données, de M, u, q, a, n, t, en nous rappellant d'ailleurs que $p = 30,2$, & en eſtimant à 140 liv. le poids moyen H de l'homme. On aura $A = 2514537^2$ liv.; & ce nombre de livres, eſt la meſure approchée de la fatigue qu'un homme eſt capable, de ſupporter & de réparer pendant chaque jour d'un travail uniforme & qui n'exige pas à chaque inſtant des efforts trop violens.

Quelque ſoit donc l'ouvrage qu'on ſe propoſe de faire exécuter à un homme ou à un nombre N d'hommes, pendant un temps T, on peut aiſément juger ſi ce travail eſt

eſt au-deſſus des forces humaines propoſées en comparant la ſomme des efforts qu'il exige avec la quantité A ou NA qui eſt la meſure fondamentale de ces forces. Veut-on ſavoir, par exemple, ſi un homme, ſans être chargé d'aucun fardeau, peut marcher chaque jour pendant huit heures, en faiſant 3000 toiſes par heure. Alors ſes efforts ſont employés, 1°. à donner à ſon corps une viteſſe de cinq pieds par ſeconde; & 2°. à garder une attitude droite pendant ſa marche. L'expreſſion de la force abſorbée par ce travail eſt donc $(HV+aHp)t$ & cette quantité doit être égale à A; or en ſubſtituant à la place de H, V & a les valeurs 140, 5, & 0, 03; la valeur de ce travail eſt de 23812992. Un homme ne doit donc éprouver par une telle marche, qu'une fatigue ſupportable : & c'eſt auſſi ce que l'expérience confirme tous les jours.

S'agit-il de ſavoir ſi des hommes, en nombre N, appliqués à l'extrêmité des barres d'un cabeſtan vertical, ſont capables de faire tourner, pendant un temps t, cette machine chargée d'un poids B tel que celui d'une ancre qui doit être élevée du fond de l'eau à ſa ſurface? Alors on peut conſidérer le poids de cette ancre, comme décompoſé en deux autres forces paralleles; l'une qui paſſe & qui eſt détruite par l'axe fixe du cabeſtan; l'autre qui eſt dirigée par le point extrême des barres auxquelles les mains & les bras des moteurs ſont appliqués horizontalement. Cette ſeconde force nommée mB eſt celle qui doit être le réſultat de la ſomme des efforts des moteurs. Mais quelle eſt cette ſomme? Soit u la viteſſe de l'extrêmité des barres, les efforts déployés dans ce travail ſont exprimés néceſſairement par, $mBu+mBpt+NHut+NaHpt$ en regardant mB comme un poids qui, à l'extrémité des barres doit être mu avec une vîteſſe u, & doit être ſoutenu pendant le tems t. C'eſt, cette quantité qui ne doit pas excéder NA; autrement les N hommes ne pourroient ſupporter un tel travail pendant le tems t. Remarquons d'ailleurs que ſi l'attitude des moteurs pendant leur action, eſt telle que leurs corps ſoient inclinés ſous un angle i à l'horiſon, alors le poids H de chaque moteur ſert à augmenter l'effet poſſible de leurs efforts, d'une

quantité proportionnelle a $\frac{3}{5}$Hpt $cot.$ i. Car ſoit ce (fig. 32) la poſition inclinée du corps d'un moteur, à l'égard de la ligne horizontale en qui paſſe par ſes pieds en e. Soit i le lieu du centre de gravité de ce corps ; & c le point, ſur lequel ſont appliqués pour agir horizontalement les bras ou les mains du moteur. Le rapport de ie à ic, ou des diſtances de i aux points e & c, eſt à peu-près celui de 3 à 2. C'eſt pourquoi ſi la peſanteur du moteur, regardée comme concentrée en i, eſt repréſentée par iu & décompoſée en deux autres forces ie & ue, la 1ere ie ſe tranſmet & ſe perd au point e dans le plan ſolide ſur lequel portent les pieds du moteur. La valeur de la ſeconde ue eſt $ui.$ $cot.$ i. Cette force ue appliquée en i étant décompoſée particuliérement en deux forces, qui lui ſoient paralleles, & qui paſſent l'une par e & l'autre par c, on voit que cette derniere qui eſt horizontale, & qui en c tend à pouſſer la barre du cabeſtan, eſt exprimée par $\frac{3}{5}ui.cot.i$. Elle agit continuellement pendant un tems t; cet effet eſt repréſenté par $\frac{3}{5}$H$pt.cot.i.$ comme on l'avoit annoncé. Il faut donc exprimer par (mBu+mBpt+NH ut+NaHpt) la ſomme des efforts néceſſaires pour l'opération indiquée, & l'exécution ne devient poſſible qu'autant que cette ſomme n'excede pas la valeur de NA+$\frac{3}{5}$NH $pt.cot.i$.

Les mêmes raiſonnemens conduiſent auſſi à déterminer ſi un grand nombre d'hommes peuvent à l'aide de cordelles, & marchant ſur les bords de l'eau, traîner un bâtiment, ſur un canal, ou ſur une riviere. On doit alors remarquer, que les gens de cordelle, doivent non-ſeulement mouvoir leur corps & le bâtiment, mais auſſi ſurmonter la réſiſtance toujours renaiſſante que l'eau peut oppoſer ; & que pour cet effet ils employent avec leurs forces naturelles, une partie du poids de leur corps s'ils marchent inclinés à l'horizon. Enſuite une formule établie comme précédemment ſur ces conſidérations, fait connoître la convenance ou l'inſuffiſance des hommes employés à une telle operation.

Eſt-il queſtion de deſtiner des hommes à ramer dans un bâtiment, & d'apprécier les effets dont ils ſont capables ? Imaginons la réſiſtance que l'eau oppoſe à la

pelle de chaque rame, décomposée en deux forces paralleles qui passent l'une par le tolet (189) & l'autre par la poignée de l'aviron. Représentons cette derniere par R. C'est celle que le rameur doit vaincre par des efforts répétés & discontinus, parce qu'elle renaît à chaque coup d'aviron, & parce que ces coups se succedent avec des intervalles. L'observation a d'ailleurs fait connoître que l'intervalle égal des coups est double de la durée de chacun ou de chaque action de rameur. Soit donc u la vitesse que le rameur donne à ses mains ou à la poignée de la rame. (Négligeons, le poids de la rame qui est soutenu par le bâtiment & par l'eau, ainsi que la quantité de mouvement qui lui est communiquée par le rameur.) Alors, en ayant égard à toutes les remarques précédentes qui sont relatives à cette opération, & en conservant les mêmes dénominations, l'expression de l'effet que doit produire chaque rameur pendant ce tems t, est $\frac{1}{3}t(\text{R}+q\text{H}u+a\text{H}p)$. La valeur de cette quantité ne doit pas excéder A; car autrement les rameurs ne pourroient pendant le tems t, soutenir le travail qu'on attend de leurs forces. D'ailleurs si les rameurs, dans leur action, ajoutoient aux efforts de leurs bras, une partie du poids de leur corps, il faudroit alors y avoir égard dans la recherche des effets qui résultent des coups d'avirons, sur la vitesse du bâtiment.

Lorsque des cordages, ou des manœuvres sont tirés par des hommes qui ne répetent leurs efforts que par intervalles, on trouve encore aisément par une formule analogue aux précédentes, s'ils suffisent pour vaincre une résistance déterminée; & on peut juger non-seulement des efforts dont ils sont capables pendant un tems t, mais aussi de l'effet que le poids de leur corps peut ajouter au résultat de leurs forces naturelles.

Des hommes sont-ils appliqués à l'extrémité des barres d'un cabestan horizontal, pour élever des poids, ou pour tout autre objet, leurs efforts ne sont pas continus, mais ils sont déployés par intervalles & le poids de leur corps ajoute ici beaucoup à leur effet. Dans cet usage particulier de la force des hommes, les formules & les réflexions précédentes aident aussi à juger, ou du résultat

qu'elles peuvent produire, ou de leur insuffisance pour un travail proposé.

Enfin il est des cas, où il devient nécessaire, que de grands efforts soient déployés dans un seul instant, & pour une seule fois; alors, dans ces circonstances extraordinaires, la formule A ne peut plus être employée pour indiquer la valeur des efforts instantanés qu'on peut attendre des hommes. L'expérience cependant présente encore une base pour ces appréciations importantes. Car on a éprouvé qu'un homme ordinaire, qui est sain, & jouissant de ses forces naturelles, peut s'élancer à la hauteur de deux pieds, soit en frappant la terre de ses pieds, soit en s'appuyant par ses bras sur un point fixe. Il s'ensuit donc qu'un homme peut communiquer instantanément à la masse de son corps une vitesse telle qu'il l'eut acquise en tombant de la hauteur de deux pieds. Cette vitesse u est donnée par l'équation $u^2 = 2ep$ ainsi Hu ou H$(2ep)^{\frac{1}{2}}$ est l'expression de cet effort que fait un homme dans l'expérience indiquée. En la développant, elle est en nombres $= 140.\ 10,7 = 1498$ liv.; & la grandeur de ce résultat fait voir seule qu'une telle action d'un homme qui peut être déployée dans un instant, ne peut être répétée, qu'après de grands intervalles de tems.

Telles sont à peu-près les vues générales qui sont utiles à tous les hommes de mer pour appliquer convenablement les forces humaines dans une infinité d'opérations, ou seules, elles peuvent être employées.

254. *Du frottement.* Lorsque des forces sont employées à mouvoir des corps qui reposent sur des surfaces sur lesquelles ils doivent dans leur mouvement ou glisser ou rouler; leur effet est toujours diminué, & quelquefois anéanti par le frottement. Il est donc à propos, pour aider à juger des forces motrices, directes, ou appliquées à des machines, de faire connoître cet obstacle particulier qui souvent s'oppose au mouvement des corps.

Le frottement ne semble naître qu'au moment ou un corps appliqué sur une surface, tend à prendre ou à conserver de la vitesse dans le sens de cette surface. La direction de cette espece de force accidentelle, est toujours contraire à celle d'une vitesse naissante ou acquise;

& ſon effet eſt de la diminuer ou de la détruire. Sa cauſe n'eſt ſans doute due qu'aux inégalités dont les faces des corps ſont hériſſées ; & ces aſpérités en s'engrainant les unes dans les autres, & d'autant plus profondément que les ſurfaces en contact ſe preſſent plus fortement, forment ces obſtacles que toute force motrice doit ſurmonter avant de parvenir à faire naître, ou à entretenir la viteſſe des corps gliſſans ou roulans les uns ſur les autres.

Le frottement peut donc être toujours conſidéré comme une nouvelle force, qui agit ſur un corps tangentiellement à ſa ſurface, au point de contact de ce corps avec la ſurface ſur laquelle il ſe meut, & ſur une direction toujours contraire à celle de la viteſſe communiquée. Ainſi un corps eſt-il ſollicité au mouvement ; & ne peut-il obéir à cette action qu'en gliſſant ou en roulant ſur un autre corps ; il faut pour juger de la viteſſe définitive qu'il doit prendre, le regarder comme ſoumis à l'action, non-ſeulement de la force *motrice* ſuppoſée, mais auſſi d'une autre force *réſiſtante*, dirigée dans un ſens contraire tangentiellement au corps, & connue ſous le nom de frottement. Dans cet état des choſes, le mouvement d'un tel corps peut-être déterminé par les principes précédemment expoſés qui ont pour objet le mouvement des corps ſollicités, à la fois, par pluſieurs forces quelconques, ſoit ſur des plans inclinés, ſoit à l'aide de leviers, de tours, de poulies, de vis & de coins. Comme la poſition & la direction de la force du frottement ſont indiquées par ce qui précede, il ne reſte, pour parvenir à la ſolution de toutes les queſtions de ce genre qui peuvent ſe préſenter, qu'à déſigner le dégré d'énergie que peut avoir cette force, & ſes variétés régulieres ou accidentelles. Comme il n'appartenoit qu'à l'expérience de fixer les idées ſur l'intenſité de cette force, elle a été conſultée ; & voici le réſumé général des réſultats que ces recherches ont fait découvrir.

255. Le frottement qu'éprouvent les corps dans leurs mouvemens ſur les ſurfaces, eſt toujours à peu-près proportionnel aux preſſions que ces corps exercent ſur ces ſurfaces ; & il paroit preſqu'indépendant de l'étendue de ces dernieres. Malgré ce rapport commun & général

qui regne toujours entre les frottemens, dans des circirconſtances égales; des variétés diſtinguent ces forces réſiſtantes, lorſqu'il s'agit, ou de faire ſortir les corps de l'état de repos ou d'entretenir leur mouvement, ſoit qu'ils gliſſent à ſec, ſoit qu'un enduit intermédiaire ſépare les ſurfaces qui ſe preſſent mutuellement. En effet le frottement qui s'oppoſe à la naiſſance de la viteſſe d'une piece de bois placée ſur du bois, eſt ſupérieur à celui qu'il faut vaincre pour entretenir la viteſſe qui auroit pu être communiquée à la même piece; & leur rapport eſt celui de 9,5 à 2,2. Une telle différence ne ſe retrouve pas dans la comparaiſon des métaux qui gliſſent à ſec ſur des métaux, & le frottement qu'ils éprouvent eſt conſtamment le même. Lorſque des bois appliqués ſur des métaux doivent être tirés de l'état de repos, le frottement, (plus petit que celui des bois ſur les bois) a un rapport conſtant avec la preſſion des ſurfaces; mais ſont-ils animés d'une viteſſe plus ou moins grande, on a reconnu que les forces qui entretiennent leur mouvement, augmentant en progreſſion arithmétique les viteſſes communiquées augmentent en progreſſion géométrique. Ce même rapport variable ſe préſente encore dans les expériences où les bois gliſſent dans le ſens de leurs fibres, ſur des métaux recouverts d'un enduit, tandis que s'ils gliſſent perpendiculairement à la longueur de leurs fibres, (comme dans la rotation des axes de fer dans des boites de bois) le rapport du frottement à la preſſion reſte conſtant, ſans aucune dépendance des viteſſes. Des enduits intermédiaires produiſent des diminutions dans les frottemens des bois & des métaux, ſur-tout lorſque les corps ſe touchent par de larges ſurfaces; & le ſuif qui eſt l'enduit le plus propre à atténuer le frottement des bois, n'adoucit pas autant que l'huile celui qui s'oppoſe au mouvement des métaux ſur des métaux. Les enduits diminuent ſur-tout le frottement des axes qui roulent dans des boîtes, mais ils n'affoibliſſent pas ſenſiblement le frottement qui contrarie le mouvement des rouleaux ſur des plans horiſontaux. Ce dernier frottement de l'eſpece la plus foible eſt en raiſon directe des eſſions & inverſe du diametre des rouleaux.

Telles sont les idées générales qu'on doit avoir des frottemens. Lorsqu'il faudra en faire des applications dans la pratique des arts, on aura recours aux divers résultats, qui ont été donnés par l'expérience, & qui ont été savamment recherchés, combinés, & expliqués par Coulomb dans son mémoire sur *la théorie des machines simples.* Nous présenterons ailleurs plusieurs de ces applications, & nous nous bornerons ici à faire quelques remarques théoriques & utiles relativement à l'influence du frottement sur l'action des forces employées à mouvoir des machines. Car, après ce qui a été dit sur les forces en général, il devient superflu de répéter ici le calcul des effets des machines, en y faisant entrer la considération du frottement.

256. Dans l'usage des poulies, des cabestans, des vireveaux, & des rouleaux, un objet mérite d'être considéré particuliérement; c'est la forme la plus convenable de l'appui sur lequel repose & roule chaque extrémité, des axes de ces machines, ou généralement de celui d'un cylindre. Soit AEF (fig. 75) l'extrémité de l'axe solide d'un cylindre dont le rayon particulier est GH. Si dans sa rotation cet axe cylindrique repose par un bout, en F & E sur un appui formé par deux plans tangens ML & LN, soit GH la direction d'une force P qui presse cet axe sur son appui ou contre les points F & E. Soit décomposée cette force P en deux autres perpendiculaires aux plans LM & LN, l'une *a* dirigée suivant GF & l'autre *b* suivant GE. Nommons *m* & *h* les angles EGH, & FGH alors on aura la proportion $P:a+b::cos.\frac{1}{2}(m+h):cos.\frac{1}{2}(m-h)$ (R).

Si l'axe ne reposoit pas sur les deux plans LM & LN, mais sur un seul point de LN, alors la force P étant encore décomposée en deux autres l'une A perpendiculaire à LN & l'autre parallele à ce plan, on auroit $A:P::cos.H:1$ (Z) en nommant H l'angle nouveau de la direction de P avec GF. Ainsi en multipliant par ordre les proportions (R) & (Z), on auroit celle-ci $A:(a+b)::cos.H\ cos.\frac{1}{2}(m+h):cos.\frac{1}{2}(m-h)$. Elle fait voir que la quantité A est inférieure à $(a+b)$ parce que le terme $cos.H\ cos.\frac{1}{2}(m+h)$ a une moindre valeur que $cos.\frac{1}{2}(m-h)$. Mais le rapport de A avec $(a+b)$ est égal au rapport $nA:n(a+b$

qui eſt celui des frottemens dans les deux cas comparés ; (en ſuppoſant que la preſſion ſoit au frottement :: 1 : n). C'eſt pourquoi on doit conclure de cette conſidération que la forme du ſupport, de l'axe cylindrique, d'un corps qui tourne autour de lui, doit diminuer le frottement lorſqu'elle eſt courbe, & telle qu'elle n'offre qu'un ſeul point pour appui à chaque extrémité de l'axe de rotation. Il eſt donc convenable que les axes des poulies, des cabeſtans, des rouleaux &c. portent par leurs extrémités, ſur des appuis circulaires, pour que leurs rotations ſoient plus faciles.

257. Examinons ces machines lorſque leur rotation eſt uniforme ; & reduiſons cet examen à celui d'une poulie, (fig. 75) dont le rayon eſt R, & telle que l'axe AEF qui lui eſt fixé tourne dans une boîte KE, FI, ou telle qu'elle roule, (comme la plus grande partie des poulies qui entrent dans le gréement des vaiſſeaux) ſur un axe porté par une caiſſe ou une chape.

Dans le premier cas, un poids P entretient-il la rotation uniforme & inſenſible de la poulie autour de G, en ſurmontant, & l'effort d'un poids P ſuſpendu en bp, & la réſiſtance du frottement de l'axe en F ſur le trou de la chape ; il faut que, dans l'état d'équilibre ſuppoſé, il y ait égalité entre le moment de P & la ſomme des momens de p & du frottement. Soit GH la direction de la réſultante des forces paralleles P & p, alors la preſſion ſur F dans le ſens perpendiculaire GF, qui réſulte des poids dont la poulie eſt chargée eſt $(P+p)$ $cof.$ HGF. Le moment du frottement en F, à l'égard de G eſt donc $n.$ GF $(P+p)$ $cof.$ HGF ; ainſi on a l'équation $PR = pR + n.$ GF $(P+p)$ $cof.$ HGF, ou $(P-p)\,R = n.$ GF $(P+p)$ $cof.$ HGF. Elle fait voir que la force abſorbée par le frottement, ou employée à le vaincre, eſt d'autant plus petite que le rayon GF a moins de grandeur. C'eſt pourquoi des axes en fer qui ſous peu de volume offrent un grand dégré de réſiſtance, conviennent particuliérement aux machines dont nous venons de parler, afin de diminuer la dépenſe des forces qui ſont employées à vaincre les frottemens.

Dans le deuxieme cas, la poulie qui tourne ſur un

axe fixé à la chape, s'appuie ou s'applique en A sur cet axe, par un point A correspondant du contour du trou qui est pratiqué dans son épaisseur; & sa rotation a lieu autour du centre u de ce même trou. Soit AT la direction de la résultante des forces ou des poids P & p dont la poulie est chargée. Alors la pression perpendiculaire qui est exercée en A, sur l'axe de la poulie, est $(P+p)$ *cos.* GAT; & c'est de cette pression que dépend le frottement qui agit en A suivant NA; ainsi $PR = pR + N. Au (P+p)$ *cos.* GAT, ou $(P-p) R = n. Au. (P+p)$ *cos.* GAT. La force absorbée par le frottement, est donc d'autant moins grande, que le rayon Au du trou de la poulie est moins considérable.

Remarquons, que s'il falloit faire glisser sur un plan immobile, un corps qui le presseroit avec une force P, alors il faudroit employer inutilement & perdre une partie nP, de la force motrice F pour faire équilibre au frottement; mais supposons que ce même corps, au lieu de frotter sur un plan fixe s'appuie sur le contour d'un rouleau, qui a la liberté de tourner autour d'un axe immobile AFL, & qu'il presse avec une force P. Soit aussi bp la direction de la force motrice F qui sollicite le corps à se mouvoir tangentiellement au rouleau. Alors la pression P est transmise à l'axe de celui-ci, & il en résulte un frottement nP, dont le moment qui s'oppose à la rotation du rouleau sur l'axe, est $nP. Au$. Ainsi la partie f de la force F, qui devient nécessaire, dans ce cas, pour vaincre le frottement, est telle que $fR = nP. Au$. Comparons cette force partielle f avec celle z qu'il eut fallu employer pour vaincre le frottement nP qui a lieu lorsque le corps doit glisser sur un plan inébranlable bp. On a la proportion $z{:}f{::}nPR{:}nP.Au{::}R{:}Au$; c'est-à-dire qu'une même force peut faire avancer le corps proposé, avec plus de facilité, ou avec moins de perte, en le faisant glisser sur un rouleau, plutôt que sur une surface plane & immobile. Le rapport des forces propres à balancer les frottemens dans les deux situations, est celui des rayons du rouleau & du trou de ce rouleau si l'axe est immobile. La facilité des mouvemens imprimés dépend donc de la petitesse du trou du rouleau, & elle exige

qu'il n'y ait pas trop de jeu entre le trou du rouleau & son axe. C'est un tel avantage attaché à l'usage des rouleaux, qui en a fait placer à bord des vaisseaux, sous le cable, à son passage par l'écubier, dans les lieux ou la tournevire peut frotter lorsqu'on leve une ancre, à l'arriere des chaloupes qui sont employées à lever des ancres &c. Il faudroit en général, en placer par-tout où il est utile d'atténuer les frottemens. Cette théorie sert ainsi à expliquer les effets des moyens de ce genre dont on fait usage dans la marine pour ménager les forces des hommes. Nous la compléterons en examinant l'utilité du frottement, pour retenir de grands poids à l'aide d'un cordage qui s'enroule, par plusieurs circonvolutions, autour d'un cylindre, ou d'un pilier de forme réguliere, dont l'établissement est inébranlable.

Soit (fig. 20.) *fabcde* le contour régulier de la section d'un pilier, telle qu'une bitte, ou un taquet, ou &c.; autour duquel une corde tendue est enroulée. Supposons que la tension de la portion *lfa* de cette corde soit due à une force R qui agit dans le sens *afl*; & cherchons quelle doit être la grandeur de la puissance B, qu'il faudroit appliquer au point *b* de cette corde dans le sens *ab*, pour faire équilibre, à l'aide du frottement sur *fab*, avec la force R qui agit en *l* en sens contraire. Ce frottement dépend de la pression, qui résulte des forces R & B employées à roidir en sens contraire les portions *fa* & *ab* de la corde, & qui est exercée en *a* perpendiculairement au contour de cette section, ou dans le sens *ao*. (Le point *o* étant le centre du polygone régulier *f abcde.*) Soit *f* la résultante des forces R & B; nommons *m* & *h*, les angles que sa direction qui passe par *a*, forme avec les côtés *af* & *ab*; & désignons par 2. A l'angle intérieur tel que *fab* du polygone régulier. On doit avoir (187) la proportion $f:(B+R)::cos.\frac{1}{2}(h+m):cos.\frac{1}{2}(h-m)$. Comme B est plus foible que R, la direction de la résultante n'est pas *ao*, mais elle fait avec cette ligne un angle qui est égal a $\frac{1}{2}(h-m)$; ainsi la pression P qui résulte de *f*, ou des forces R & B, dans le sens de *ao*, c'est-à-dire, perpendiculairement en *a*, au contour du polygone, est donnée par la proportion $P:f::cos.\frac{1}{2}(h-m):1$.

Multipliant ces deux proportions par ordre on obtient celle-ci, $P:(B+R::cos.\frac{1}{2}(h+m):1$ ainsi $P=(B+R)cos.A$. Le frottement exercé en *a* est donc $nP=n(B+R)cos.A$. Cette résistance ajoutée à la force B, doit faire équilibre à la force R, c'est pourquoi on a l'équation $R=B+nBcos.A+nRcos.A$, ou $R(1-ncos.A)=B(1+ncos.A)$, ou enfin $B=RS$ si on représente par S le quotient de $(1-ncos.A)$ divisé par $(1+ncos.A.)$

Supposons, que la corde embrasse les trois côtés égaux *fa*, *ab*, *bc*; & qu'on demande la grandeur d'une force *c*, qui agissant au point *c* de la corde, dans le sens *bc*, & réunie à la résistance du frottement, suffiroit pour faire équilibre à R. Déjà nous connoissons une force B, qui avec le frottement sur le point *a*, résiste à R; & comme la tension qu'elle produit dans la partie *ab* de la corde, est la même dans le sens *ab* comme dans le sens *ba*, il s'ensuit que la force C réunie au frottement de la corde sur le point *b*, faisant équilibre à la force B, doit aussi anéantir tout l'effet de R. En suivant le procédé précédent, nous voyons que la résultante T des forces B & C est donnée par la proportion $T:B+C::cos.\frac{1}{2}(H+M):cos.\frac{1}{2}(H-M)$. Mais la pression *q* qui résulte de T, perpendiculairement au contour du polygone & au point *b*, ou suivant *bo*, est telle qu'on a la proportion $q:T::cos.\frac{1}{2}(H-M):1$. Ainsi en multipliant ces proportions par ordre, on en conclut que $q=(B+C)cos.A$. Le frottement qui est $n(B+C)cos.A$, étant donc ajouté à B, on a l'équation $B=C+nBcos.A+nCcos.A$, ou $C=BS=RS^2$.

Si le cordage embrassoit les quatre côtés égaux *fa*, *ab*, *be*, *cd*, la force D, qu'il faudroit lui appliquer en *d* dans le sens *cd* pour faire équilibre à R, en ajoutant à la premiere l'effet du frottement, seroit trouvée par un raisonnement semblable aux précédens, de la grandeur RS^3. On voit donc que ces forces B, C, D, forment une suite de termes en progression géométrique, lorsque les parties du contour du polygone, qui sont embrassées par la corde, ne sont que les termes d'une progression arithmétique. La puissance propre à faire équilibre à la force R diminue donc dans un rapport très-grand, lorsque le cordage à l'aide duquel elles se balancent, ne fait que

peu de révolutions autour d'un pilier fixe : & même le nombre de ces révolutions étant augmenté, il ne faut ſouvent aucune puiſſance pour produire l'équilibre cherché. Si le pilier fixe, au lieu d'être de forme polygonale, étoit cylindrique, ou conique, les mêmes raiſonnemens conduiroient à des réſultats ſemblables. On voit donc pourquoi ſouvent la force d'un ſeul homme ſuffit pour empêcher de gliſſer un cordage qui enveloppe par plusieurs tours la cloche d'un cabeſtan ou d'un vireveau, lorſque ces machines ſont employées à élever de grands poids tels que ceux des ancres &c. C'eſt ainſi que le frottement empêche de gliſſer un cable qui ne fait qu'un ou deux tours ſur un montant de bitte, lorſqu'attaché à une ancre mouillée, il ſert à ſoutenir un vaiſſeau contre les chocs irréguliers & ſouvent réunis, des lames, des vents & des courans. Enfin c'eſt au frottement que ſont dus les effets ſi conſidérables & ſi utiles, des amarrages, des aiguilletages, des bridures, des portugaiſes, des mariages de tournevires, des nœuds, des tours morts, des étalingures &c.

258. *De la roideur des cordes.* Les forces comme nous l'avons déjà dit, tranſmettent ſouvent, à l'aide des cordes, leur action aux corps qu'elles doivent mouvoir; & leur effet, ſuivant le mode d'application de ce moyen, eſt alors plus ou moins diminué par la roideur des cordes.

Si, à l'aide d'un ruban ou d'un cordon infiniment flexible, qui paſſe ſur une poulie fixe A*bm* (fig. 76), deux poids ſont attachés en S & P; l'un d'eux P peut entrainer l'autre *p*, dès qu'il le ſurpaſſe ſeulement d'une quantité plus grande que le frottement produit par ces poids ſur l'axe de rotation de la poulie. Mais ſi ces poids P & *p* ſont liés par un cordage PABS, qui ſoit compoſé, comme ils le ſont tous, de fils & de torons qui ont reçu une torſion; on doit penſer, qu'un tel cordage, ne peut comme un ruban, ſe plier ſans effort, & que ſa roideur doit l'empêcher de s'appliquer auſſi parfaitement ſur la gorge de la poulie, lorſque le poids P commence à entraîner *p*. Sans doute cette même roideur qui s'oppoſe à ſon enroulement ſur la poulie du côté de *p* en *b* ſembleroit devoir auſſi rendre néceſſaire une certaine force employée au déroulement du cordage du

côté de P, mais cette force propre à redresser le cordage ou à le replacer dans son état primitif est bien moindre que celle qu'il faut pour le plier; & elle peut même être supposée négligeable & nulle. Ainsi supposons que P soit sur le point d'entraîner *p*. La portion *bf* de ce cordage, qui étoit tangente en *b* & verticale au moment du repos, devroit s'étendre sur l'axe *bu* au premier mouvement de la poulie; mais elle résiste par sa roideur, & prend la position *bdp*, de maniere qu'elle reste tangente à la poulie en *b*, au lieu de le devenir en *u*, On peut donc regarder cette petite portion *bd* du cordage, comme sollicitée en même tems, au point *d*, par deux forces qui l'obligent à prendre & à garder la situation *bd*. L'une de ces forces représentée par *cd* ou *bu* est le poids *p*, qui la tire verticalement dans le sens *dp*; & l'autre, dirigée dans le sens *ud*, avec une action qui, proportionnelle à la roideur du cordage, est représentée par *ud* ou *bc* tend à l'éloigner de la position verticale *uf*. dans cet état des choses, & formant le parallélograme des forces *beud* on peut faire la proportion, $bd:du+dc::$ $cos.\frac{1}{2}(bdu+bdc):cos.\frac{1}{2}(bdu-bdc)$. L'angle *bdc*, est peu comparable abdu, lorsque le poids *p* est un peu considérable. Ainsi on peut regarder *bd* comme étant de même valeur que $(du+dc)$. Donc $bd=du+dc$, ou $P=p+du$, & $(P-p)=du$ (A.)

Cette différence $(P-p)$, qui seroit nulle dans l'état d'équilibre, si deux poids P étoient suspendus par un ruban, est donc la portion de P qui est consommée, non à soutenir *p*, mais à vaincre la roideur du cordage représentée par *ud*. Cherchons donc à exprimer l'effet de cette roideur; & pour y parvenir, considérons le *commettage* d'un cordage.

Des fils reçoivent d'abord une torsion particuliere. Ils sont ensuite réunis en faisceaux dont on fait des *torons*, en les tordant en sens contraire; & enfin ces torons commis ensemble, composent un cordage dont la longueur est plus ou moins inférieure à celle des fils élémentaires. Dans ce cordage, ces fils forment des spirales, alongées, couchées & serrées les unes sur les autres, en s'étendant d'un bout à l'autre de la longueur totale. Ils se pressent

mutuellement, & avec d'autant plus de force que la torsion des torons est plus considérable. Ainsi un tel cordage, qui pendant sa formation reste toujours étendu dans toute sa longueur, vient-il à être forcé, dans l'usage qu'on en fait, d'embrasser une surface courbe; les fils qui s'appuyent les uns sur les autres résistent par conséquent au changement qu'on veut produire dans leur direction primitive. Leur résistance doit même être d'autant plus grande que la tension du cordage est plus forte, & que la courbure de la surface sur laquelle on veut l'appliquer est plus considérable. Sous ce dernier rapport, la roideur s'oppose d'autant moins à la flexion d'un cordage, que le rayon d'une poulie sur laquelle il s'enroule, est plus grand; ou son effet est en raison inverse du rayon R de cette poulie. Quant à la tension du cordage, on doit la trouver par celle des fils élémentaires. Celle-ci dépend de deux causes; de la puissance qui agit sur le cordage, & de la torsion que chacun des fils a reçu de la main du cordier. Il faut donc ajouter ensemble les effets de ces deux causes (dont l'une est constante) pour estimer toute l'influence de la tension de chaque fil. C'est ensuite en répétant cette somme autant de fois qu'il y a de fils dans le cordage, qu'on peut connoître tout l'effet de la tension du cordage même. Le nombre des fils de divers cordages également commis, croit comme les quarrés de leurs rayons; ainsi l'effet de la tension du cordage, ou la résistance partielle que cette cause lui fait opposer à sa flexion, est proportionnelle à $r^2(a+bp)$ (en représentant, par ar^2, la partie de cet effet qui est due à la torsion, & par bpr^2 celle que produit le poids ou la force mottrice p). Réunissant enfin ce rapport à celui qui dépend du rayon R de la poulie, on peut dire que ud, ou l'effet de la roideur du cordage est (dans l'usage des poulies) en raison directe de $r^2(a+bp)$, & inverse de R. La formule précédente (A) qui exprime ces rapports est donc $(P-p)R = r^2(a+bp)$. Cette force $(P-p)$ est donc toujours celle qu'il faut ajouter à F ou à la force destinée à mettre une poulie en mouvement, lorsqu'on veut obtenir un effet utile qui soit proportionné à F.

Les résultats de cette formule s'accordent parfaite-

ment avec l'expérience, lorſque les cordes ſont groſſes & neuves. Mais ſont-elles à demi uſées, l'effet de leur roideur n'eſt plus proportionnel à r^2, mais à la puiſſance $\frac{2}{3}$ de r; & pour des cordes tres-petites, & très-flexibles, il n'eſt plus qu'en raiſon du ſimple rayon r.

Au reſte l'expérience (voyez le mémoire de *Coulomb*) a fait voir que l'effet de la roideur des cordes, dans la marine, peut être regardé comme indépendant de la viteſſe des cordes. Enſuite cette réſiſtance dans les cordes goudronnées, n'excede pas d'un ſixieme celle des cordes blanches, & elle peut être exprimée par la même formule. Enfin les cordes employées, ſont-elles mouillées & imbibées d'eau, leur réſiſtance en reçoit quelque accroiſſement, parce qu'alors la tenſion des fils doit néceſſairement être augmentée par une telle cauſe. Ces réflexions, ces réſultats de l'expérience, & la formule indiquée, ſuffiſent pour aider à évaluer la force, qui équivaut à la roideur des cordes dans tous les uſages qu'on peut en faire. Ainſi une telle force dans le calcul des machines, doit être employée, comme toutes les autres forces motrices qui leur ſont appliquées, lorſque par les principes généraux déjà établis précédemment, on ſe propoſe de déterminer l'effet réel & utile qu'on doit en attendre.

259. *De l'action de l'eau & de l'air.* L'eau eſt compoſée d'une infinité de molécules élémentaires, dont la forme & l'arrangement ſont encore inconnus aux phyſiciens. Ses parties doivent cependant être regardées, comme indépendantes les unes des autres, & ſur-tout d'une mobilité ſi grande qu'elles cedent & changent de place à la moindre impulſion; tandis que leur aſſemblage ou la maſſe qu'elles compoſent reſte incompreſſible, ou conſerve un même volume ſous la preſſion la plus puiſſante.

L'eau peut être conſidérée, en repos ou en mouvement; ainſi que les corps qu'elle enveloppe, ou qu'elle ſoutient flottans à ſa ſurface. Dans ces divers états, chaque molécule fluide exerce ou éprouve une action différente. Sous tous ces rapports, de tels effets méritent d'être connus & expliqués, ſoit pour éclairer la pratique de l'art de la marine, ſoit pour accélérer ſes progrès. C'eſt pourquoi

nous allons analyser, d'abord les loix de l'équilibre d'une masse d'eau; & ensuite nous examinerons l'état des molécules fluides, lorsqu'elles forment un courant, ou lorsqu'elles font partie des lames dont se couvre une mer agitée par le vent. Enfin nous présenterons les loix générales que paroit suivre la nature dans l'action que l'eau calme ou courante exerce sur les corps qui flottent & sur ceux qui ont un mouvement quelconque.

260. L'extrême mobilité, & l'indépendance réciproque des molécules élémentaires de l'eau, conduisent à penser que dans une masse fluide le repos de chaque élément, ne peut avoir lieu, que lorsque chacun est sollicité également à se mouvoir sur toutes sortes de directions. Cette égalité d'action & de réaction, ou de pression, qui est éprouvée & exercée par chaque molécule d'une masse d'eau en repos, est donc une de ces vérités fondamentales auxquelles notre raison ne peut refuser d'adhérer; & l'expérience d'ailleurs en offre des preuves sensibles qu'il est à propos de présenter.

Verse-t-on de l'eau dans un tuyau *abdo* (fig. 88) composé d'une branche verticale *ab*, qui est liée, & qui communique à deux autres branches cylindriques *db* & *do*, inclinées sous un angle quelconque à l'horizon. On observe que l'eau ne parvient à un repos parfait que lorsque les molécules supérieures, placées en *o* & *a*, sont sur une même ligne horizontale *oe*. Dans cet état de repos, la molécule *d* éprouve dans le sens *bd* une certaine pression; & l'équilibre exige que dans le sens *db* elle soit repoussée par une pression égale. Cet état de repos subsiste encore lorsqu'à la colonne inclinée *ao*, on substitue non-seulement, une colonne verticale *dr*, mais aussi des colonnes multipliées & inclinées à volonté qui se réunissent & se communiquent en *d*. Il faut donc alors que la pression exercée sur *d* suivant *bd*, balance, & les pressions isolées de chacune de ces colonnes inclinées diversement; & leurs pressions, réunies, même lorsque leur nombre est infini. Il faut donc que la pression exercée sur *d* suivant *bd* soit transmise par cette molécule dans le sens de toutes les colonnes supposées & imaginables. Il faut même aussi qu'elle soit égale, sur toutes leurs directions; car s'il étoit

une

une ligne ſuivant laquelle la preſſion ſeroit inférieure, alors la molécule *d* s'échapperoit de ce côté. La preſſion que chaque molécule d'une maſſe fluide éprouve & exerce, eſt donc égale dans tous les ſens.

Remarquons que toutes les colonnes fluides ſuppoſées qui autour de *d* ſont en équilibre, & qui contiennent des maſſes d'eau différentes, n'ont de commun entr'elles qu'une même hauteur verticale *dr*, ou une égale diſtance de leur baſe commune au niveau de l'eau. On doit donc conclure que les preſſions qui ſont exercées en tout ſens par deux molécules quelconques, paroiſſent devoir être proportionnelles à leurs diſtances au niveau de l'eau. Cette vérité peut d'ailleurs être démontrée directement. En effet ne conſidérons que le filet fluide & vertical *dr*. Incompreſſible, il eſt compoſé d'autant de molécules *m* qu'il y a de points dans la verticale *dr* dont la longueur eſt *h*. La molécule *d*, ne doit être preſſée par ce filet qu'en raiſon de la ſomme des poids *mg* des molécules *m* qui le compoſent. (*g* eſt la viteſſe que tend à imprimer la peſanteur à chaque partie de matiere, ſur le globe). C'eſt cette preſſion qui en *d* fait équilibre, ſeule, à celle de tous les filets inclinés qu'on peut imaginer avoir *d*, pour baſe, Il s'enſuit donc que la preſſion qui eſt éprouvée ou exercée en tout ſens par une molécule élémentaire *d*, d'une maſſe d'eau en repos, eſt proportionnelle à *hmg*. Elle eſt par conſéquent en raiſon de ſa diſtance *dr* ou *h* au niveau de l'eau. On auroit encore démontré cette vérité en conſidérant un filet *dz*, inclinée à l'horiſon ſous un angle *i*, & ayant *d* pour baſe. Car la ſomme des poids des molécules qui compoſent ce filet *dz*, eſt *mg. dz*; mais ces poids que la peſanteur dirige verticalement, n'agiſſent dans le ſens *zd*, qu'avec une force qui eſt à leur force verticale :: *dr*:*dz*; c'eſt pourquoi leur action ſur *d*, dans le ſens *dz* eſt encore, comme celle du filet *dr*, repréſenté par *mgh*. La preſſion de chaque molécule d'une maſſe d'eau, eſt donc égale en tout ſens; & cette égalité de preſſion me paroît être ſeule néceſſaire pour l'explication de tous les effets que l'eau peut produire, comme force *motrice* & *réſiſtante*.

261. Supposons qu'une masse d'eau renfermée dans un vase *onqpm* (fig. 4) puisse s'échapper par une ouverture *a*, d'un diametre très-petit à l'égard de celui de la base *nqpr* du vase : & cherchons la vitesse V avec laquelle l'eau doit s'écouler. Remarquons que si la base du cylindre vertical, ou la masse d'eau *onqpm* est renfermée, étoit subitement anéantie ; l'eau descendroit en masse, en suivant les loix de la chûte des corps graves. Il en seroit de même d'un simple filet vertical *sa*, si celui-ci isolé, étoit enfermé séparément dans un canal convenable. mais ce filet *sa*, fait-il partie de la masse d'eau *onqpm*, toutes les molécules qui la composent, sont alors pressées dans tous les sens (260) par les molécules environnantes, en raison de leurs distances au niveau de l'eau *om* ; & cette pression n'a pas lieu lorsqu'un cylindre isolé, separe de la masse, le filet fluide *sa*. C'est pourquoi la molécule, qui dans cette masse *onpqm* se trouve placée à l'orifice *a*, est la seule du filet *as*, qui ne soit pas pressée de bas en haut, tandis qu'elle est pressée de haut en bas comme les autres molécules supérieures. Cette derniere pression doit donc tendre à la chasser du vase par l'orifice *a*. Cette molécule écoulée, est aussi-tôt remplacée par une nouvelle qui est poussée par l'orifice *a*, non-seulement par le filet *as*, mais par l'action de toutes les molécules de *onpqm* qui toutes tendent à s'échapper par *a*. On doit donc conclure que si le vase reste constamment plein d'eau, & à la même hauteur *h* au-dessus de l'orifice *a* dont la surface est A, chaque molécule qui s'échappe successivement est chassée par une même pression proportionnelle au poids du filet *as*, ou *hmg*. Ainsi pendant un instant infiniment petit *t* (qu'on prendra pour l'unité de tems) il doit s'écouler une masse d'eau M dont toutes les molécules reçoivent une égale vitesse V à leur sortie. Cette masse M écoulée pendant *t*, peut-être regardée comme ayant la forme d'un cylindre dont la base est A, & la hauteur une ligne représentée par V, puisque cette ligne est l'espace parcouru par la premiere molécule dans l'unité de tems. Rappelons-nous maintenant, qu'une force motrice est toujours proportionnelle à la quantité de mouvement qu'elle fait naître ; par son action répetée

pendant une unité de tems t; & nous verrons qu'on doit faire cette équation $hmgt = \text{MV} = \text{AV}^2$ (B). Si le vase n'eut été plein que jusqu'à une hauteur z, alors on auroit eu $zmgt = \text{A}b^2$ en nommant b la vitesse de l'eau qui s'écouleroit dans le nouvel état des choses; & en comparant les vitesses des écoulemens dans ces deux suppositions, leur rapport est donné par cette proportion, $h:z::\text{V}^2:b^2$. Les quarrés des vitesses des écoulemens, sont donc comme les distances de l'orifice au niveau de l'eau, ou comme les quarrés des vitesses qu'acquerroit un corps en tombant des hauteurs h & z.

Ce résultat annonce que la vitesse V, doit être réellement celle qui seroit acquise par un corps dans sa chûte de la hauteur h, & il est facile d'en compléter la démonstration. Car supposons que le filet af, enfermé dans un cylindre qui l'isole de la masse $onqpm$, descende par l'orifice a, en vertu de la seule pesanteur; il doit s'écouler pendant la premiere unité de tems t, une portion f du filet af, avec une vitesse g qu'on peut regarder comme uniforme puisque le tems t est très-petit. Cette portion f est cylindrique. Sa base est A, & sa hauteur x peut être représentée par g. Ainsi sa masse est $\text{A}g$. La quantité de mouvement qui est communiquée à cette masse pendant t est $\text{A}g^2$. La force qui la produit est le poids de f qui est xmg, & elle lui est proportionnelle; ainsi on peut dire que $xmgt = \text{A}g^2$. Comparons cette équation à (B), on en conclura cette proportion $hmgt:xmgt::\text{AV}^2:\text{A}g^2$; ou $h:x::\text{V}^2:g^2$ (D), si g est la vitesse acquise par une molécule m en tombant d'une hauteur x. Soit q la vitesse qu'elle acquerroit en tombant de la hauteur h. Leur rapport est tel qu'on a la proportion $x:h::g^2:q^2$, de sorte qu'en multipliant par ordre cette proportion & celle (D), on en conclut celle-ci $1:1::\text{V}^2:q^2$. Elle prouve que $\text{V} = q$, ou que la vitesse avec laquelle l'eau s'écoule par le petit orifice a d'un grand vase, est égale à celle qu'acquerroit un corps grave en tombant du niveau de l'eau jusqu'à cet orifice. La même regle s'étend aussi à la vitesse d'écoulement par un orifice latéral; car la pression qui est égale dans tous les sens, doit produire latéralement la même vitesse avec laquelle elle chasse l'eau par un orifice

a fait au fond *nqp*. On doit donc conclure que l'eau de la mer qui s'introduit par quelque ouverture dans la cale d'un vaiſſeau, s'y précipite avec une viteſſe dont le quarré eſt proportionnel à la hauteur du niveau de la mer au-deſſus de la voie d'eau ; & qu'ainſi les voies d'eau les plus profondes ſous l'eau, ſont auſſi les plus dangereuſes.

262. Puiſque la preſſion éprouvée & exercée en tout ſens, par une molécule qui fait partie d'une maſſe fluide, dépend du poids d'un colonne, dont elle eſt la baſe, & qui a pour hauteur ſa diſtance Z au niveau de l'eau ; puiſque la viteſſe qu'elle tend à prendre, eſt celle qu'acquerroit un corps en tombant de cette hauteur ; il s'enſuit que ſi cette molécule peut ſe ſouſtraire totalement à cette preſſion, (ce qui ne peut avoir lieu que lorſqu'elle fuit avec une viteſſe V due à la hauteur Z), elle ne doit plus exercer de preſſion dans aucun ſens. Car elle n'en éprouve plus elle même dans ſa fuite, & ſon action eſt eſſentiellement la même (260) ſur toutes les directions poſſibles. une molécule fluide qui s'écoule avec toute la viteſſe V due à ſa diſtance Z au niveau de l'eau, ne preſſe donc aucunement les parois du canal ou elle coule librement. Mais cette molécule ne peut-elle fuir avec cette viteſſe V, & ne peut-elle prendre qu'une viteſſe plus petite u due à une hauteur z, alors on doit conſidérer la preſſion qu'elle éprouveroit dans l'état de repos, comme produite par les poids de deux colonnes d'eau exhauſſées l'une ſur l'autre, & ayant pour hauteur, l'une z & l'autre $Z-z$. Remarquons auſſi que ſi dans l'état de mouvement, cette molécule n'eut été preſſée que par une colonne fluide d'une hauteur z (la viteſſe étant due à cette même hauteur) elle n'eut éprouvé ni exercé aucune preſſion pendant ſon mouvement ; ainſi la preſſion qu'elle éprouve, & qu'elle exerce lorſqu'elle ſe meut avec une viteſſe u, ne peut provenir que du poids ou de la preſſion d'une colonne fluide qui a pour hauteur $(Z-z)$. C'eſt pourquoi dans un courant d'eau qui a une viteſſe due à la hauteur z, chaque molécule emportée d'un mouvement commun, ne preſſe & n'eſt preſſée qu'en raiſon du poids d'une colonne fluide qui auroit $(x-z)$ de hauteur en ſuppoſant que x ſoit ſa diſtance au niveau de l'eau courante.

L'expérience confirme évidemment les résultats de ces réflexions & on en trouve des preuves décisives dans les ouvrages de Daniel Bernoulli & de Bossut. Moi-même j'ai plongé verticalement dans l'eau, un tuyau cylindrique *ao* (fig. 1. G) ouvert par les deux bouts, ainsi qu'un tuyau coudé *bif*, en tenant la branche *bi* verticalement. Dans l'un & l'autre tuyau, j'ai introduit un flotteur *pgq*. Les flotteurs, lorsque les tuyaux étoient plongés dans l'eau calme se tenoient à la hauteur de *a* & de *b*, ou à la surface de l'eau environnante; mais les tuyaux étant plongés, jusqu'à *a* & *b*, dans la même eau lorsqu'elle formoit un courant, dirigé suivant *dc*, avec une vitesse due à la hauteur $z = ae$, dès lors les flotteurs s'abaissoient de la hauteur *ae* ou *z* dans chaque tuyau. Les hauteurs *ao* & *bi* des colonnes fluides intérieures, diminuoient ainsi par l'effet du courant de la quantité *z*, à laquelle étoit due la vitesse commune des eaux environnantes. Ce même abaissement avoit encore lieu dans le tuyau recourbé, lorsque le coude *if* étoit placé dans une direction perpendiculaire à celle du courant; ce qui devoit être, puisque la pression de l'eau en *f* étoit également affoiblie en tous sens. La pression de chaque molécule intégrante du courant n'est donc pas en raison de sa distance au niveau de la masse de ces eaux, mais en raison de cette distance diminuée de la hauteur *z* à laquelle est due la vitesse des eaux. C'est pourquoi, au milieu d'une riviere, lieu ou le mouvement de ses eaux est parfaitement libre, le niveau est plus élevé que sur les bords du lit où la vitesse commune est diminuée, ou retardée soit par le frottement, soit par d'autres obstacles accidentels.

263. Examinons aussi l'action des molécules d'une eau courante sur celles d'une eau tranquille, lorsque les premieres animées d'une vitesse due à la hauteur *z*, viennent choquer les dernieres. Un tuyau coudé *bif* est-il plongé jusqu'en *cd*, dans un courant dirigé de *c* en *d*; ou suivant *fi*; le courant vient choquer immédiatement par l'orifice *f*, le fluide qui est renfermé dans *bif*. Pour connoître l'effet de ce choc, remarquons que chaque molécule qui arrive & frappe en *f*, est arrêtée par l'orifice qui est ouvert directement au courant. Elle ne peut donc plus alors se soustraire par sa vitesse hori-

ſontale, à la preſſion des colonnes fluides environnantes, qui ont pour hauteur la diſtance h de f au niveau de l'eau. Ces molécules agiſſent donc ſur l'eau intérieure du tuyau, en raiſon de cette hauteur h, & forcent la colonne intérieure de prendre d'abord la hauteur h; mais l'action que des molécules qui ſe ſuccedent ſans interruption, exercent à l'orifice f, eſt d'ailleurs en raiſon de la viteſſe qu'elles perdent par leur réduction au repos, ou plutôt en raiſon de la preſſion de la colonne qui auroit pour hauteur celle z à laquelle eſt due la viteſſe commune. Le fluide intérieur ſous cette preſſion, ne doit donc pas ſe fixer à la hauteur h, mais il doit s'élancer & ſe maintenir à la hauteur $h+z$. L'expérience a confirmé ce nouveau réſultat; car un flotteur introduit dans le tuyau indiqué bif, s'éleve d'une quantité z au-deſſus de la ſituation qu'il conſerveroit dans une eau calme; lorſque le courant dans lequel il eſt plongé, aborde perpendiculairement l'orifice f & lorſque ſa viteſſe eſt due à une hauteur z. *Pitot* avoit obſervé cet effet; & il en avoit fait uſage pour meſurer la viteſſe des eaux d'une riviere. Mais les autres effets déjà indiqués (262) lui étoient échappés. On a voulu faire de la découverte de Pitot une application à la marine, & en déduire la meſure du ſillage des vaiſſeaux; mais l'agitation des bâtimens à la mer doit rendre cette méthode impraticable. On a même été plus loin tout récemment; & on a vu fauſſement, des moyens ſûrs pour indiquer aux navigateurs les vrais tirans d'eau de l'avant & de l'arriere d'un vaiſſeau flottant, dans des tuyaux recourbés tels que bif, qui placés intérieurement à la proue & à la poupe, communiqueroient avec la mer par un orifice f. De tels moyens ne donnent des réſultats exacts dans un vaiſſeau en repos, qu'au milieu des eaux calmes. Mais dans un courant, ils indiquent la viteſſe des eaux, ſoit par l'abaiſſement du flotteur dans le tuyau placé ſous le courant, ſoit par ſon aſcenſion dans le tuyau ouvert au courant. Les mêmes principes démontrent qu'il y a des erreurs néceſſairement attachées à ces inſtrumens, lorſqu'un vaiſſeau eſt ſur une mer agitée, ou lorſqu'il a un mouvement propre.

264. Ces principes ſimples & clairs, ont auſſi d'autres conſéquences qui ſont très-importantes; mais elles ne

peuvent pas trouver place dans cet ouvrage, ſoit parce qu'il eſt élémentaire, ſoit parce qu'elles doivent faire partie d'un traité direct *de l'art de la marine.* On en peut conclure, & la preſſion qu'éprouvent & exercent les molécules qui entrent dans la compoſition d'une *lame rbq* de la mer (fig. 5. G), & la formation de ces mêmes lames, & enfin leur marche progreſſive dans l'eſpace ſous l'impulſion du vent, qui les produit. On en conclut la figure qu'a dû prendre la ſurface des mers du globe, en combinant, avec l'effet de la rotation de la terre ſur ſon axe, la peſanteur qui anime toutes ſes parties, ou plutôt l'attraction générale qui porte tous les corps de l'univers les uns vers les autres, en leur imprimant une tendance mutuelle, qui eſt en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances reſpectives.

On en conclut encore que le globe, s'il eut été recouvert totalement par la mer, eut dû prendre & garder une forme qui n'étoit pas parfaitement ſphérique, mais elliptique, (fig. 89) avec des axes dont les longueurs ſeroient dans le rapport de 229 à 230, tel que *Newton* l'avoit préſumé, & tel qu'il a été donné par des meſures géodéſiques. Enfin on conclut de ces principes combinés avec les loix de l'attraction, les effets que le ſoleil & la lune doivent exercer & exercent ſur les eaux de la mer; c'eſt-à-dire les marées, leurs circonſtances, leur grandeur, leur cours, les époques de ces phénomenes, l'ordre de leur ſucceſſion, & les variétés qui les diſtinguent ſoit en pleine mer, ſoit ſurles côtes des grands continens (fig. 90). — Tous ces objets dont les détails ſont immenſes autant qu'intéreſſans, & qui ont les rapports les plus immédiats à la marine feront conſidérés avec tous les développemens qu'ils doivent avoir dans un traité ſur cet article; traité qui doit ſuivre ces élémens pour en préſenter les applications auſſi utiles qu'elles ſont générales pour toutes les branches de cet article.

265. Ces applications s'étendent auſſi aux phénomenes de *l'air*, c'eſt-à-dire de ce fluide qui enveloppe la terre dans tout ſon contour & qui la recouvre ſans interruption juſqu'à une certaine hauteur. Car les parties de ce fluide ſont mobiles & peſantes comme celles de l'eau, & chaque mo-

lécule dans la masse de l'atmosphere, exerce, comme elle éprouve dans tous les sens, une pression qui est proportionnelle à sa distance au niveau de l'atmosphere. C'est pourquoi, dans ce fluide, comme dans une mer qui environneroit la terre, le soleil & la lune par l'effet de l'attraction universelle doivent produire un courant oriental dont la vitesse varie suivant les positions des molécules aériennes à l'égard des astres attirans. C'est donc à cette cause bien naturelle qu'on doit attribuer en partie, le vent alisé qui regne constamment dans la zone torride & qui est due, en plus grande partie aux effets de la raréfaction accasionnée par la chaleur directe ou réfléchie du soleil. Les développemens de ces phénomenes, ainsi que des *moussons*, & des *vents variables*, sont aussi renvoyés au traité *de l'art de la marine*, & nous ne nous arrêterons ici qu'à certaines considérations particulieres.

266. Un des caracteres distinctifs de l'eau & de l'air ; & celui que nous devons sur-tout remarquer, est que le premier fluide est incompressible, & que sa densité est égale dans tous les points d'une colonne verticale lorsque sur toute sa longueur elle éprouve une même température. Dans une colonne d'air, il en est autrement. Les parties supérieures, compriment par leur poids, le fluide inférieur ; ces parties inégalement denses se dilatent inégalement par l'action d'un même degré de chaleur ; & celles qui sont dans un état de compression, tendent par leur élasticité à reprendre le volume primitif qu'elles occuperoient isolées, avec une force qui est proportionnelle non-seulement à la force comprimante, mais aussi à la chaleur qui leur est communiquée. Soit partagée une colonne verticale de l'atmosphere en plusieurs tranches de même épaisseur. La densité de chacune (en n'ayant pas égard à leur température) est alors en raison de la compression qu'elle éprouve, ou de la somme des poids des tranches qui lui sont supérieures. Nommons a, b, c, d, &c. les poids ou les densités de ces tranches (en les comptant de la couche supérieure ou extrême de l'atmosphere). On peut dire que $b:c:d:$ &c: $:a:a+b:a+b+c:a+b+c+d:$ &c. Les termes des derniers rapports sont en progression géométrique; car on peut établir par exemple ces rapports

$a+b:a+b+c::a+b+c:a+b+c+d$; puisque $d:c::a+b+c:a+b$; & par conséquent il est démontré que les densités a, b, c, d, &c. des tranches également épaisses de l'atmosphere, ou les pressions qu'elles exercent comme celles qu'elles éprouvent, croissent en progression géométrique, tandis que les distances des tranches au niveau de l'atmosphere ou à la couche extrême, sont en progression arithmétique. C'est pourquoi si on exprime ces densités par des nombres, ainsi que les distances indiquées, ces dernieres doivent être les logarithmes des premieres (87). Désignons par H la hauteur totale de l'atmosphere; par X & x les distances de deux couches d'air, à la surface de la mer; & par P, p, les pressions exercées par ces deux couches; on peut dire que $H - X = log. P$, & $H - x = log. p$. On en conclut que $X - x = log. p. - log. P$; & si $x = o$, c'est-à-dire si une des couches est prise au niveau de la mer, on doit avoir $X = log. p. - log. P$.

267. Remarquons qu'à la surface de la mer, la pression p de l'air fait équilibre au poids d'une colonne verticale de mercure qui a h de hauteur, & une densité uniforme D. Ainsi $p = hD$. De même $P = BD$, en nommant B la hauteur du barometre dans la couche d'air qui est élevée de X au-dessus de la mer, d'où on conclut que $X = log. hD - log. BD = log. h - log. B$. Si m indique la hauteur du barometre dans une couche d'air qui est à une distance z du niveau de la mer, on doit avoir $z = log. h - log. m$, & en comparant ces équations on conclut que $X:z::log. h - log. B:log. h - log. m$. On peut donc déterminer la grandeur de z, si on connoît les quantités x, h, m, & B. La hauteur d'un lieu au-dessus du niveau de la mer, peut donc être connue, si on a observé la hauteur du barometre & dans ce lieu & au bord de la mer, & dans une autre station dont la distance au niveau de la mer a été mesurée. Cependant les résultats qu'on peut obtenir par la regle précédente, ne doivent pas être regardés comme très-exacts, puisque nous n'avons eu égard ni à la température des couches d'air, ni à la quantité d'eau plus ou moins grande que l'eau peut tenir en dissolution ; car ces causes font varier considérablement la pression de l'air.

Lorſqu'on a dit précédemment que la preſſion de l'air fait équilibre à une colonne de mercure dont la hauteur eſt h; on doit entendre que la ſomme des poids de chaque unité de volume en mercure dont cette colonne eſt compoſée, preſſe ſur ſa baſe autant que celle-ci eſt preſſée par le poids ou le reſſort de l'atmoſphere qui repoſe ſur elle. La denſité D du mercure eſt proportionnelle au poids d'une unité de ſon volune; ainſi en répétant D autant de fois qu'il y a d'unités de volume dans h, on doit dire pour l'équilibre que $h\text{D}=p$.

268. Si la baſe de la colonne de mercure, au lieu d'être preſſée par le poids P de l'atmoſphere, l'étoit uniquement par celui d'une colonne d'eau diſtillée, dont la hauteur ſeroit x & dont la denſité r eſt 13, 6 fois plus petite que D, on voit que l'équilibre ne peut avoir lieu entre ces deux colonnes, l'une d'eau, & l'autre de mercure, que lorſqu'on a l'équation $h\text{D}=xr$, ou $x=(13, 6)\,h$. C'eſt pourquoi la hauteur h étant de 28 pouces, ſuivant des obſervations faites au bord de la mer, dans un tems calme, & par une température moyenne, on trouve que $x=$ 32 pieds environ. La preſſion de l'air peut donc faire équilibre au poids d'une colonne d'eau diſtillée qui auroit 32 pieds de hauteur lorſque le mercure eſt de 28 pouces d'élévation dans le barometre; & elle eſt capable d'élever de l'eau à 32 pieds de hauteur dans un tuyau qui d'ailleurs n'offriroit aucun obſtacle à ce mouvement d'aſcenſion.

Cette derniere propriété eſt la baſe des effets des *pompes aſpirantes*, car celles-ci ne ſervent qu'à ſupprimer la preſſion que l'air peut exercer verticalement au-deſſus d'une colonne d'eau, afin que les collatérales qui ne ceſſent d'éprouver le poids de l'atmoſphere & qui communiquent avec elle, l'obligent de s'alonger & de s'élever à une hauteur de 32 pieds au-deſſus du niveau général.

Voici le mécaniſme, le jeu, & les effets de ces inſtrumens ſi utiles à la marine. Dans un tuyau *qſt* (fig. 91) percé cylindriquement, on introduit un corps ſolide *abh* nommé *piſton*; qui d'une foible épaiſſeur, a la forme & le diamettre de l'intérieur du tuyau. Ce piſton mobile, eſt fait pour être élevé & abaiſſé à volonté, à l'aide

d'une verge *i* dans un eſpace *gohb* qu'on nomme *jeu de piſton*. Il eſt percé dans ſa hauteur, & il porte à l'ouverture ſupérieure une ſoupape *a*, qui ne peut s'ouvrir qu'en partie, & qui abandonnée à elle-même retombe & recouvre l'ouverture indiquée. Dans le tuyau & au-deſſous du jeu de pompe, en *fm*, on place un diaphragme fixe, au milieu duquel eſt un trou A. Celui-ci eſt recouvert par une ſoupape, qui s'ouvre dans le même ſens que celle du piſton, & ſous une pareille inclinaiſon. On la nomme *ſoupape dormante*, pour la diſtinguer, comme fixe, de la premiere qui change de place avec le piſton.

La pompe ainſi préparée doit-elle être miſe en uſage, ſon pieds *ſl* eſt plongé dans l'eau qu'on veut élever & dont le niveau eſt *rp*. Alors l'eſpace intérieur *brph* du tuyau, ne contient plus que de l'air ordinaire qui ne communique plus avec l'air extérieur. Si la baſe du piſton s'éleve enſuite de ſa poſition la plus baſſe *bh*, juſqu'à ſa plus grande hauteur, c'eſt-à-dire en *go*, l'air renfermé d'abord dans *brph* s'étend dans l'eſpace *grpo*, & en ſe dilatant ainſi, ſon élaſticité diminue en raiſon de l'accroiſſement de ſon volume. Il n'exerce plus ſur l'eau intérieure *rp*, la preſſion que les eaux collatérales éprouvent au dehors, & celles-ci forcent alors la colonne intérieure de s'élever juſqu'à certain point *n* au-deſſus du niveau *rp*. Le piſton s'abaiſſant enſuite de *o* en *h*, la ſoupape A ſe ferme, l'air répandu dans *goſm* eſt comprimé, & il s'échappe par la ſoupape *a*, ſi cette compreſſion rend ſon élaſticité plus grande que celle de l'air extérieur, tandis que l'air renfermé dans *fmn*, reſte dans l'état de dilatation où il avoit été réduit par l'aſcenſion du piſton. Une deuxieme élévation de celui-ci produit une nouvelle dilatation de l'air renfermé, ſoit dans *bhfm*, ſoit dans *fmn*, & une plus grande aſcenſion de l'eau intérieure. C'eſt enfin après pluſieurs coups de piſton, ſi la pompe eſt bien faite, que l'eau arrive, d'abord à la ſoupape dormante A, enſuite au-deſſus de celle du piſton qui en s'élevant en *o*, la force de ſe dégorger par l'ouverture latérale *q*. Telles ſont à-peu-près les pompes aſpirantes qui ſont employées dans les vaiſſeaux; & on donne les

noms de *heuse* & de *chopine* aux parties désignées par les noms de piston & de soupape dormante.

269. Cherchons à quelles conditions une pompe doit produire tout l'effet qu'on est en droit d'en attendre. Désignons par q la distance op, par i la longueur oh du jeu de piston, par u l'intervalle hm, & par a la hauteur mp.

Avant le 1er. coup de piston, l'air occupe l'espace $brph$, & agit sur rp comme le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur. Le piston étant élevé en o, cet air qui occupe un plus grand espace $grpo$, cylindrique comme le premier & de même base, n'a plus qu'un ressort proportionnel à P, & qu'on trouve par cette proportion $P:32::a+u:a+u+i$. La quantité P est donc plus foible que 32 pieds, & la pression de l'air extérieur est plus considérable. L'eau intérieure doit donc s'élever dans le tuyau $frpm$. Supposons que cette eau se soit élevée jusqu'en n, en désignant mn par y. Soit r la hauteur d'une colonne d'eau dont le poids équivaut au ressort de l'air dilaté qui reste renfermé dans l'espace fmn après l'abaissement de la soupape A. L'air qui se trouve dans $bhmf$ entre le piston & fm, peut avoir le ressort de l'air extérieur & nous le lui supposerons. Dans cet état des choses, le piston est relevé jusqu'en o, l'air de $bhmf$ s'étend en $gfmo$, & ne conserve qu'une force élastique proportionnelle à p. Celle-ci est telle qu'on a l'équation $p(i+u) = 32.u$. Il peut arriver alors que p soit une quantité plus petite, ou plus grande que r, ou qui lui soit égale. Dans les deux derniers cas, la soupape A, ne peut être soulevée par l'air de fmn & l'eau ne peut pas s'élever dans la pompe. Un tel inconvénient doit être prévu dans la construction des pompes, ainsi examinons ce qu'il faut faire pour l'éviter. On sait que $r+a-y = 32$ (en représentant par $(a-y)$ la hauteur de la colonne d'eau nrp qu'on a supposé être déjà élevée dans la pompe). Ainsi p étant égale à r, on doit, en combinant les deux équations précédentes, parvenir à celle-ci $(32-a+y)(i+u) = 32.u$, ou $y(i+u) = (i+u)a - 32i$. Une telle équation ne doit donc jamais avoir lieu pour une pompe où l'eau ne s'arrête pas dans son ascension ; ainsi y étant une quantité positive, où l'eau déjà élevée n'étant pas encore arrivée

à la ſoupape A, il faut que la quantité $(i+u)\,a$ ſoit toujours plus petite que $32.\,i$; & on l'obtient aiſément en ne laiſſant aucun intervalle entre la ſoupape dormante & le piſton au plus bas de ſa courſe. Car alors $y = a - 32$; d'où on tire cette 2e. regle que a ou mp ne doit jamais valoir 32.

Suppoſons actuellement que l'eau, par le jeu du piſton, dans une pompe bien organiſée ſoit au-deſſus de la ſoupape dormante & à une diſtance z du point o; que la baſe du piſton ſoit en bh; & que l'air renfermé entre cette baſe & l'eau élevée, ait le même reſſort que l'air extérieur. Alors le piſton s'éleve-t-il en o, l'air intérieur ſe dilate, & ſon reſſort eſt égal au poids d'une colonne d'eau qui auroit R de hauteur. On trouve R par cette équation $\text{R}z = 32(z - i)$, & elle doit être telle qu'étant ajoutée à la hauteur $(a+i+u-z)$ de la colonne d'eau déjà élevée, la ſomme ſoit moindre que 32 pieds, afin que l'air extérieur tende de nouveau, après ce coup de piſton, à produire l'augmentation de la colonne d'eau de la pompe.

Nommons m cette différence, & on aura $\text{R}+a+i+u-z = 32 - m$. Cette équation combinée avec la précédente, conduit à celle-ci $mz = 32\,i - qz + z^2$ (en déſignant $(a+i+u)$ par q). On voit donc que $m = o$ lorſque $z^2 = qz - 32\,i$, ou lorſque $z = \frac{1}{2}q + (\frac{1}{4}q^2 - 32.i)^{\frac{1}{2}}$. L'eau doit donc s'arrêter dans une pompe, dans deux cas; & il faut empêcher qu'aucun ne puiſſe avoir lieu. On y parvient en faiſant enſorte que la quantité $\frac{1}{4}\,q^2$ ſoit plus petite que $32.\,i$, parce qu'alors la valeur de z devient imaginaire, & démontre que la nullité de m n'eſt jamais poſſible, ou que l'eau doit s'élever à chaque coup de piſton pour aller ſe dégorger par l'orifice q. On peut donc établir en regles générales, les indications de ces équations, & dire que l'effet d'une pompe eſt aſſurée, lorſque le piſton au plus bas de ſa courſe, n'eſt pas éloigné de la ſoupape dormante; lorſque celle-ci n'eſt pas à 32 pieds de diſtance du niveau de l'eau; & lorſque le jeu du piſton répété 32 fois eſt un produit qui ſurpaſſe le quarré de la moitié de ſa plus grande élévation au-deſſus du niveau de l'eau.

270. L'effort qui eſt ſupporté par le piſton pendant le jeu continu de la pompe eſt facile à calculer. Car le poids A de l'atmoſphere, & celui de la colonne d'eau qui s'étend du piſton au dégorgeoir *q*, preſſent ce piſton de haut en bas, tandis que de bas en haut, il eſt preſſé par le poids A de l'atmoſphere diminué de celui Q de la colonne d'eau qui remplit la pompe depuis le réſervoir juſqu'à la baſe du piſton. La différence S+Q de ces preſſions & qui eſt la charge réelle du piſton eſt donc égale au poids d'une colonne d'eau qui ayant la baſe du piſton, auroit pour hauteur celle du dégorgeoir au-deſſus du réſervoir. Telle eſt la réſiſtance que doivent vaincre des hommes employés à faire jouer une pompe aſpirante, en y ajoutant d'ailleurs celle que produiſent les frottemens.

Au reſte la hauteur à laquelle l'eau peut être élevée à l'aide d'une telle pompe, varie comme la preſſion de l'atmoſphere, & le mercure dans le barometre indique ces variations. Car toutes les cauſes qui le font deſcendre telles que, le vent, les mouvemens de l'air, & ſon humidité, diminuent l'effet des pompes qui eſt toujours plus grand, lorſqu'un air plus denſe, plus calme, ou plus élaſtique produit l'aſcenſion du mercure.

271. Les principes précédens ſervent auſſi de baſe à la conſtruction des ventilateurs, ou des machines qu'on peut employer pour renouveller l'air dans la cale d'un vaiſſeau. Cet air renfermé de toute part dans un eſpace *agfr* (fig. 73. G) & qui ne communique avec l'air extérieur que par des ouvertures faites en *n* & en *z*, ne peut en ſortir que lorſqu'on augmente, ou lorſqu'on affoiblit la preſſion de l'air extérieur en *n*, ſans qu'elle change en *z*, ou lorſqu'on donne à l'air intérieur qui correſpond à *n*, un degré d'élaſticité propre à lui faire ſurmonter la preſſion de l'air extérieur qui agit également en *n* & *z*. Voici les moyens de produire ces effets. 1°. Une longue & large manche en toile, & ouverte par les deux bouts, qui deſcend ſuivant *nd*, eſt-elle ſuſpendue au-deſſus du pont, & préſente-t-elle au vent une ouverture latérale? Le courant d'air qui s'y introduit refoule ſuivant *nd* l'air de la cale qui s'échappe alors par l'écoutille *z*. Cet effet eſt parfaitement analogue à celui d'une

eau courante *cd* (263) (fig. 22. G) qui reçue & arrêtée par l'orifice *f* du tuyau recourbé *bif*, fait remonter l'eau renfermée dans ce tuyau, à une hauteur d'autant plus grande que le quarré de la vitesse de l'eau affluente est plus considérable. 2°. L'air extérieur & calme qui repose sur *n*, est-il mis en mouvement ou pompé à l'aide d'une machine quelconque, sa pression en *n* diminue nécessairement, tandis qu'en *z* l'atmosphere agit sans éprouver cette variation. L'air de la cale doit donc sortir par *n*, & être remplacé par l'air extérieur qui s'introduit en *z*. 3°. La chaleur du feu peut-elle être appliquée en *n*, pour augmenter en ce lieu seul le ressort de l'air qui s'y trouve, alors celui-ci devenu plus élastique, doit s'élever au-dessus de *n*, il doit donc être suivi par d'autres parties d'air de la cale, qui viennent en *n*, acquérir successivement, par le feu, un nouveau degré d'élasticité, & s'élever comme celles qui les ont précédé. Le remplacement de cet air est fait en même tems par l'air extérieur qui s'introduit en *z*. Cette application du feu deviendroit facile même dans un vaisseau, en faisant passer par le brasier de la cuisine, un tuyau de tôle, qui seroit coudé pour éviter les accidens, qui ne serviroit qu'au passage de l'air de la cale, & dont les extrémités seroient ouvertes l'une sous le pont & l'autre au-dessus du foyer.

272. Après avoir ainsi analysé les pressions que l'air & l'eau en repos ou en mouvement exercent sur des molécules semblables à celles qui les composent, il faut examiner l'action des mêmes fluides sur des corps qu'ils rencontrent, qui y sont plongés en tout ou en partie, & qui s'y meuvent avec diverses vitesses, ou qui reçoivent le choc de ces mêmes fluides en mouvement.

Une ligne solide *de* (fig. 21. G), ou qui n'a d'épaisseur que celle d'une molécule d'eau, est-elle plongée au-dessous du niveau *om* d'une masse d'eau; cherchons la grandeur des pressions diverses que l'eau exerce sur *de*, dans tous les sens quelconques. On sait que chaque molécule fluide agit également sur toutes les directions possibles, ainsi on peut en conclure que dans le sens *dn*, par exemple, *de*, est sollicitée par autant de forces parallelles à *dn*, qu'on peut imaginer de filets fluides qui

paralleles aussi à *dn* agissent immédiatement sur quelques parties de *de*. Le nombre de ces forces, ou celui des filets, est indiqué par la grandeur d'une section *nr*, perpendiculaire à *dn*. Car autant on pourroit ranger de molécules sur *nr*, autant il doit y avoir de filets fluides qui parallélement à *dn*, se dirigent sur *de*. D'ailleurs l'action de chacune de ces forces paralleles appliquées sur diverses parties de *de* est en raison de la distance de chacun de ces élémens au niveau de l'eau *om* (260) : & ces distances forment ensemble une progression arithmétique dont les termes extrêmes sont les distances des points *d* & *e* à *om*. Ainsi la pression totale exercée sur *de* dans le sens *dn*, étant composée de la somme de toutes les forces paralleles indiquées, on peut la trouver en prenant la somme des termes d'une progression arithmétique, dont le nombre est *nr*, & dont les termes extrêmes sont les pressions de l'eau sur les extrêmités *d* & *e* de *de*. Soient *do* & *em* les distances de *e* & *d* au niveau de l'eau, & *p* la pesanteur spécifique de l'eau, ou le poids de l'unité de volume de ce fluide, alors $p.\ do$ & $p.\ me$, expriment la pression exercée par l'eau en *d* & *e*. La pression totale cherchée dans le sens *du*, est donc égale à $\frac{1}{2}p(do+me)nr$.

En raisonnant de même sur la pression exercée par l'eau sur *de* dans le sens vertical, on trouveroit que cette pression est exprimée par $\frac{1}{2}p(do+me)on$. La pression sur *de* dans le sens horisontal, ou perpendiculairement à *qe* est donc $\frac{1}{2}p(do+me)qe$. Les pressions dans tout autre sens sur *de*, seront déterminées de la même maniere, & comme les sections *nr*, *om*, *qe*, &c., par lesquelles on multiplie la quantité $\frac{1}{2}p(do+me)$, sont les projections de *de* sur un plan auquel est perpendiculaire la direction suivant laquelle la pression est exercée; on doit conclure que la pression de l'eau sur une ligne *de*, suivant une direction désignée, est égale à la somme des deux pressions qui sont exercées sur ses points extrêmes, multipliées par la projection de *de* sur un plan auquel cette direction est perpendiculaire. Cette regle est générale & voici ses applications.

Un triangle *acd* (fig. 9. G.) ou un prisme triangulaire qui auroit l'épaisseur d'une molécule d'eau, est-il plongé verticalement

verticalement dans une maſſe d'eau dont *abd* eſt le niveau, la preſſion verticale que l'eau exerce ſur ſes deux côtés *ac* & *dc*, eſt égale au poids de ce priſme conſidéré comme fluide. Car *bc* étant la diſtance de l'extrémité commune *c*, de ces côtés au niveau *abd*, alors $\frac{1}{2}p.bc.ab$ exprime la preſſion verticale de l'eau ſur *ac*; & celle ſur *ed* eſt $\frac{1}{2}p\ bc.\ db$; de ſorte que ces preſſions réunies forment la ſomme $\frac{1}{2}p.bc.da$; c'eſt-à-dire que le volume de ce priſme étant eſtimé en pieds cubes, & ſon poids étant évalué à raiſon du poids de chaque pied cube, ce poids eſt la preſſion verticale exercée par l'eau ſur le contour de *acd*.

La preſſion ſur *ac*, dans le ſens horiſontal *qi*, eſt $\frac{1}{2}p.cb.^2$; & celle ſur *dc*, qui eſt dirigée dans un ſens contraire *ri*, eſt auſſi $\frac{1}{2}p.cb.^2$ Ces preſſions égales & oppoſées diamétralement, ſe détruiſent donc mutuellement. Ainſi toutes ces preſſions exercées ſur ce priſme pouvant ſe réduire à trois forces paralleles à trois axes perpendiculaires entr'eux, il s'enſuit qu'en ſuppoſant que deux de ces axes ſoient horiſontaux, ce priſme n'eſt ſollicité à ſe mouvoir, par l'eau qui le preſſe, que dans le ſens vertical, & de bas en haut. Il ne peut donc flotter, ou reſter en repos, étant plongé dans l'eau calme, qu'autant qu'il eſt en même-temps ſoumis à l'action directement contraire d'une force étrangere, égale à la preſſion $\frac{1}{2}p.bc.ad$, & telle que peut être le poids de la maſſe particuliere de ce priſme conſidéré comme fluide.

273. Etendons ces idées à la recherche de la preſſion de l'eau ſur la carene d'un vaiſſeau, en décompoſant cette derniere en tranches verticales, minces & placées comme les demi-couples *qmy*, *tap*, *zsx* &c. (fig. 57, G) ou telles que *apn* RQS *gm* (fig. 1. G), qui repréſente particuliérement un demi-couple dans toute ſon épaiſſeur.

Conſidérons l'élément quandrangulaire *upgz* du contour antérieur de ce couple, plongé dans l'eau qui l'environne. Menons des lignes verticales, *ub*, *pc*, *zt*, *qg*, par les ſommets des angles de cet élément & terminées par le niveau de l'eau *a*SQR. La preſſion verticale de l'eau ſur le ſeul côté *up* eſt $\frac{1}{2}p\,(ub+pc)\,bc$. Le facteur $\frac{1}{2}$ $(ub+pc)\,bc$ exprime la ſurface du trapeze *bupc*. Un pa-

reil raisonnement conduit à trouver que la pression verticale de l'eau sur chaque ligne élémentaire, telle que *up*, du quadrilatere *upgz*, est égale au produit de *p*, multiplié par la surface du trapeze correspondant, qui parallele à *bupc* peut-être regardé ainsi que celui-ci, comme un élément du volume du prisme tronqué *buzptqc*. La somme des pressions verticales exercées par l'eau sur *upgz*, est donc égale au poids d'une masse d'eau dont le volume est *bupgztqc*. Celle des pressions verticales de l'eau sur la carene du couple supposé, ou d'une tranche entiere, est donc égale au poids de cette tranche, en la considérant comme fluide. Enfin la carene d'un vaisseau éprouve donc, dans le sens vertical, & de bas en haut, des pressions dont la somme est égale au poids du volume d'eau qui est déplacé par cette carene.

Il est superflu de répéter ici que les pressions exercées horisontalement par l'eau environnante, sur la carene d'un vaisseau, se détruisent mutuellement, parce que la démonstration en est la même que celle qui a été donnée précédemment.

Le volume de la carene d'un vaisseau étant donc calculé comme on l'a enseigné (145); & le résultat étant multiplié, par 72 liv. (qui est le poids *p* d'un pied cube d'eau de mer, ou par 70 liv. qui est celui de l'eau douce), on obtient la valeur en livres de la force avec laquelle l'eau presse verticalement de bas en haut, la carene d'un vaisseau. Un corps submergé perd donc de son poids, & la partie qu'il perd est toujours égale au poids du fluide calme qu'il déplace. Un corps peut donc flotter sur l'eau si son poids est égal à celui d'un volume d'eau, qu'une de ses parties peut déplacer. Mais il ne peut flotter, en repos, & garder une certaine situation, que lorsque la direction de son poids & celle de la résultante des pressions de l'eau sur sa carene, sont diamétralement opposées. On sait que le poids d'un corps doit être regardé comme une force verticale qui est appliquée à son centre de gravité (239); d'ailleurs les pressions verticales que l'eau exerce sur le contour de la partie submergée, forment une somme déjà indiquée; & leur résultante est une force verticale dont la direction passe

néceſſairement par le centre de grandeur de la carene. Car la preſſion verticale de l'eau ſur chaque élément *upgz* de la carene, étant repréſentée par le poids d'une maſſe d'eau dont le volume eſt la partie correſpondante *bupgztqc* de la carene; le moment de chacune de ces preſſions, à l'égard d'un plan vertical quelconque, eſt donc égal à celui de chaque partie correſpondante du volume de la carene. Ainſi la réſultante de toutes ces preſſions, & le centre de grandeur de la carene, doivent être également éloignés de tous les plans verticaux auxquels on peut les comparer. C'eſt pourquoi en ſuppoſant que tous ces plans ſoient dirigés par le centre de grandeur, la réſultante des preſſions verticales doit auſſi ſe trouver dans chacun de ces plans, ou être dirigée verticalement par ce centre qui leur eſt commun. Un corps ne peut donc flotter & en repos, ſur une eau calme, qu'a deux conditions. La 1ere. eſt que le centre de gravité du corps, & le centre du volume de ſa carene ſoient placés ſur une même ligne verticale ; & la 2eme. eſt que le poids du corps ſoit égal à celui du volume d'eau dont il occupe la place. Ainſi lorſqu'on s'eſt propoſé de conſtruire un vaiſſeau de 74, qui tout armé, doit peſer 3000' tonneaux, ou 6000000 liv. (à raiſon de 2000 liv. le tonneau), ſa carene a dû être conformée de maniere, que ſon volume fut de 83333 pieds cubes environ, & que dans la ſituation particuliere que ce vaiſſeau doit prendre & garder ſur l'eau, ſon centre de grandeur fut placé ſur la verticale qui paſſe par le centre de gravité du vaiſſeau armé.

Un tel corps flotte-t-il dans une eau courante, ou ſur une mer agitée ; alors il faut pour déterminer la réſultante des preſſions verticales ſe rappeler ce qui a déja été dit (262) des courans & des lames. Il faut donc analyſer la preſſionv erticale, qui eſt exercée ſur chaque élément de ſa carene par les molécules qui agiſſent ſur lui ; & cette preſſion eſt, comme on ſait, en raiſon de la diſtance de cet élément au niveau de l'eau, diminuée de la hauteur à laquelle ſeroit due la viteſſe dont ces molécules ſe trouveroient animées, au moment de leur contact avec le corps.

274. Si les principes précédens peuvent servir à juger si un corps doit flotter en repos dans une situation déterminée, ils sont propres aussi à faire connoître les regles générales qu'on doit suivre pour donner à un vaisseau une forme telle, non-seulement qu'il flotte en repos lorsque son plan diamétral est vertical, mais aussi qu'il résiste fortement à toute cause étrangere qui tendroit à l'éloigner de cette position droite. (Ce plan diamétral est celui qui passe par l'étrave, la quille, & l'étambot; c'est *aqsnod* fig. 29. G.). Dans un vaisseau cette résistance est nommée *stabilité*, & elle est une de ses qualités essentielles. Elle dépend du moment de la résultante des pressions verticales de l'eau, à l'égard d'un axe horizontal qui passe par le centre de gravité de la carene, lorsque le vaisseau est incliné, comme le sont les tranches représentées (fig. 22, 23 & 33. G.) Plus ce moment est considérable, plus le vaisseau incliné est sollicité fortement à tourner sur lui-même pour reprendre une situation droite (fig. 32. G.) qu'il doit toujours garder; & plus, par conséquent il doit présenter de résistance aux puissances qui tendent à l'incliner. Le développement de ces momens & leur résultats, qui font connoître la stabilité d'un vaisseau à l'égard d'un axe horizontal qui passe par son centre de gravité, parallélement soit à sa longueur soit à sa largeur, ne seront pas établis ici dans leurs détails, & ils appartiennent spécialement à un traité de l'art de la marine, où doivent être discutés les fondemens de toutes les qualités qui sont nécessaires aux bâtimens de mer.

275. Après les réflexions précédentes, sur les pressions qui sont exercées & éprouvées dans tous les sens, par chaque molécule intégrante d'une masse fluide, on peut déterminer quelle doit être l'impulsion d'un fluide sur la surface d'un corps fixe, lorsque ce fluide animé d'une vitesse due à la hauteur x vient rencontrer cette surface. Supposons, que ce corps soit un parellélipipede rectangle BCEDIHGF (fig. 44), qu'il flotte en repos, & que ses faces antérieure & postérieure, BHDI, CGFE, soient non-seulement verticales, mais aussi perpendiculaires à la direction du courant. L'eau

environnante n'exerce alors que ſur le fond HGFI, une preſſion verticale qui ſeroit, p.HGFI $(h—x)$ (en nommant h la diſtance du fond au niveau de l'eau BCED.) Si on compare cette preſſion à celle que ce priſme éprouveroit dans la même eau calme, on conclura aiſément que celle-ci exprimée par p.HGFI.h eſt ſupérieure à la premiere, & que par conſéquent le tirant d'eau d'un tel corps, ainſi que d'un vaiſſeau flottant dans une eau courante, doit être plus grand que lorſque ce corps eſt environné d'une eau calme & tranquille.

Quant aux preſſions horizontales exercées par ce même courant, ſur les faces verticales & latérales, du priſme ſuppoſé, elles ne ſe détruiſent pas dans tous les ſens, comme dans une eau calme. Le courant étant parallele aux faces latérales & verticales, BHGC & DIFE, il y a équilibre entre les preſſions exercées par le courant perpendiculairement à ces faces. Mais le courant eſt dirigé ſur la face HBDI; c'eſt pourquoi, l'eau, venant frapper chaque ligne $oſ$ (qui, parallele au niveau de l'eau dont elle eſt éloignée d'une diſtance h, peut être regardée comme un élément de la face choquée) eſt alors arrêtée dans ſon mouvement par le corps qu'on ſuppoſe fixe. Elle perd toute ſa viteſſe dans le choc, & le courant amenant ſans ceſſe de nouvelles mollécules, exerce ſur $oſ$ la même preſſion qu'il feroit ſentir à la baſe $ſ$ (fig. 2. G.) de la colonne d'eau renfermée dans le tube recourbé $biſ$ de *Pitot* (263). Cette preſſion doit donc être exprimée par $p.\ oſ\ (h+x)$.

Le fluide en contact avec la face arriere du corps, peut prendre au contraire, & ſans obſtacle, toute la viteſſe du courant. Ainſi il ne preſſe l'élément, (qui ſur cette face correſpond à $oſ$ de la face antérieure) qu'avec une force $p.\ oſ\ (h—x)$. Les preſſions du courant, ſur les élémens correſpondans $oſ$ des faces avant & arriere du priſme, différent donc de la quantité $2p.\ oſ.\ x$; & l'impulſion horizontale du courant, ſur le corps ſuppoſé, eſt donc $2p.\ ſx$ (en nommant S la ſurface égale, qui ſur les faces arriere & avant du corps, eſt plongée dans le fluide.) Le corps eſt donc ſollicité au mouvement, dans le ſens BC, par une force qui doit varier comme le quarré x de la viteſſe du courant.

Si le corps étoit plongé entiérement ſous l'eau, & à une profondeur a au-deſſous du niveau de l'eau; la preſſion du courant ſur $o\int$ élément de ſa face avant, ſeroit exprimée par $p.\, o\int(h+a+x)$, & ſur $o\int$ de ſa face arriere par $p.\, o\int(h+a-x.)$ La différence de ces preſſions $2p.\, o\int.x$ étant multipliée par la hauteur BH du priſme, devient $2p.\,\int x$; & on voit que l'impulſion du courant ſur ce corps eſt la même à la profondeur a, comme au niveau de l'eau, ſi la viteſſe de ſes eaux ne varie pas à raiſon des profondeurs.

Si la direction d'une eau courante, dont la viteſſe eſt due à la hauteur x, eſt inclinée ſous un angle i à une ſurface plane telle que *eoin* (fig. 7. G.), cette ſurface éprouveroit une preſſion moins grande que ſi le courant lui étoit perpendiculaire. En effet cherchons la preſſion du courant, & ſur la face antérieure, & ſur la face poſtérieure de ce plan *emio*. Repréſentons un de ſes élémens ab (qui horizontal eſt à une diſtance h du niveau de l'eau) par la ligne am (fig. 3. G.). La direction du courant & ſa viteſſe ſont indiquées par im; ainſi en menant ir perpendiculaire à am, on doit reconnoître que les molécules fluides, à la rencontre de am, ne peuvent conſerver que la viteſſe repréſentée par mr qui eſt une compoſante de im; & qu'elles doivent perdre la viteſſe ir qui eſt due à la hauteur $x\,\text{ſin}.i^2$. La preſſion exercée par le courant ſur am dans le ſens ir eſt donc exprimée par $p.\,am\,(h+x\,\text{ſin}.i^2-x\,\text{coſ}.i^2.)$ puiſque l'eau agit perpendiculairement à l'avant en raiſon d'une force proportionnelle à $x\,\text{ſin}.i^2$, & qu'elle fuit l'arriere avec une viteſſe due à la hauteur $x\,\text{coſ}.i^2$. La preſſion dans le ſens im eſt $p.\,mo\,(h+x\,\text{ſin}.i^2-x\,\text{coſ}.i^2)$; & dans le ſens perpendiculaire à im, elle eſt $p.\,ao\,(h+x\,\text{ſin}.i^2-x\,\text{coſ}.i^2)$; en ſuppoſant que mo & ao ſoient les projections de am ſur les plans auxquels les directions déſignées ſont perpendiculaires.

Ainſi le courant dirigé ſur la face antérieure de *em io* (fig. 7. G.) exerce ſur chacun de ſes élémens horizontaux ab, une preſſion $p.\,ab\,(h+x\,\text{ſin}.i^2-x\,\text{coſ}.i^2)$ dans un ſens perpendiculaire au plan.

Le courant exerce auſſi une preſſion ſur chaque élément correſpondant de la face poſtérieure de ce plan;

& pour en juger il faut remarquer que le fluide placé derriere ce plan, peut sans oſtacle prendre la viteſſe commune des eaux courantes. Sa preſſion ſur la face arriere de *ab* eſt donc $p.ab\ (h-x)$; & perpendiculaire à ce plan, elle eſt oppoſée à la preſſion exercée ſur la face avant de *ab*. En raiſonnant ainſi ſur chaque élément de la ſurface *emio* expoſée au choc du courant, la puiſſance réelle qui ſollicite celle-ci à ſe mouvoir perpendiculairement à ſon plan eſt la différence des preſſions calculées. Elle eſt donc exprimée par $2p.S.x\,ſin.i^2$, (en ſuppoſant que S ſoit la ſurface plane expoſée au choc du fluide, & que celui-ci ait une même viteſſe à toutes les profondeurs).

276. Ces principes & ces réſultats doivent être employés ſans reſtriction, dans la recherche de l'impulſion du vent ſur une ſurface plane. Ainſi imaginons que les voiles d'un vaiſſeau ne préſentent au choc du vent qu'une ſurface de ce genre, on en conclura que $2d.S.x\,ſin.i^2$ doit être l'expreſſion de l'action du vent perpendiculairement à une voile, lorſque celle-ci eſt frappée ſous un angle *i* d'incidence, dans toute ſon étendue S, par un courant d'air qui a une viteſſe due à la hauteur *x*, & une peſanteur ſpécifique *d*. L'effet du vent ſur cette voile, dans une direction oblique à celle-ci, ſeroit exprimé par la même formule, en y ſubſtituant au lieu de S la projection de la voile frappée ſur un plan auquel la direction déſignée ſeroit perpendiculaire.

Cette formule fait voir que l'impulſion du vent eſt en raiſon du quarré *x* de ſa viteſſe, & de l'étendue *s* de la ſurface frappée. Cette action dépend auſſi du quarré du ſinus de l'incidence *i*; c'eſt pourquoi le vent dont la direction peut être regardée comme horizontale, exerce ſur une voile l'action la plus grande, lorſque ſon plan eſt vertical (toutes choſes égales d'ailleurs) ainſi que l'expérience le démontre. Les mêmes formules permettent auſſi de juger les effets d'une voile, ſoit pour pouſſer un vaiſſeau dans le ſens de ſa longueur, ou latéralement pour le faire dériver, de quelque maniere que cette voile ſoit orientée. Tous ces développemens trouveront & occuperont une place dans le traité de l'art de la marine.

C'eſt par la même raiſon que nous n'ajouterons pas ici une application immédiate, de ces principes aux effets que le gouvernail doit produire ſur un vaiſſeau, lorſque cette machine eſt expoſée au choc d'une eau courante.

277. Après avoir examimé l'état d'un corps, qui ſans pouvoir changer de place flotte ſur une eau calme ou courante ; cherchons la réſiſtance que l'eau calme peut oppoſer à un corps en mouvement. Je vais ſur une telle matiere préſenter des principes nouveaux qui par l'heureuſe explication qu'ils fourniſſent des principaux phénomenes de la réſiſtancé de l'eau, ont été deux fois couronnés par l'académie des ſciences de Paris. L'état de l'eau, autour d'un corps en mouvement, doit ſur-tout être développé pour en conclure l'expreſſion vraie & complete de la réſiſtance de l'eau, c'eſt pourquoi cette recherche doit être précédée de quelques réflexions générales.

Un corps flottant eſt-il ſollicité au mouvement par une puiſſance motrice, l'eau forme un obſtacle qui retarde ſa marche progreſſive dans l'eſpace. Mais comment alors le corps agit-il ſur ce fluide ; & comment le fluide lui-même ſe compoſe-t-il autour du corps qui trouble ſon repos, & qu il ne ceſſe d'envelopper dans ſa courſe. De telles queſtions méritent d'être réſolues, afin que ce ſujet ſoit éclairé autant qu'il doit l'être.

278. Si un plan *emio* (fig. 7. G.) plongé verticalement dans l'eau, eſt pouſſé dans le ſens *rp*, perpendiculairement à ſa ſurface ; il ne peut s'avancer ſur cette ligne qu'en refoulant devant lui le fluide qui eſt ſur ſon paſſage, & en abandonnant après lui l'eſpace quil occupoit. Le fluide antérieur eſt donc ſollicité par ce plan à prendre la viteſſe que la force motrice tend à lui imprimer ; c'eſt-à-dire que cette viteſſe étant due à la hauteur x, chaque molécule refoulée par le plan eſt dans le même état que ſi elle étoit preſſée par une colonne d'eau dont la hauteur ſeroit $h+x$ (en nommant h ſa diſtance au niveau de l'eau). Car avant le mouvement de *emio*, chaque molécule tendoit à ſe mouvoir avec une viteſſe due à la profondeur h ; & comme ce plan, pour s'avancer dans l'eſpace, tend à prendre & à imprimer au fluide qui le

précede une viteſſe due à la hauteur x, il s'enſuit que chaque molécule tend a ſe mouvoir avec une viteſſe due à la hauteur $h+x$. Ainſi, par ſa réaction ſur le plan qui s'avance dans l'eſpace, elle le preſſe avec tout le poids d'une colonne d'eau de la hauteur $h+x$.

279. L'expérience vient à l'appui de ce raiſonnement. Un tube recourbé (fig. 2. G) garni de ſon flotteur *pqg* (263) eſt-il plongé verticalement dans l'eau calme, & eſt-il mu parallelement à lui-même avec une viteſſe horizontale qui lui fait parcourir 100P en 21″; on obſerve que l'état du flotteur, ou la hauteur de la colonne fluide intérieure, varie ſuivant la poſition reſpective de l'orifice *f*, & du fluide refoulé. Le tube s'avance-t-il de *d* vers *c*, & l'orifice eſt-il ouvert du côté de *c*, le flotteur s'éleve de 4pou 7lig au-deſſus du point où il s'arrête dans l'état de repos. Cet orifice eſt-il placé dans le ſens oppoſé, ou eſt-il ouvert du côté de *d*, alors dans le tranſport du tube de *d* en *c*, le flotteur s'abaiſſe de 4pou 7lig au-deſſous de l'état de repos. Son abaiſſement eſt encore le même, lorſque la direction de la branche *if* du tube, eſt perpendiculaire à celle *cd* de ſon mouvement progreſſif; & tel eſt auſſi l'abaiſſement d'un flotteur dans un tube droit & vertical *ao*, lorſqu'il eſt tranſporté ſuivant *dc*, parallélement à lui-même. Cette quantité 4pou 7lig eſt à-peu-près la hauteur x à laquelle eſt due la viteſſe obſervée de 100 pieds en 21″. Ainſi un de ces réſultats démontre évidemment que la colonne fluide renfermée dans ce tube en mouvement, reçoit ſur ſa baſe plongée à une profondeur h une impulſion de l'eau refoulée, qui eſt égale au poids d'une colonne d'eau dont la hauteur ſeroit $h+x$.

Telle eſt donc la réaction de l'eau ſur un plan qui la refoule dans une direction perpendiculaire à ſa ſurface. L'effet de cette réaction ſeroit d'empêcher le mouvement du plan, ſi le fluide antérieur ne pouvoit ſe retirer d'aucun côté, pour laiſſer au plan un paſſage libre, puiſque l'eau eſt incompreſſible. Ainſi le plan ne peut réellement obéir à la force qui le pouſſe, qu'en raiſon de la retraite plus ou moins facile du fluide dont il tend à occuper la place. La réſiſtance que l'eau oppoſe au mouvement, dépend donc, & de la difficulté de cette retraite, & de la preſ-

ſion que l'eau exerce ſur ce plan dans un ſens contraire au mouvement imaginé. Examinons d'abord comment le fluide antérieur doit faire ſa retraite, en ſuppoſant que les dimenſions du plan ſoient très-inférieures à celles de la maſſe fluide où il ſe meut.

280 Dès que le plan ſuppoſé tend à pouſſer devant lui le fluide qui eſt en contact avec ſa face antérieure; celui-ci tranſmet dans tous les ſens la preſſion qu'il éprouve. Il dirige donc ſa retraite ſur toute ſorte de directions, tant horizontales que verticales. Cette retraite qui d'abord a lieu dans le ſens vertical ou de bas en haut, ſe fait ſur-tout du côté qui lui offre le plus petit obſtacle; & le vuide que le plan laiſſe après lui dans ſon mouvement détermine le ſens de la plus grande partie de cette retraite. Car le fluide qui eſt derriere le plan tend à s'avancer horizontalement comme lui, pour venir remplir le vuide indiqué. La retraite des molécules antérieures, doit donc ſe faire en très-grande partie ſuivant des directions horizontales & d'ailleurs avec plus de facilité que dans le ſens vertical. C'eſt donc dans ce premier ſens que la preſſion du plan ſe communiquant de proche en proche à toutes les molécules antérieures, dont pluſieurs s'élevent au-deſſus du niveau des eaux environnantes, produit par la ſomme de leurs retraites partielles, un paſſage libre au plan qui eſt ſollicité à s'avancer dans l'eſpace.

Tel eſt ſans doute l'état naturel de l'eau autour de la partie antérieure d'un corps en mouvement, mais avec des circonſtances qui dépendent de la forme du corps & de ſa ſituation à l'égard de l'eau environnante. Car on en trouve une preuve ſenſible dans l'agitation de l'eau autour d'un vaiſſeau au moment où celui-ci eſt lancé à la mer. Dans ce dernier cas les molécules dont il vient occuper la place, forment devant lui une intumeſcence conſidérable, & s'élevent au-deſſus du niveau général, à une hauteur bien plus grande, que lorſqu'un pareil vaiſſeau, animé d'une même viteſſe, s'avance dans l'eau où il flotte & ſans ceſſer d'en être enveloppé pendant tout le temps de ſon mouvement. Le vaiſſeau qui deſcend du chantier, & qui n'eſt pas encore entiérement plongé dans

l'eau, ne peut laisser aucun vuide après lui pendant sa descente, c'est pourquoi, la retraite du fluide antérieur n'est ni facilitée, ni déterminée vers l'arriere du corps, & l'eau est forcée de s'élever extraordinairement au-dessus de son niveau primitif pour former devant le corps un vuide qu'il puisse occuper.

D'autres expériences faites par Bossut prouvent aussi combien la difficulté de la retraite du fluide qui précede un corps en mouvement, a une grande influence sur la résistance qu'il doit vaincre & que l'eau lui oppose. Car il a observé que si son mouvement a lieu dans un canal étroit, la résistance éprouvée est plus grande que dans un fluide dont l'étendue est indéfinie en tout sens, & que cet accroissement peut même aller très loin, suivant la différence qui regne entre les dimensions transversales & homologues du corps & du canal.

281. Après avoir ainsi établi que l'eau refoulée par la face antérieure d'un plan en mouvement, se retire suivant des directions horizontales, en très-grande partie; & que la facilité plus ou moins grande de cette retraite fait varier l'intensité de la résistance de l'eau; examinons comment s'exécute cette même retraite qui paroît devoir être d'autant plus prompte qu'elle se fait sur un plus grand nombre de directions en même temps.

Considérons un plan *so* (fig. 6. G) qui, vertical, s'avance horizontalement sur une ligne *men* perpendiculaire à sa surface, dans un canal *sbro* dont il touche les parois par ses côtés, & qui est ouvert par les deux bouts. Alors toutes les molécules antérieures ne font place à ce plan qu'en fuyant parallélement à la direction du canal. Mais supposons que ce plan situé en *br*, se meuve suivant la ligne *cn* qui lui est perpendiculaire, & dans un fluide dont l'étendue est indéfinie. Chaque molécule alors, telle que *c*, en contact avec le plan, peut être regardée comme le centre d'autant de directions horizontales qu'on peut mener de rayons aux divers points d'une demi-circonférence *btr*, décrite du point *c* comme centre. Elle exerce dans toutes ces directions, sur le fluide environnant, la pression que le plan lui fait éprouver. Ainsi on voit qu'en ayant

égard à certaines de ces directions, les molécules antérieures qui sont placées dans l'angle *ncr* tendent à se porter dans l'espace angulaire *ncb*, tandis que celles qui sont dans ce dernier espace tendent avec une égale force à se répandre dans *ncr*. Les mouvemens imprimés dans ce fluide, & dirigés de gauche à droite, sont donc détruits par ceux qui le sollicitent de droite à gauche. C'est pourquoi les molécules placées devant ce plan ne pouvant se retirer effectivement que sur des directions où elles ne se gênent pas mutuellement, doivent (comme l'expérience le démontre) se partager en nombre égal de part & d'autre de ce plan qui se meut perpendiculairement à sa surface. Alors celles de la gauche de *c*, pour n'être pas gênées par celles de la droite, doivent fuir sur toutes les directions qu'on peut imaginer, entre celles qui sont paralleles, l'une au mouvement *cn* du plan, & l'autre à la surface *br* de ce même plan. On en diroit de même des molécules qui correspondent à la partie droite de ce plan; & par conséquent le nombre des directions sur lesquelles le fluide antérieur fait sa retraite est déterminé par la grandeur de l'angle *ncr* du plan avec la route qu'il suit. Cet angle est ici de 90°.

282. Si le plan supposé AB (fig. 18. G) dirigeoit son mouvement horizontal suivant une ligne BC inclinée sous un angle *i* à sa surface, & avec une vitesse due à la hauteur x; alors chaque molécule antérieure *o* ne recevroit du plan qu'une impulsion qui tendroit à lui faire prendre une vitesse *oi*, perpendiculaire à AB, & due à une hauteur $x\, \sin. i^2$. Cette pression transmise à tout le fluide antérieur, le forceroit à faire sa retraite; & comme le fluide renfermé dans l'espace angulaire *no*A, ne peut se porter dans *no*B où d'autre fluide tend avec une égale force à occuper *no*A, tout le fluide antérieur, comme pressé par la molécule *o*, ne peut se retirer que sur les lignes qu'on peut mener du point *o* dans l'ouverture de l'angle *no*A qui est le supplément de *i*. En raisonnant ainsi sur l'effet de la pression exercée sur chaque molécule qui est en contact avec la face antérieure du plan, on doit en conclure que le fluide qui précede un plan dont le mouvement est oblique à sa

ſurface, fait ſa retraite ſur un nombre de directions déterminé par la grandeur du ſupplément de l'angle d'incidence, c'eſt-à-dire par $180^{\circ}-i$. Nous ne parlerons pas de l'aſcenſion verticale du fluide antérieur au-deſſus du niveau général. Elle eſt foible lorſque la retraite latérale eſt facile, ou lorſque le fluide a une étendue indéfinie; & elle n'eſt conſidérable, qu'au devant des corps qui ſe meuvent dans des canaux étroits.

283. Nous venons d'indiquer ſous quel rapport varie la facilité de la retraite du fluide qui eſt refoulé par un plan en mouvement[1], & par conſéquent ſous quel rapport partiel, la réſiſtance de l'eau augmente ou diminue, puiſque celle-ci eſt en partie en raiſon inverſe de cette facilité de retraite. Mais cette réſiſtance eſt auſſi en raiſon directe de la preſſion que l'eau exerce ſur ce plan dans un ſens directement oppoſé au mouvement; & ce dernier élément de la réſiſtance eſt celui dont il nous reſte à déterminer l'expreſſion générale. Déja nous avons parlé de la réaction du fluide antérieur ſur le plan qui le refoule perpendiculairement. Nous avons vu que chaque ligne horizontale, telle que ab (fig. 7. G) tracée ſur ſa ſurface, qui eſt à une profondeur h au-deſſous du niveau eo, éprouve une preſſion $p.ab.(h+x)$, qui eſt directement oppoſée au plan, lorſque celui-ci s'avance perpendiculairement à lui-même ſuivant vp, & avec une viteſſe due à la hauteur x. Mais cette preſſion exercée par l'eau environnante ſur la face antérieure, n'eſt pas la ſeule qui ſoit éprouvée par ce plan; & le fluide en contact avec la face poſtérieure, agit auſſi ſur lui. Cette derniere preſſion eſt égale à $p.ab.h$, dans l'état de repos; mais elle lui eſt inférieure dans l'état de mouvement. Car auſſi-tôt que le plan s'avance ſur rp, les molécules qui étoient en contact avec ſa face arriere, accourent pour remplir le vuide qu'il laiſſe après lui. Parmi elles, il en eſt qui, par leur profondeur, tendent à ſe mouvoir avec une viteſſe plus grande que celle du plan qui les fuit, & celles-ci ne ceſſent par conſéquent d'accompagner ce plan dans ſa marche. Il en eſt d'autres qui placées à une profondeur plus petite que x, ne peuvent ſuivre le plan. Elles ſont forcées de l'abandonner

& de laiſſer ſe former derriere lui un vuide, qui a une profondeur x & qui n'eſt enſuite rempli qu'avec le temps, ſoit par la chûte des molécules collatérales, ſoit par l'aſcenſion de celles qui ſont verticalement inférieures à ce même vuide. Les collatérales affluent parce qu'elles ne ſont plus ſoutenues de ce côté, & les inférieures s'élevent pour concourir à combler le vuide momentané, parce que n'étant plus preſſées de haut en bas comme elles continuent à l'être dans tout autre ſens, elles doivent ſe porter de bas en haut vers le niveau de l'eau. Ces molécules inférieures tendent donc à prendre, non-ſeulement une viteſſe horizontale égale à celle du plan, ſi leur profondeur eſt convenable; mais auſſi une viteſſe aſcenſionnelle qui comme celle du plan eſt due à une hauteur x, ou à la profondeur du vuide momentané. Elles prennent donc réellement cette viteſſe dirigée obliquement à l'horizon & qui eſt due à la hauteur $2x$. La preſſion exercée par ce fluide ſur un élément ſuperficiel ab, de la face poſtérieure de *emio*; & qui dans l'état de repos eſt $p.ab.h$, n'eſt plus alors exprimée que par $p.ab.(h-2x)$ (262) parce que telle eſt la preſſion des eaux courantes; & cette force eſt dirigée dans le ſens rp du mouvement du plan, ou elle eſt oppoſée directement à la preſſion exercée ſur l'élément correſpondant ab de la face antérieure du même plan. Elle détruit en partie celle-ci, & l'élément ab ne ſupporte réellement, dans un ſens contraire au mouvement, qu'une force qui eſt égale à la différence de ces preſſions. Celle du fluide antérieur ſur ab eſt $p.ab\,(h+x)$. Et ſa différence à celle exercée ſur la face arriere de ab, eſt $3p.\,ab.x$. On peut donc en conclure que ſi on nomme s la ſurface ſubmergée du plan ſuppoſé, la preſſion qu'il éprouve dans ſon mouvement eſt $3p.sx$, parce que la ſurface s n'eſt compoſée que de petites lignes ſuperficielles, telles que ab & ſes paralleles.

284. La réſiſtance que l'eau oppoſe à un tel plan dans ſon mouvement perpendiculaire à ſa ſurface, étant, comme on l'a dit, en raiſon directe de la preſſion ſoutenue par ce plan, & en raiſon inverſe de la facilité de la retraite de l'eau refoulée, peut donc être exprimée

par $3bp\,sx$ (en ſuppoſant en général que $b(180^\circ - i) = 1$); & par $3psx$ dans le cas préſent parce que $i = 90^\circ$ & $b.\,90 = 1$.

Si la direction im (fig. 3. G) de la viteſſe d'un plan vertical, dont un élément horizontal eſt repréſenté par am, faiſoit un angle i avec ſa ſurface, alors la preſſion de l'eau ſur la face antérieure de am ſeroit exprimée par $p.mo.\,(h + x\,\mathit{ſin}.\,i^2)$ (en ſuppoſant, que mo ſoit la projection de cet élément auquel im eſt perpendiculaire, & que x ſoit la hauteur à laquelle eſt due la viteſſe repréſentée par la ligne im). Mais la preſſion de l'eau ſur la face arriere de ce même élément qui eſt également à une profondeur h au-deſſous du niveau de l'eau, ne ſeroit plus $p.mo\,(h - 2x)$, mais $p.mo\,(h - x - x\,\mathit{ſin}.i^2$. Car le vuide qui ſe forme alors derriere le plan a une profondeur qui n'eſt plus égale à x, mais à $x\,\mathit{ſin}.\,i^2$. En effet parmi les molécules qui ſont en contact avec la face arriere du plan, celles qui ſont au-deſſous du niveau de l'eau à une profondeur plus grande que, x prennent toute la viteſſe im du plan qui s'éloigne d'elles, & l'accompagnent dans ſa marche. Quant à celles dont la profondeur eſt plus petite que x, elles ne peuvent ſans doute ſuivre le plan dans le ſens im; mais ſollicitées à ſe mouvoir en tout ſens avec une viteſſe due à leur profondeur, elles ſe répandent ſubitement dans le vuide qui tend à ſe former derriere le plan, en ſe dirigeant ſur de nouveaux points de ce plan, & en ne ceſſant de l'atteindre ou de le toucher que lorſqu'elles ne peuvent prendre qu'une viteſſe plus petite que ir; qui compoſante de la viteſſe im, eſt due à une hauteur $x\,\mathit{ſin}.\,i^2$. Les molécules dont la profondeur eſt plus petite que cette derniere hauteur ſont donc les ſeules qui ne peuvent reſter en contact avec la face arriere du plan pendant ſon mouvement. Le vuide qui ſe forme derriere celui-ci, ne doit donc avoir qu'une profondeur $x\,\mathit{ſin}.\,i^2$; & les molécules qui inférieures à ce vuide, accompagnent le plan, ne tendent à prendre de viteſſe aſcenſionnelle que celle qui eſt dûe à la hauteur $x\,\mathit{ſin}.\,i^2$ Toutes les molécules placées derriere ce plan en mouvement peuvent donc prendre, & une viteſſe horizontale due à la hauteur x,

parce que le plan fuit directement avec cette vitesse; & une vitesse ascensionnelle due à la hauteur $x\ sin.\ i^2$. Ainsi celles qui exercent quelque pression sur un élément de la face arriere du plan, doivent avoir une profondeur h plus grande que ($x + x\ sin.i^2$) & leur pression doit être généralement exprimée par $p.mo.\ (h - x - x\ sin.i^2)$. La différence de cette pression, à celle opposée que le même élément éprouve sur sa face antérieure, est $p.mo.x\ (1 + sin.i^2 + sin.i^2)$. En raisonnant de même sur tous les élémens horizontaux d'un plan vertical tel que *eoim* (fig. 7. G) & nommant s la projection de sa surface s, sur un plan auquel est perpendiculaire la direction de sa vitesse, la résistance éprouvée par ce plan, dans le sens de son mouvement est exprimée avec une précision qui est suffisante pour l'art de la marine par $bpsx\ (1 + sin.i^2 + sin.i^2)$.

285. Toutes les idées précédentes, qui se réunissent ainsi pour conduire à une expression très-simple de la résistance de l'eau, embrassent cependant toutes les circonstances de ce phénomene naturel; & leur probabilité est parfaitement établie, sur la concordance des conséquences qui en résultent, avec les faits que l'expérience a fait connoître. Car par de tels principes, on détermine les rapports observés entre les résistances qui sont éprouvées, 1° par deux parallelipipedes tels que *bsor* (fig. 6 G) qui présentent perpendiculairement au choc de l'eau, des faces verticales dont les surfaces sont différentes; 2° par un prisme pareil aux précédens, & par ce même prisme, lorsque sa face antérieure est recouverte, soit par un avant-angulaire *btr* composé de deux plans verticaux *tr* & *bt*, soit par un plan incliné (fig. 11. G); 3° par un prisme triangulaire *abceoi* (fig. 12 G), & par ce même prisme garni d'un avant pyramidal *adcb*; 4° par un prisme, qui dans chacune de ses sections a la forme *snum* (fig. 8. G) & une largeur principale *nm* égale à celle *br* (fig. 6. G) du prisme qui lui est comparé.

Les succès des applications de ces principes, ne se bornent pas à l'explication des résistances éprouvées par des surfaces planes, obliques, ou perpendiculaires à la direction de leur mouvement. Ils s'étendent encore aux

effets

effets de la résistance que l'eau oppose à des corps qui présentent des surfaces courbes au fluide qu'ils refoulent dans un mouvement horizontal & progressif. Mais on ne peut s'assurer de ces nouveaux succès qu'après quelques développemens qui vont être présentés.

286. Considérons par exemple, un parallelipipede dont la face antérieure est verticale & recouverte par un demi-cylindre, dont la base a pour diametre la largeur de cette face. *bson* (fig. 6. G), & le demi-cercle *btr* sont des sections horizontales, du prisme supposé, & de son avant. Décomposons l'arc *bt* en ses élémens rectilignes, & supposons que la direction de son mouvement soit *nc* perpendiculaire au diametre *br*. Nous reconnoitrons aisément que chaque élément tel que *n* fait avec une ligne qui est parallele à la direction *cn*, un angle égal à *ucb*, ou qui a pour mesure l'arc compris entre le lieu de cet élément & l'extrêmité *b* du diametre. La grandeur, des angles d'incidence, ou de ceux qui sont formés par la direction du mouvement avec chaque élément, augmente donc progressivement depuis *b* jusqu'en *t*, comme les arcs compris entre le point *b* & chacun des élémens de l'arc *bt*. Ainsi les molécules qui sont en contact avec eux sont refoulés sous des angles d'incidence *i* qui sont tous différens les uns des autres, & leur retraite devroit varier comme ces angles. Mais ces molécules peuvent-elles obéir, chacune en particulier, isolément, & indépendamment, à ces pressions qui sont toutes inégales ? Et peuvent-elles faire leur retraite sur des lignes divergentes ? Ne doit-on pas présumer, au contraire, que ces molécules contigues, toujours pressées d'être unies étroitement, & de se mettre en équilibre, se transmettent instantanément les pressions variées qu'elles expriment ; que ces mêmes pressions se combinent ensemble pour se réduire à l'égalité où elles tendent continuellement, c'est-à-dire à une pression moyenne, par laquelle le fluide qui environne *tb* est forcé de fuir en masse devant cette ligne courbe, en ne cessant de former un tout continu ; & qu'enfin dans cette même masse, les molécules qui sont placées pour obtenir une retraite plus facile, doivent partager avec les collatérales qui

les touchent ſans interruption, la gêne plus grande que celles-ci devroient éprouver dans leur fuite iſolée. On peut penſer que ces communications récip oques qui paroiſſent ſi plauſibles, à cauſe de la grande mobilité des molécules de l'eau, à cauſe de leur tendance continuelle à l'égalité de preſſion, ſe propagent ſubitement de proche en proche, & forcent enfin toute la maſſe fluide qui correſpond à *tb*, de réagir & de faire ſa retraite devant cet arc comme ſi elle étoit frappée & repouſſée ſous un angle d'incidence qui tiendroit le milieu entre tous les angles *i*, que chaque élément de *bt* forme avec la direction *ct* du mouvement.

L'arc *bt* étant de 90°, l'angle moyen d'incidence dont nous venons de parler eſt de 45°. Il eſt le même que celui de la direction du mouvement avec la corde *tb* de cet arc. Ainſi en étendant ce raiſonnement à la recherche de l'action de l'eau ſur toutes les ſections d'un priſme couvert d'un avant ſemi-cylindrique; on en conclut que l'eau lui oppoſe la même réſiſtance qu'éprouveroit ce même priſme ſi ſa face antérieure étoit recouverte, à la place du demi-cylindre, d'un avant angulaire formé par deux plans verticaux qui feroient dirigés comme les cordes *bt* & *tr*, & inclinées l'une & l'autre de 45° en *b* & *r* à la face recouverte.

L'expérience a démontré, non-ſeulement l'égalité des réſiſtances éprouvées par ce priſme, lorſque ſucceſſivement il eſt couvert par les deux avant indiqués; mais auſſi la vérité du rapport que cette théorie indique entre les réſiſtances que l'eau oppoſe, & à ce priſme nud, & à ce priſme garni d'un de ces avans. Ces principes, dans leurs réſultats, s'accordent auſſi avec ceux de l'expérience. Celle-ci démontre, 1° qu'un priſme dont la ſection horizontale eſt ACDB (fig. 15. G) éprouve une même réſiſtance dans ſes mouvemens dirigés, ſoit de A vers B, ſoit de B vers A, lorſque les arcs CA & BA qui terminent une partie de cette ſection, ont des cordes égales aux lignes CD & DB qui ſont les limites de l'autre partie; 2° qu'un ſolide (formé par la demi-réſolution d'une ſurface telle que DHAC, dont le contour eſt compoſé d'un arc de parabole CA & d'une ligne droite CD

qui se joignent en C vis-à-vis le milieu H de la longueur DA) doit se mouvoir dans l'eau avec une même vitesse, soit dans le sens AD, soit suivant DA; 3° que l'eau n'oppose pas une résistance différente, à un vaisseau dont les sections horizontales, sont terminées par une courbe *imbdc* (fig. 16. G), & à un autre vaisseau qui ne differe du premier que parce que ses sections horizontales sont terminées par les lignes droites, *ib*, *bd*, *dc*, *ci*, &c. cordes des arcs correspondans des contours des lignes d'eau réelles du vaisseau comparé; 4° qu'un vaisseau tel qu'on en construit aujourd'hui, éprouve moins de résistance, que dans le cas où sa proue *zonfe*, restant la même (fig. 29. G), sa poupe seroit changée de la forme *zagfe*, en celle d'un prisme rectangle *ibcefz*, dont la base seroit le maître couple *zfe*.

287. L'expression de la résistance que l'eau oppose à un vaisseau en mouvement est extrêmement importante. C'est pourquoi je vais ajouter quelques développemens qui puissent en faire connoître sommairement les résultats les plus intéressans.

Dans un vaisseau (fig. 75. G) chaque ligne d'eau a un contour curviligne tel que A*e*B*g*D*hct* (fig. 30. G). L'avant B*e*A*tc* & l'arriere B*g*D*hc*, sont séparés par la largeur principale B*c* située dans le maître couple; & la surface est partagée en deux parties ABDGA & ACDGA, par la ligne AD qui est leur largeur principale située dans le plan diamétral. Les résistances que l'eau opposeroit à une ligne d'eau isolée A*e*B*g*D*hct*, seroit la même que celle qui seroit éprouvée (286) par une figure ABDC inscrite à la premiere, & qui auroit comme elle AD & BC pour dimensions principales; tandis qu'elle seroit terminée par des lignes droites, AB, BD, DC, CA qui sont les cordes des courbes A*e*B, B*g*D, D*hc*, *ct*A. C'est pourquoi considérons les lignes d'eau réelles d'un vaisseau comme si leur contour étoit rectiligne, & cherchons les résistances qu'éprouvent ces dernieres figures pour en conclure la résistance que l'eau oppose, aux premieres, & à la carene entiere.

La vitesse d'un vaisseau est-elle dirigée de D en A & due à la hauteur *x*, Soient nommés, *i* l'angle BAG; *s*

l'angle GAC, a l'angle BDG, & A l'angle GDC. Faisons b (180—i), & B (180—J)=I. Rappellons-nous que la résistance de l'eau est, en raison directe de la pression contraire au mouvement, & inverse de la facilité de la retraite du fluide refoulé. (Distinguons sous les titres de *longitudinales*, *latérales*, & *verticales*, les pressions de l'eau qui sont dirigées perpendiculairement aux plans, du maître couple, du diamétral, & de la flottaison). Ainsi déterminons séparément ces diverses pressions d'après les principes exposés précédemment. La résultante des pressions que l'eau exerce dans le sens AD sur le contour ABD, est p.BG.x $(1+\mathit{sin}.i^2+\mathit{sin}.a^2)$ parce que BG est la projection commune de BA & de BD sur le plan du maître couple. Sur le contour ACD, la pression exercée est p. GC.x $(1+\mathit{sin}.j^2+\mathit{sin}.A^2)$. La résultante des pressions latérales que l'eau exerce sur l'avant BCA, ou perpendiculairement au plan diamétral AD est p.GAx $(\mathit{sin}.j^2-\mathit{sin}\ i^2)$; (GA étant la projection commune des côtés AB & AC sur le plan diamétral,) & sur l'arriere BDC, elle est p.GDx $(\mathit{sin}.A^2-\mathit{sin}.a^2)$.

On voit donc que lorsqu'il y a égalité entre les angles A & a, entre j & i, entre BG & GC, ainsi qu'entre les momens des pressions tant longitudinales que latérales, 1° les pressions longitudinales peuvent aisément se balancer; 2° les pressions latérales se détruisent réciproquement; & 3° l'égalité de b & B qui en résulte assure au fluide refoulé la même facilité pour faire sa retraite de chaque côté de l'avant. C'est en se fondant sur de pareils rapports qu'on peut juger si une ligne d'eau donnée, doit suivre la direction DA sur laquelle elle est sollicitée à se mouvoir : & on doit reconnoitre que sans ces égalités son mouvement ne peut se diriger invariablement sur la ligne indiquée. Par une conséquence immédiate de ces réflexions, il faut donc établir pour regle générale, que les lignes d'eau d'un vaisseau doivent chacune être composées de deux parties parfaitement égales & placées de part & d'autre du plan diamétral. En étendant cette réflexion à l'ensemble de toutes les sections horizontales de la carene, on doit en conclure que cette carene, ainsi que le maître couple, les couples qui lui sont pa-

ralleles, & toutes les lignes d'eau, doivent être toujours partagés par le plan diamétral en deux parties égales. C'eſt ſur ces principes qu'eſt fondé l'uſage reçu dans l'architecture navale de faire ſymmétrique la carene des vaiſſeaux, afin qu'ils aient la propriété eſſentielle de ſuivre ſans déviation la direction de leur quille, lorſque dans ce ſens direct ils ſont ſollicités au mouvement. D'ailleurs l'expérience a fait voir qu'une altération même légere, dans la ſymmétrie des deux flancs de la carene, donne à un vaiſſeau une tendance à diriger ſon mouvement progreſſif du côté oppoſé au flanc qui eſt le plus renflé. Car deux corps flottans, ayant dans leur carene des tranches telles que AMBN & *abcd* (fig. 19 & 20. G) qui avoient reçu latéralement en MB & *dn* un renflement qui n'exiſtoit pas ſur le flanc oppoſé; ces corps dis-je ſuivoient dans l'expérience, la route curviligne A*nmr* & *co*, lorſqu'ils étoient ſollicités à ſe mouvoir ſuivant leur longueur.

288. C'eſt en combinant ces preſſions longitudinales, latérales, & verticales ainſi que leurs momens à l'égard du centre de gravité des vaiſſeaux qu'on arriveroit aux grands réſultats qui doivent ſervir, ſoit à établir le lieu de la mâture d'un vaiſſeau (fig. 75. G) & la hauteur SV à laquelle peut être placé ſans danger l'effort *ov* des voiles expoſées au choc du vent; ſoit à expliquer les auloffées & les arrivées d'un vaiſſeau, ſes tangages & ſes roulis, ſa dérive dans les routes obliques, ſes déviations lorſqu'il eſt à la bande, & enfin tous ſes mouvemens qu'il peut recevoir à la mer dans les différentes ſituations où il peut être placé. Je ne parcourrai pas ces conſéquences nombreuſes, quoiqu'elles ſoient des applications directes à la marine des principes expoſés précédemment; & je les réſerve pour un traité de marine, parce qu'elles méritent, par leur importance, d'être largement détaillées, pour l'inſtruction des marins, & les progrès de l'art.

APPENDICE

Sur les nouvelles Mesures usuelles adoptées par le Peuple Français.

NOUS avons donné une idée générale (2) des mesures connues sous le nom d'*unités*. Nous avons fait sentir combien les nations, même les plus éclairées, ont mis d'arbitraire dans le choix des mesures usuelles; & c'est assez sans doute pour démontrer combien il étoit devenu nécessaire de chercher des bases fixes sur lesquelles pussent reposer des mesures dignes d'être adoptées sur toute la surface du globe.

Ces recherches & ces changemens intéressoient surtout la nation Française, parce que les mesures employées au nord & au midi de la France, ont présenté jusqu'ici une discordance qui ne doit jamais être connue dans les usages des diverses sections d'un même peuple ; & parce qu'elles étoient des sources d'abus, de fraudes, & d'erreurs. Il appartenoit donc aux Français d'appeller les premiers des innovations utiles dans leurs mesures usuelles. Favorisés par des circonstances qui leur ont enfin permis de développer leur amour pour la liberté & l'égalité, ils ont les premiers proclamés que dans la nature seule, il convenoit de chercher des échelles simples & invariables, pour mesurer uniformément la grandeur ainsi que le poids de tous les corps; & qu'elles devoient être indépendantes des hommes, de leurs caprices, & de leurs opinions. Ils ont pensé qu'elles devoient être fondées sur la forme actuelle de la terre, & sur le poids de l'eau qui descend de la région des nuages. Ils ont donc adopté, *la longueur du quart d'un méridien terrestre* pour l'unité nouvelle lineaire; & le poids d'un certain volume d'eau distillée, pour servir à mesurer les poids de tous les corps. En conséquence, des savans Français ont été chargés de déterminer immédiatement la longueur réelle d'un arc terrestre, du méridien, compris entre Dunkerque & Barcelonne; & la connoissance de cet arc, (dont la

position entre le pole & l'équateur, produit le balancement des effets qu'on peut attribuer à une dissemblance présumée entre les divers arcs d'un même méridien) a servi à établir avec une exactitude suffisante, que la longueur de l'arc de 90° ou l'*unité universelle*, est de 5132430 toises.

Une telle mesure, par sa grande étendue, ne seroit commode ni dans la société, ni dans la marine. C'est pourquoi, il a été nécessaire de la diviser & de la subdiviser. Le mode qui a été adopté, est celui de la division décimale, parce qu'ainsi que nous l'avons fait voir (29), il procure autant de facilité que d'uniformité dans tous les calculs des grandeurs.

Cette unité universelle étant ainsi partagée en dixiemes, centiemes, milliemes, &c; on a choisi sa dix-millionieme partie, pour servir d'*unité lineaire usuelle*; & la *toise*, *unité ancienne*, a été remplacée par le *metre*, *unité nouvelle*, dont la longueur est de 0 toise, 513243 ou de 3 pieds 0 pouces 11 lignes, 442.

Les longueurs de toutes les lignes, seront donc désormais exprimées en *metres*; mais les grandes distances exigent, pour être évaluées, des mesures assorties; & comme auparavant elles étoient estimées en lieues, elles le seront aujourd'hui en *millaires*, qui valent chacun 1000 metres ou 513 toises, 243. Quant aux dimensions plus petites qu'un metre, elles ne seront plus évaluées, ni en pieds, ni en pouces, ni en lignes, mais en parties décimales du metre, désignées sous les noms de *décimetres*, *centimetres*, *millimetres*, &c.

Les rapports réciproques des anciennes mesures aux nouvelles, se trouvent ainsi parfaitement déterminés; & des proportions simples peuvent servir à évaluer, en metres & parties décimales de metre, des grandeurs exprimées en toises, pieds, pouces, ou lignes. Les marins parviendront aussi par de pareilles proportions à apprécier, en millaires, metres, & décimales de metre; la lieue marine, l'encablure, la brasse, la palme; & les calculs conduisent à donner, à la lieue de 2851 toises, 2 la valeur de 5,5568 millaires; à l'encablure de 100 toises celle de 194,84 metres; à la brasse de 5 pieds celle de

1,6237 metres; & à la palme de 1 pouce, 08333 celle 2,9316 centimetres.

Ces premieres unités lineaires, étant établies, doivent servir à mesurer les dimensions de tous les corps. Ainsi les surfaces doivent être évaluées en *metres quarres.* (131); & cette nouvelle unité superficielle vaut 9,4831 pieds quarrés. Précédemment les surfaces, selon leur étendue plus ou moins grande, étoient mesurées en arpens, en perches, en toises, en pieds quarrés, &c; & aujourd'hui le metre quarré & ses multiples ou sous-multiples décimaux, serviront aux mêmes usages sous les noms de *are*, *deciare*, *centiare*, *décimetre quarré*, *centimetre quarré*, &c. L'are vaut 10000 metres quarrés; le déciare est une surface dix fois plus petite; le centiare est le centieme de l'are, & les décimetres, centimetres, &c quarrés sont des mesures dix fois, cent fois, &c plus petites que le metre quarré. Ainsi, d'après ces rapports, on trouve par des proportions, que la valeur de l'ancien arpent est de 5103,76 metres quarrés; que celle de la perche quarrée est de 51,0376 m. q.; que celle de la toise quarrée est de 3,79626 m. q., &c. Par le même moyen, toute surface évaluée en anciennes mesures peut être aisément réduite en nouvelles.

Les volumes des corps doivent aussi être mesurés avec une unité solide nouvelle, nommée *metre cube*, comme ils l'étoient précédemment avec une toise cube (143); & des décimales de ce metre, serviront à assortir cette mesure à toutes les circonstances, avec la même facilité qu'on trouvoit à employer le pied, le pouce & la ligne, cubes.

Les innovations dans ce genre, en ont même entraîné de très-particulieres dans le mesurage des grains & des liquides. La même unité, le même metre cube, doit en conséquence être désormais la mesure commune des volumes de tous les corps soit, solides, soit fluides, soit liquides.

Ainsi, au lieu d'employer spécialement, pour les grains, le litron, le boisseau, le septier; & pour les liquides, la pinte, la velte, le muid, le tonneau; on se servira, comme pour les corps les plus solides, du seul metre

cube & de ses décimales. Dans cet usage, cependant, pour les liquides & les grains; la mesure, dont la contenance est celle d'un metre cube, recevra le nom de *cade*, & ses décimales, ceux de *décicade*, *centicade*, *cadil*, *décicadil*, *centicadil*, pour indiquer les, dixieme, centieme, millieme, dix-millieme, & cent-millieme, du cade ou du metre cube. Par ces rapports, & par des proportions, on trouve, que le volume du cade, est de 1051,3333 pintes de Paris (dont chacune est de 48 pouces cubes), & de 78,9 boisseaux de Paris; que le cadil vaut 1,05 pinte, & 0,0789 boisseau, &c. Le cadil deviendra, par cette raison, une mesure élémentaire destinée aux usages qu'on a fait de la pinte & du boisseau.

Il ne suffit pas aux besoins de la société, qu'il y ait des *unités* pour mesurer, les dimensions, les surfaces, & les volumes des corps. Car, dans le commerce, plusieurs objets sont vendus, achetés, ou échangés, en raison de leur poids. C'est pourquoi il faut aussi un terme de comparaison pour les poids de tous les corps. Cette *unité de poids* qui doit être choisie pour conserver l'uniformité la plus grande dans le systême général des mesures; celle qui, prise dans la nature, doit remplacer la mesure ancienne, est le poids (mesuré dans le vuide) d'un mètre cube rempli d'une eau distillée qui est à la température de la glace fondante. Le choix d'une telle unité, ne porte, comme on voit, aucune trace d'arbitraire; & elle convient non-seulement à la nation Française, mais aussi à tous les peuples de la terre; parce que sur toute la surface du globe, cette unité, ou cette eau qui ne cesse d'être par-tout homogene, est aisée à peser & à retrouver. Des savans Français, ont été chargés de mesurer le poids d'un metre cube de cette eau; & il a été trouvé de 2044,4 livres anciennes. On donne au poids de ce volume d'eau le nom de *bar*; & ses décimales dans un ordre successif ont reçu les noms de, *décibar*, *centibar*, *grave*, *décigrave*, *centigrave*, *gravet*, *décigravet*, *centigravet*. Le bar est une mesure trop grande, pour être employée dans tous les usages du commerce & de la vie civile; & s'il peut remplacer le tonneau de 2000 toises, qui jusqu'à présent a servi

à évaluer le port des bâtimens de mer; *l'unité usuelle de poids* a paru devoir être la millieme partie, du bar, ou du metre cube; & par conséquent être équivalente à 2,0444 livres. Les décimales de cette unité, s'étendent successivement du décigrave, aux centigrave, gravet, décigravet, centigravet, & peuvent se prolonger autant que les circonstances l'exigent.

Les rapports, des livres & des graves; du bar & du tonneau; suffisent pour déterminer par des proportions les valeurs des nouvelles mesures en anciennes, & réciproquement. Ainsi, on trouve que la valeur du quintal ancien est de 4,8914 centibars; celle de la livre de 0,489146 grave, celle du grain de 5,30736 centigravets, &c. Réciproquement celle du décibar est de 204,44 livres anciennes, celle du centigrave est de 2,616832 gros; & celle du centigravet de 0,1884119 grains.

Les monnoies qui, par leur poids, sont entre les diverses nations, des matieres propres à faciliter les échanges des objets de leurs besoins, ou de leurs richesses réciproques; ont éprouvé aussi une réforme qui les assujettit au systême uniforme des mesures. L'unité de toutes les monnoies Françaises, ou *l'unité monnétaire*, qui déja est désignée sous le nom de *franc-d'argent*, aura désormais le poids d'un centieme de grave, ou d'un centigrave d'argent. Sa valeur matérielle, est donc à celle de l'écu de 3 livres de même titre (qui sert de base au change de la France avec les autres nations commerçantes), dans le rapport de 188,41 à 276,505; parce que l'écu de 6 livres pese 553,01 grains. A l'aide de ces rapports, les valeurs relatives des anciennes pieces de monnoie dont le poids est connu (le titre étant supposé constant) seront aisément estimées en francs-d'argent ou en parties décimales de cette unité nouvelle, & réciproquement.

La livre de compte, qui a servi jusqu'ici d'unité simplement numéraire, & qui n'est réellement qu'une unité imaginaire propre à faciliter les calculs du commerce & de la vie civile; reste seule en usage pour exprimer les valeurs numéraires changeantes, soit des pieces de monnoie, soit des denrées, soit de tous les

objets de nos besoins. Elle a été conservée, (je ne sais par quelles considérations, puisque les valeurs des objets échangés, pourroient être aussi bien exprimées par le poids de pieces d'argent, comme par leur valeur idéale & numéraire) & le seul changement qu'elle ait éprouvé pour lui donner une certaine analogie avec les autres mesures, est celui de ses subdivisions. La livre numéraire ne sera donc plus, comme précédemment, partagée, en 20 sous & 240 deniers, mais en parties décimales qui porteront les noms de *décime*, *centime*, *millime*, *&c.*

Le passage des anciens comptes à ceux que comporte le nouvel ordre numéraire, ne présente aucune difficulté, en ayant égard aux réflexions précédentes. En effet le sou, étant le 20e de la livre, doit en être regardé comme les cinq centiemes, ou il vaut 0,05 de livre. Le denier équivaut à-peu-près aux quatre milliemes de la même unité, ou plus exactement à 0,004167 livre. Ainsi est-il question de réduire des sous en centimes, il faut multiplier leur nombre par 5 ; & pour exprimer des deniers en millimes, leur nombre doit être multiplié par 4. Ce calcul simple & facile conduit à la valeur du denier, approchée à moins d'un millieme près; parce que le millime actuel ne vaut que les 24 centiemes d'un denier ancien. D'ailleurs des proportions serviront à déterminer des valeurs plus approchées lorsqu'elles seront exigées par l'importance des résultats.

Le systême général des mesures, ne se borne pas à celles qui viennent d'être indiquées. Il embrasse encore, & les divisions du jour, & celles de la circonférence d'un cercle.

Le *jour*, qui est l'unité de révolution de la terre sur elle-même, a donc été partagé en parties décimales nommées, *heures*, *minutes*, & *secondes*, comme précédemment. Mais l'heure sera actuellement la dixieme partie du jour moyen, au lieu d'en être la 24e partie. La minute sera le centieme de cette heure, & la seconde, le centieme de la minute. Ainsi le jour sera désormais de 10 heures, & l'heure nouvelle vaudra 2 heures 24′, ou 144 minutes, ou 8640 secondes anciennes; ce qui peut servir à réduire, les heures, minutes, & secondes nouvelles en mesures anciennes; & réciproquement.

Enfin, cette circonférence que le ſoleil paroît décrire chaque jour dans le ciel, autour de la terre; ainſi que celles de tous les cercles qui ſont tracés, ou ſur la roſe des bouſſoles, ou ſur les inſtrumens propres à la meſure des angles (168) ceſſeront d'être diviſés en degrés. Chaque quart d'une circonférence, ainſi que le quart du méridien terreſtre qui eſt l'unité univerſelle, ſera regardé comme compoſé de cent parties égales nommées *grades*. Cette diviſion ſera ſubſtituée à celle de 90°; & chaque grade ne ſera pas partagé comme l'ancien degré en 60′ ou 3600″; mais en 100 minutes, & 10000 ſecondes. La valeur du grade nouveau ſera donc de 54′ de degré. L'ancienne minute équivaudra à 1,852 minute nouvelle; & il faudra 3,086 ſecondes nouvelles pour former la grandeur d'une ſeconde ancienne.

Tel eſt le ſyſtême général des meſures adoptées par le peuple Français. Telles ſont les baſes, & les liaiſons ſimples autant qu'uniformes de toutes ſes parties. La méthode de calculer les nombres de ces nouvelles unités, ne differe pas de celle dont les principes ont été expoſés dans cet ouvrage (32); & ces principes peuvent, dans tous les cas, ſervir à déterminer & à différencier les réſultats de toutes les opérations, d'arithmétique, de géométrie, d'aſtronomie, ou de mécanique.

Nous remarquerons ſeulement que les meſures, dont on vient d'indiquer la grandeur & les rapports, doivent être pour les marins, les mêmes que pour les autres ſections du peuple Français; parce que les beſoins qui ſont de même genre, & ſur terre, & ſur mer, n'exigent, ni des meſures différentes, ni des noms particuliers qui les diſtinguent. Cependant, il eſt certaines conſéquences de ces meſures nouvelles, qui ſont ſpécialement applicables à l'art de la marine, & dont l'adoption reſte encore à ordonner par les Répréſentans du peuple; afin que n'étant pas abandonnée aux caprices variés des marins, les uſages ſoient uniformes dans les divers ports de la République. Telles ſont les diviſions de la roſe de la bouſſole, qui marquées juſqu'à préſent par 32 airs de vent; paroiſſent devoir être déſormais au nombre de 40, afin que chaque quart d'une roſe ſe trouve ainſi

partagé en dix parties égales. Tels sont les nœuds de la ligne de lok, dont la longueur, doit avoir un rapport fixe avec le millaire, comme elle en a eu avec l'étendue de la lieue marine. Telle est enfin la durée du sablier de lok, qui, employé dans la détermination de la marche des vaisseaux, doit avoir avec l'heure nouvelle, un rapport déterminé d'après celui du nœud au millaire.

Dans ces vues, j'ai proposé d'étendre, la durée du nouveau sablier de lok à 50 secondes nouvelles, & la longueur du nœud à 20 metres; afin que le sablier devenant les deux centiemes de l'heure nouvelle, & le nœud dans le même rapport avec le millaire; on puisse conclure facilement, en jetant le lok, qu'un vaisseau qui parcourt un nœud nouveau pendant la durée d'un tel sablier, doit franchir quatre millaires par heure, lorsque sa vitesse ne cesse d'être la même.

Déja j'ai présenté ces idées, avec de plus grands détails, dans un *avis aux marins*, que des Représentans du peuple ont cru devoir faire imprimer à Rochefort pour l'instruction publique. Leur convenance a été soumise au jugement de la Convention Nationale; & ses décisions sur ces objets particuliers acheveront de donner au système des mesures, ce caractere d'uniformité que réclame l'ordre général, non-seulement pour les usages de la vie civile, mais aussi pour toutes les opérations de la marine Française.



TABLE (*)

Des heures & minutes qu'il faut ajouter à l'établiſſement d'un port, pour déterminer chaque jour, aſſez exactement, ſuivant l'âge de la Lune, le moment de la haute mer.

AGE de la LUNE.	TEMPS à ajouter.	AGE de la LUNE.	TEMPS à ajouter.
1 jours.	0 h. 44′	16 jours.	0 h. 56′
2	1 22	17	1 34
3	1 56	18	2 8
4	2 28	19	2 40
5	3 2	20	3 14
6	3 40	21	3 52
7	4 24	22	4 36
8	5 12	23	5 22
9	6 4	24	6 16
10	7 4	25	7 18
11	8 8	26	8 22
12	9 12	27	9 26
13	10 15	28	10 30
14	11 16	29	11 32
15	12 12	29 $\frac{1}{2}$	12 2

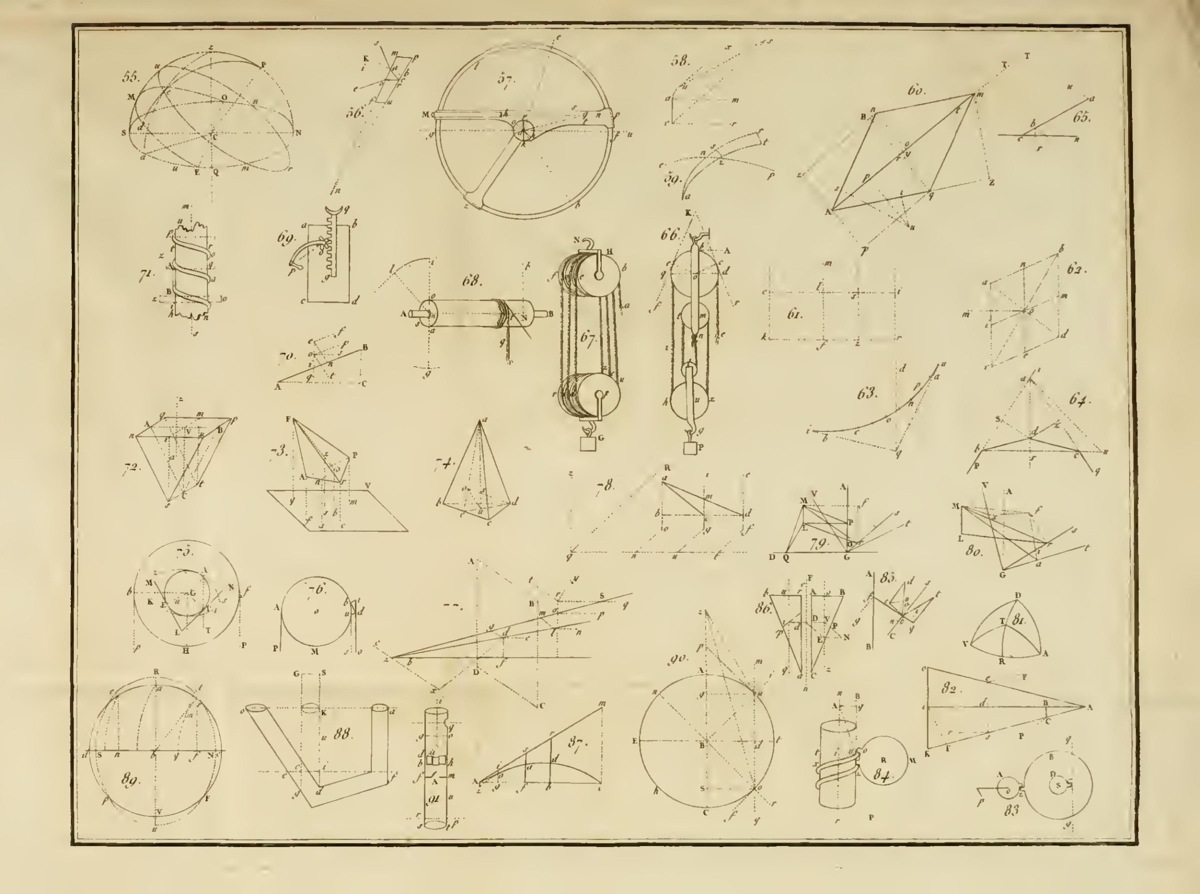
(*) *Nota.* Cette table avoit été annoncéé, (179) dans l'Aſtronomie, comme propre à donner des réſultats plus exacts que ceux qui ſont fondés ſur 49 m. de retard journalier des marées. Elle ne ſatisfait pas encore à toutes les influences, des poſitions relatives du ſoleil & de la lune, & des diſtances variables de ces aſtres à la terre. Mais je la préſente, comme préférable à la table de Lacaille, qui, ſuivant des expériences nombreuſes faites en Angleterre, a été ſouvent trouvée en erreur de 40 m; & comme étant formée d'après des obſervations multipliées & choiſies.

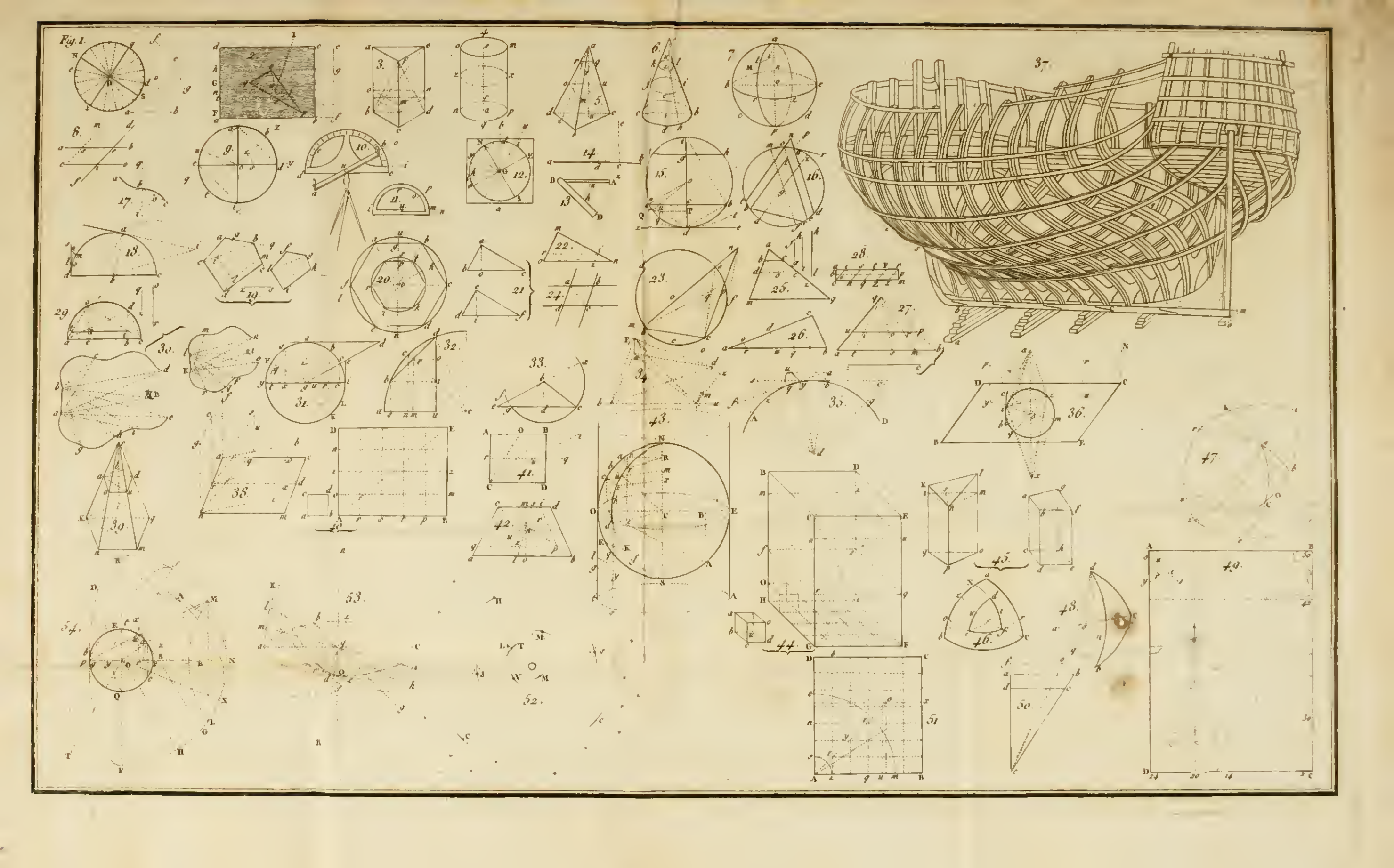
TABLE

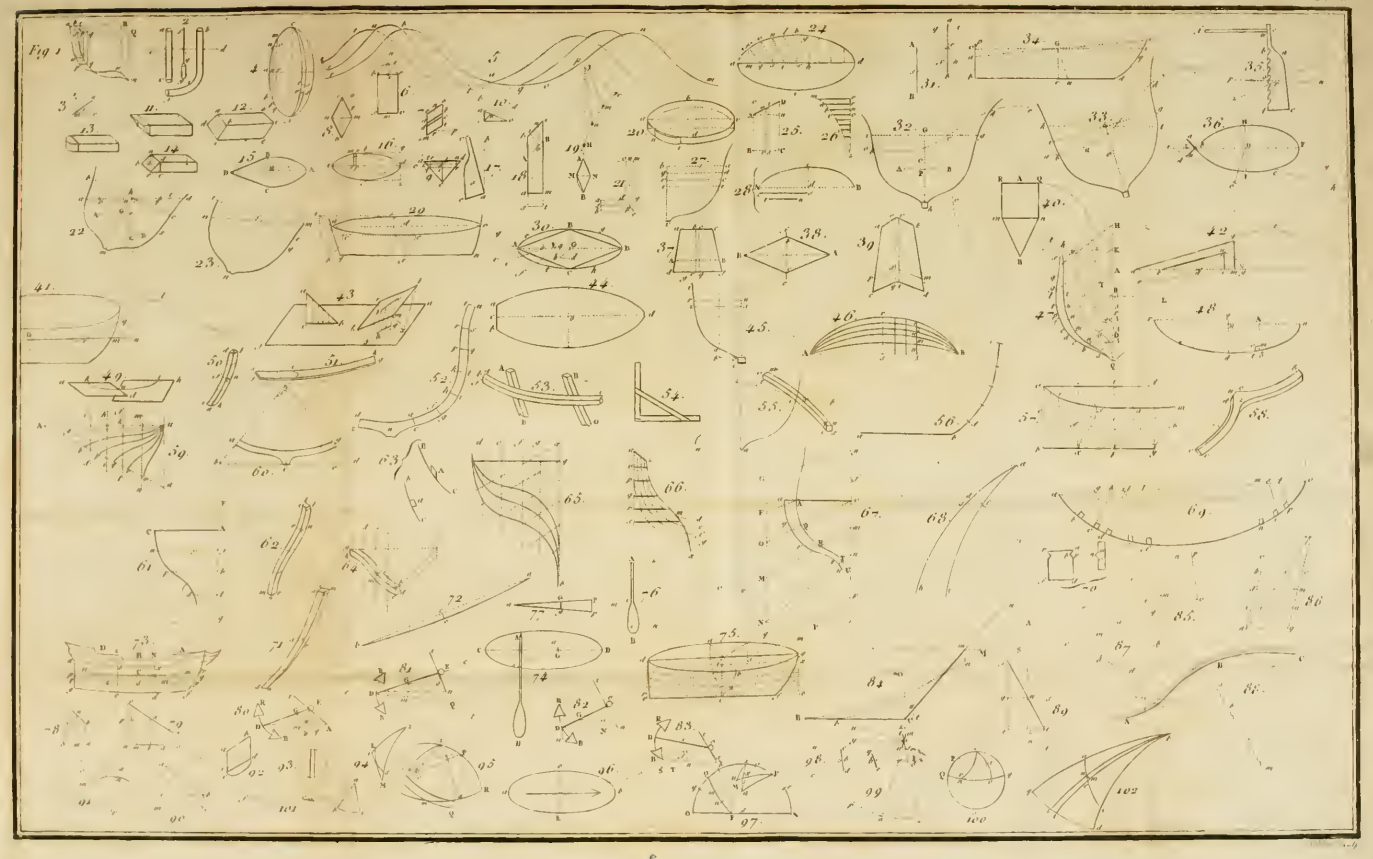
Des MATIERES traitées dans cet Ouvrage.

	pages
ARITHMÉTIQUE	1
Addition des Nombres entiers	5
Soustraction	8
Multiplication	10
Division	16
Des Fractions en général & des décimales	25
Des Nombres complexes	44
Arithmétique universelle, ou élémens d'Algebre	54
Puissances des nombres	71
Racines des nombres	76
Rapports & proportions des nombres	91
Progressions	109
Logarithmes	119
GEOMETRIE	134
Des lignes	140
Angles rectilignes	147
Des figures planes, ou des Polygones	170
Trigonométrie rectiligne	201
Des plans & des surfaces planes	223
Angles des lignes droites avec des plans	225
Angles plans	229
Projections des lignes & des surfaces sur des plans	235
Mesure des surfaces planes	245
Rapports des surfaces planes	253

	pages
Des ſolides	265
Surface des ſolides	266
Solidité des ſolides	274
Rapports des ſolidités des corps	286
Trigonométrie ſphérique	290
Cartes marines	313
Réduction des routes des vaiſſeaux	323
ASTRONOMIE	348
État réel du ciel	353
Etat apparent, du ciel vu de la terre	358
Obſervations aſtronomiques utiles à la marine	383
Correction de la poſition eſtimée des vaiſſeaux, en mer	414
Déclinaiſon de l'aiguille aimantée	419
Flux & reflux de la mer	429
MECANIQUE	439
Des forces en général	441
De la communication des mouvemens, & des Machines	481
Des forces phyſiques ou naturelles qui ont des rapports utiles à l'art de la marine	528
De la gravité	ibid
De la force de l'homme	548
Du frottement	554
De la roideur des cordes	562
De l'action de l'eau & de l'air	565
Appendix ſur les nouvelles meſures républic.	604
Table pour le calcul des marées	612


55.
56.
57.
58.
59.
60.
61.
62.
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
78.
79.
80.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.
88.
89.
90.
91.


Fig. 1.
2.
3.
4
5.
6.
7
8.
9.
10.
11.
12.
13
14.
15.
16.
17.
18.
19.
20.
21
22.
23.
24.
25.
26.
27.
28
29.
30.
31.
32.
33.
34
35.
36.
37.
38.
39.
41.
42.
43.
44.
45.
46.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.


Pl. 6.
Fig 1



